I. 2 — Número de ocupações de 2 celas por 3 elementos distinguíveis, sem exclusão de celas ocupadas:

$$N(\text{Maxwell}) = 2^3 = 8\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{ll} (\,ab \mid c\,) & (\,c \mid ab) \\ (\,ac \mid b\,) & (\,b \mid ac) \\ (\,bc \mid a\,) & (\,a \mid bc) \\ (abc \mid -) & (- \mid abc) \end{array}$$

I. 3 — Número de ocupações de 4 celas por 3 elementos indistinguíveis, com exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Fermi}) = \binom{4}{3} = 4\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{c} (\,1 \mid 1 \mid 1 \mid 0\,) \\ (\,1 \mid 1 \mid 0 \mid 1\,) \\ (\,1 \mid 0 \mid 1 \mid 1\,) \\ (\,0 \mid 1 \mid 1 \mid 1\,) \end{array}$$

I. 4 — Número de ocupações de 3 celas por 4 elementos indistinguíveis, sem exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Bosé}) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{lll} (4 \mid 0 \mid 0) & (0 \mid 4 \mid 0) & (0 \mid 0 \mid 4) \\ (3 \mid 1 \mid 0) & (3 \mid 0 \mid 1) & (0 \mid 3 \mid 1) \\ (0 \mid 1 \mid 3) & (1 \mid 0 \mid 3) & (1 \mid 3 \mid 0) \\ (2 \mid 2 \mid 0) & (2 \mid 0 \mid 2) & (0 \mid 2 \mid 2) \\ (2 \mid 1 \mid 1) & (1 \mid 2 \mid 1) & (1 \mid 1 \mid 2) \end{array}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Feller, William — *An introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1950], N. Y.

[2] Gil, J. M. — *Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações*, in. Gazeta de Matemática, N.º 79-80, N.º 81 e N.º 82-83, Lisboa.

[3] Parzen, Emanuel — *Modern Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1960], N. Y.

[4] Riordan, John — *An introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, [1958], N. Y.

[5] Springer, G. — *Notas de aula de um curso sôbre Estruturas Finitas da Matemática*, 1961, S. Paulo.

[6] Barbosa, R. Madsen — *Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória*, publicação da F. F. C. L. de Araraquara (a ser publicado).

Duas observações sobre Estática do Ponto Material

por *José Manuel dos Santos Simões Pereira*

As duas observações que a seguir se apresentam surgiram-nos quando estudámos a Estática do Ponto Material segundo as «Lições de Mecânica Racional» do Ex.$^{\text{mo}}$ Sr. Prof. Doutor Diogo Pacheco de Amorim.

Na primeira referimo-nos a um facto que parece estar em desacordo com a nossa experiência corrente: o de serem instáveis as posições de equilíbrio indiferente. Trata-se é claro duma propriedade que admite uma excepção quando entre as forças aplicadas ao ponto se encontram algumas que dependem da sua velocidade. É o caso, por exemplo, do atrito ou de resistências do meio ambiente que estão presentes na maioria das questões a que diz respeito a nossa experiência corrente.

Na segunda constrói-se um exemplo de posição de equilíbrio estável à qual não corresponde nenhum extremo da função de forças. Pretendemos apenas ilustrar o facto de que a condição dada pelo teorema de LEJEUNE-DIRICHELET para a estabilidade do equilíbrio, sendo suficiente como prova o referido teorema, não é contudo necessária.

No que segue, as notações usadas e as definições de que partimos são as da obra citada.

1 — Consideremos um campo de forças conservativo.

Designemos por U a função de forças e por $V = -U$ a função potencial.

Como é sabido, as posições de equilíbrio num campo de forças conservativo correspondem aos pontos estacionários da função de forças e a definição de equilíbrio indiferente em P_0, implicando a existência duma vizinhança finita de P_0 formada por pontos que são todos eles posições de equilíbrio do ponto material dado, exige que P_0 faça parte duma secção de invariabilidade de U.

Dentro desta secção de invariabilidade o campo é nulo. Por isso, colocando o ponto material (P, m) na posição de equilíbrio P_0, com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, qualquer, pela primeira lei de NEWTON ele seguirá uma trajectória rectilínea com velocidade constante e atingirá sempre a fronteira dessa secção de invariabilidade por menor que seja v_0.

Em P_0 pois o equilíbrio obedece à condição de instabilidade.

2 — Vamos agora considerar um campo de forças conservativo unidimensional, definido sobre o eixo das abcissas cujo vector unitário chamaremos $\vec{i}$.

