MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1961.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5491 — Dividindo dois números naturais pelo seu máximo divisor comum obtém-se os quocientes 8 e 15. Determinar os dois números, sabendo que a soma do seu máximo divisor comum com o seu menor múltiplo comum é 726.

R: *Sejam* m *e* d *o menor múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois inteiros* a *e* b. *Tem-se, como se sabe,* $a = d \cdot p_1$, $b = d \cdot p_2$ *e* $m\,d = a\,b$, *onde* p_1 *e* p_2 *são primos entre si. Daqui resulta, em vista dos dados do problema, que* $a = d \cdot 8$, $b = d \cdot 15$ *e* $m + d = \frac{a\,b}{d} + d = 726$, *e portanto* $d \cdot 8 \cdot 15 + d = 726$ *e* $d = 6$. *Deste modo será* $a = 6 \cdot 8 = 48$ *e* $b = 6 \cdot 15 = 90$.

ÁLGEBRA

I

5492 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$16\,x^4 - 4\,m\,x^2 + m - 1 = 0$$

estejam em progressão aritmética.

R. *Prova-se que, para que as raízes da equação biquadrada estejam em progressão aritmética é necessário e suficiente que* $9\,p^2 - 100\,q = 0$, *se* p *e* q *forem a soma e o produto das raízes da resolvente da equação biquadrada. Neste caso teremos* $p = m/4$ *e* $q = (m-1)/16$, *de modo que será* $9\,m^2 - 100\,(m-1) = 0$ *e portanto* $m = 50$ *ou* $m = 10$.

II

5493 — Derivar a função $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ e simplificar o resultado.

R: $y' = \left[\sqrt{1+x^3} - x \cdot 3\,x^2 \cdot {}^1/_2 \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\right] : (1+x^3) = (2 - x^3) : \left(2\sqrt{(1+x^3)}\right)$

TRIGONOMETRIA

I

5494 — Resolver a equação $\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x + \cos x = 2$.

R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $\frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x + \frac{1}{2}\,cos\,x = 1$ *e como* $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\,30^\circ$ *e* $sen\,30^\circ = \frac{1}{2}$ *vem:* $sen\,x\,cos\,30^\circ + cos\,x\,sen\,30^\circ = 1$ *ou* $sen\,(x + 30^\circ) = sen\,90^\circ$. *Tem-se então* $x + 30^\circ = k \cdot 180 + (-1)^k \cdot 90^\circ$ *ou* $x = k \cdot 180^\circ - 30^\circ + (-1)^k \cdot 90^\circ$

II

5495 — Derivar a função $y = \frac{\cos\left(a + \sqrt{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(a - \sqrt{x}\right)}$ e simplificar o resultado.

R: $y' = [-sen\,(a + \sqrt{x})\,sen\,(a - \sqrt{x}) - cos\,(a - \sqrt{x})\,cos\,(a + \sqrt{x})] : sen^2\,(a - \sqrt{x}) = -\left[cos\,(a + \sqrt{x} - a + \sqrt{x})\right] : sen^2\,(a - \sqrt{x}) = (-cos\,2\sqrt{x}) : sen^2\,(a - \sqrt{x})$

GEOMETRIA

5496 — Determinar o ângulo da recta $y = 3\,x - 2$ com a recta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(0, -2)$.

R: *A equação da recta que passa pelos dois pontos é* $(y + 1) : (-1 + 2) = (x - 2) : (2 - 0)$ *ou seja* $y = \frac{1}{2}\,x - 2$. *A fórmula que dá a tangente do ângulo de duas rectas com os declives* m *e* m' *é* $tg\,\theta = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$.

No caso será $tg\,\theta = \left(3 - \frac{1}{2}\right) : \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 1$ *e portanto* $\theta = 45^\circ$.

Ponto n.º 2

ARITMÉTICA

5497 — Dividindo dois números naturais pelo seu máximo divisor comum obtêm-se quocientes cuja soma é 10. Determinar os dois números, sabendo que o seu menor múltiplo comum é 672.