Seja $\vec{F}$ o vector do campo tal que

$$\vec{F} = \left(-4x^3 \cdot \cos\frac{1}{x} - x^2 \sin\frac{1}{x}\right) \cdot \vec{i}.$$

A função $U = -x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}$ é tal que grad $U = \vec{F}$.

Trata-se duma função contínua, uniforme, de derivada limitada e contínua cuja representação gráfica se pode estudar pelos processos usuais do cálculo. É simétrica em relação ao eixo dos yy e fica toda na porção do plano cartesiano limitado pelas curvas $y = x^4$ e $y = -x^4$. (Ver nota 1).

Com $x = \pm\infty$ tende assimptòticamente para $y = x^4$.

Na origem $U = 0$ e $\frac{dU}{dx} = 0$ mas não se trata de extremo local pois em qualquer vizinhança deste ponto a função toma valores negativos e positivos. Trata-se dum zero não isolado da função e também da derivada, em cuja vizinhança U admite aliás uma infinidade numerável de extremos locais.

Ora no campo de forças assim definido a origem é uma posição de equilíbrio estável.

Com efeito sendo h a constante das forças vivas, tem lugar a relação

$$h = T + V = \frac{1}{2} m v^2 + x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}.$$

O valor de h para as condições iniciais v_0 e x_0 será $h = \frac{1}{2} m v_0^2 + x_0^4 \cdot \cos\frac{1}{x_0}$.

Seguindo as definições da obra citada basta considerar o valor $x_0 = 0$ o que equivale a tomar $h = \frac{1}{2} m v_0^2$.

Sendo assim é fácil verificar que à medida que x aumenta vão surgindo intervalos nos quais V toma valores superiores a quaisquer outros anteriormente tomados. (Ver nota 2).

E, nesses mesmos intervalos, v^2 terá de tomar valores mais baixos que quaisquer outros anteriormente tomados. Só num ponto desses intervalos v^2 se poderá anular e o móvel atingiu aí o seu máximo afastamento. Sujeito a uma aceleração nesse ponto dirigida para a origem, retoma o movimento em sua direcção (salvo, é claro, no caso excepcional de v se anular num dos xx minimizantes de U), atinge-a com a velocidade v_0 e ultrapassa-a. Mas a simetria da função leva-nos, por raciocínios análogos, à conclusão de que, para este lado oposto, o afastamento máximo será o mesmo.

Um cálculo feito supondo, para simplificar, $m=1$ mostra-nos que para

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}<v_0<\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k)^2}$$

a velocidade se anula antes do ponto de abcissa $x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4k}$ pois naquele ponto v anula-se pela primeira vez se $v_0=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k)^2}$.

Quando $k\to\infty$, v_0, enquadrado por duas sucessões infinitesimais, tende para zero e $\Delta=\overline{\lim}\,|x|$ tenderá também para zero, visto o mesmo acontecer à sucessão de termo geral $u_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4k}$.

A origem obedece, pois, à condição de equilíbrio estável, segundo a obra citada.

3 — Há Autores que não formulam assim a condição de estabilidade. No caso mais geral, impõem que durante todo o movimento o valor absoluto dos parâmetros q_i que definem a posição do móvel (ponto ou sistema) seja inferior a um certo ε (arbitràriamente pequeno) desde que os correspondentes valores iniciais q_i^0 e $\dot{q}_i^0$ sejam em módulo inferiores respectivamente a ε_1 e ε_2 com ε_1 e ε_2 funções do ε dado.

No nosso exemplo, em que x é o único q_i teremos de examinar as soluções das equações diferenciais do movimento para condições iniciais x_0 e v_0 pertencentes a certa vizinhança da origem.

A partir do integral da energia

$$\frac{1}{2}v^2+x^4\cdot\cos\frac{1}{x}=h$$

(supondo sempre, para simplificar, $m=1$) consideremos que a constante $h=\frac{1}{2}v_0^2$ para $x_0=0$ passa a ter o valor

$$h'=\frac{1}{2}v_0^2+x_0^4\cdot\cos\frac{1}{x_0}\quad(\text{com } x_0\neq 0).$$

Notemos que o movimento não pode dar origem a valores de x para os quais $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}>h'$ pois viria

$$\frac{1}{2}v^2=h'-x^4\cdot\cos\frac{1}{x}<0;$$

o que equivale a dizer, sob o ponto de vista geométrico, que o movimento não pode dar origem a valores de x para os quais a imagem geométrica da função $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}$ esteja acima da paralela ao eixo dos xx de ordenada h'.

Suponhamos então $v_0<\sqrt{\nu}$ e $|x_0|<\sqrt[4]{\frac{\nu}{2}}$.

Virá $h'=\frac{1}{2}v_0^2+x_0^4\cos\frac{1}{x_0}<\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}=\nu$.

Como durante todo o movimento é

$$\frac{1}{2}v^2+x^4\cdot\cos\frac{1}{x}=h',$$

uma vez provado que se podem tomar pontos arbitràriamente próximos da origem onde $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}>\nu$ desde que ν seja suficientemente pequeno, fica demonstrado que se pode restringir o movimento a qualquer vizinhança da origem, limitando convenientemente v_0 e $|x_0|$. Ora a função $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}$ para $x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}$ (k inteiro) toma o valor $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\cdot\frac{1}{k^4}$. Se k for tal que $k^4<\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\cdot\frac{1}{\nu}$

será $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{k^4} > \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{\nu}} = \nu$.

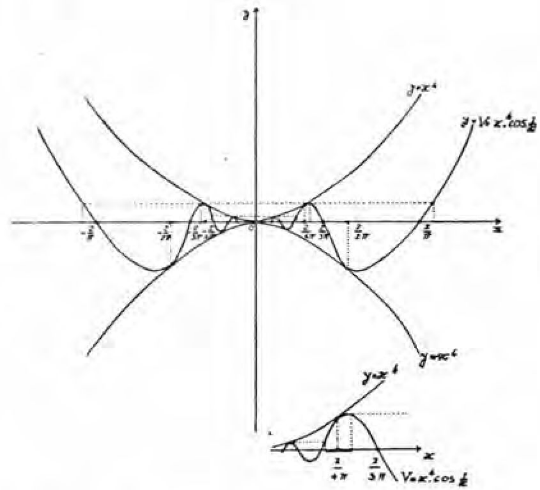
Por isso, querendo limitar o movimento a certa vizinhança da origem $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ basta tomar, por inversão das relações anteriores, $k = I\left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ — onde $I[\;]$ tem o significado habitual, e fixar ν pela condição $\nu < \frac{1}{(2\pi k)^4}$.

O nosso exemplo obedece pois a esta outra definição de estabilidade, que parece ser mais restritiva.

4 — Para as condições iniciais consideradas, como é $h' < \nu$ e $|x| < \varepsilon$ será ainda $\frac{1}{2} v^2 = h' - x^4 \cdot \cos\frac{1}{x} < \nu + \varepsilon^4$. E pondo $\nu + \varepsilon^4 = \frac{1}{2}\delta^2$ isto significa que durante o movimento é sempre $|v| < \delta$ desde que tomemos x_0 e v_0 em vizinhanças convenientes da origem. Quer dizer, mesmo que se exija, na definição de estabilidade, que durante o movimento $\vec{v}$ se mantenha em módulo próxima da origem, desde que x_0 e v_0 também o sejam, mesmo assim o exemplo que demos apresenta uma posição de equilíbrio estável num ponto onde a função de forças não é máxima.

5 — As conclusões precedentes são imediatamente generalizáveis, em vista de cálculos análogos, para a função de forças $U = - d^4 \cdot \cos\frac{1}{d}$ definida num espaço euclidiano a n dimensões, onde $d^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

NOTA 1 — Damos a seguir o aspecto gráfico da função $V = -U = x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}$.



NOTA 2 — Referimo-nos no n.º 2 a intervalos nos quais V toma valores superiores a quaisquer outros anteriormente tomados. Destacámos, na figura, um desses intervalos. Note-se em especial que os respectivos extremos mais afastados da origem são os máximos locais de V, $\left(\text{não são os pontos } \frac{1}{2k\pi}\right)$ e os mais próximos são os x tais que V retoma neles o valor que tem no máximo local imediatamente mais chegado à origem. Nos pontos $\frac{1}{2k\pi}$ são tangentes as curvas $y = x^4$ e $V = x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}$ como se verifica por cálculo simples.

A bibliografia do assunto é muito vasta.

Entre outras consultámos as seguintes obras:

Levi Civitta, *Lezioni di Mecanica Razionale.*
Paul Appel, *Traité de Mécanique Rationelle.*
Appel et Dautheville, *Précis de Mécanique Rationelle*.
Joseph Pérès, *Mécanique Génerale.*
H. Beghin, *Statique et Dinamique.*
G. Hamel, *Theoretishe Mechanik.*
J. Nielsen, *Vorlesungen über Elementare Mechanik.*
Henry Favre, *Cours de Mécanique.*
Rutherford, *Classical Mechanics.*