R: *Se forem* p_1 *e* p_2 *os quocientes assinalados será* $p_1 + p_2 = 10$. *Fàcilmente se reconhece que os valores possíveis de* p_1 *e* p_2 *são:* $p_1 = 1$ *e* $p_2 = 9$ *ou* $p_1 = 3$ *e* $p_2 = 7$. *Por outro lado se* m *for o menor múltiplo comum dos dois números dados é, como se sabe,* $m = d\,p_1\,p_2$ *sendo* d *o máximo divisor comum. Então, no 1º caso, será* $672 = d \cdot 9$ *equação que não tem solução inteira. No 2º caso é* $672 = d \cdot 3 \cdot 7$ *e* $d = 32$. *Daqui resulta* $a = 32 \times 3 = 36$ *e* $b = 32 \times 7 = 224$, *que são os números procurados.*

ÁLGEBRA

I

5498 — Determinar m de modo que

$$x^2 - (m + 1)\,x - m + 7$$

seja positivo para todos os valores reais de x.

R: *Trata-se de resolver a desigualdade* $x^2 - (m + 1)\,x - m + 7 > 0$ *que deve ser verificada para todo o valor real de* x. *Basta então que o descriminante seja negativo, caso em que o trinómio toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2. *Teremos por isso* $(m + 1)^2 + 4\,(m - 7) < 0$. *Os zeros deste último trinómio são* 3 *e* -9. *As soluções da primeira desigualdade são, por isso, os valores que verificam* $-9 < m < 3$.

II

5499 — Derivar a função $y = \dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$ e simplificar o resultado.

R: $y' = \left[-1 \cdot \sqrt{1 + x^2} + (1 - x) \cdot 2\,x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1 + x^2)^{-1}}\right] : (1 + x^2) = -(1 + x) : \sqrt{(1 + x^2)^3}$

TRIGONOMETRIA

I

5500 — Resolver a equação

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3\,x = \operatorname{sen} 5\,x + \operatorname{sen} 7\,x\,.$$

R: *Como* $sen\,x + sen\,3\,x = 2\,sen\,\frac{x + 3\,x}{2}\,cos\,\frac{x - 3\,x}{2} = 2\,sen\,2\,x\,cos\,x$ *e* $sen\,5\,x + sen\,7\,x = 2\,sen\,\frac{5\,x + 7\,x}{2}\,cos\,\frac{5\,x - 7\,x}{2} = 2\,sen\,6\,x\,cos\,x$. *Teremos que a equação proposta é equivalente a* $sen\,2x\,cos\,x = sen\,6\,x\,cos\,x$ *ou seja* $cos\,x\,(sen\,2\,x - sen\,6\,x) = 0$ *ou ainda* $cos\,x \cdot 2 \cdot sen\,\frac{2\,x - 6\,x}{2}\,cos\,\frac{2\,x + 6\,x}{2} = 0$ *e finalmente* $cos\,x \cdot sen\,(-2\,x)\,cos\,4\,x = 0$. *As soluções desta última equação e portanto dá proposta são as soluções das equações* $cos\,x = 0$; $-sen\,2\,x = 0$ *e* $cos\,4\,x = 0$. *Da primeira as soluções são dadas pela fórmula* $x = \frac{\pi}{2} + n\,\pi$, *onde* n *é um inteiro qualquer. As da segunda são os valores de* x *tais que* $2\,x = n\,\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$. *As da terceira são os valores de* x *tais que* $4\,x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ *ou seja* $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4}$.

II

5501 — Derivar a função $y = \sec\left(1 + \sqrt{3\,x - 1}\right)$ e simplificar o resultado.

R: $y' = \dfrac{3 \cdot tg\left(1 + \sqrt{3\,x - 1}\right) sec\left(1 + \sqrt{3\,x - 1}\right)}{2\sqrt{3\,x - 1}}$.

GEOMETRIA

5502 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(0, -1)$ e pelo ponto de intersecção das rectas de equações $x + y = 2$ e $x - 2\,y = 1$.

R: *As coordenadas do ponto de encontro das duas rectas são as soluções do sistema* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2\,y = 1 \end{cases}$ *ou sejam* $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. *A equação da recta pedida é então* $\dfrac{y + 1}{-1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{x - 0}{0 - \frac{5}{3}}$ *ou ainda* $5\,y - 4\,x + 5 = 0$.

Soluções dos n.os 5491 a 5502 de J. S. P.