MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 18-1-1962.

5503 — Designando por Z a imagem do complexo z no plano xOy, considere os conjuntos:

$$C_1 = \{Z : |z-1| \leqslant 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{Z : |z+i| \leqslant 1\}$$

e determine o transformado de $C_1 \cap C_2$ por meio da relação $w = \dfrac{z-1}{z+i}$.

5504 — Considerando a equação vectorial $(2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

a) determine λ de modo que a equação seja solúvel e determine nesse caso as respectivas soluções;

b) se for $\mathbf{v} = P - 0$ com 0 fixo, diga qual o lugar geométrico dos pontos P tais que $(2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (P - 0) = \mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ onde λ tem o valor determinado em *a*).

5505 — Estude o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \\ \alpha x + y + z = 1 \\ y - z = \alpha \end{cases}$$

apresentando a respectiva solução (ou soluções) quando existam.

5506 — Considere no espaço R^3 a transformação que a cada vector $\mathbf{x} = \Sigma\, x_i\,\mathbf{e}_i$ faz corresponder $\mathbf{y} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{x}$.

a) Verifique que a transformação é linear e que em relação à base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Que relação existe entre A e A^T? Mostre que toda a matriz hemisimétrica de ordem ímpar é singular.

c) Determine os valores próprios e os vectores próprios reais da matriz A.

Enunciados dos números 5503 a 5506 de F. R. Dias Agudo

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 29 de Junho de 1962.

5507 — Dadas as rectas $2x + 1 = 3y = z$ e $x = y + 1 = 2z - 1$, verifique se são complanares (determinando ao mesmo tempo a distância entre elas) e determine a equação do plano que passa pela primeira e é paralelo à segunda.

5508 — Uma curva passa pela origem e o coeficiente angular da tangente à curva é dado, em cada ponto, pela expressão $\dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

Determine a equação da curva e faça o seu estudo.

5509 — *a*) Mostre que se u_n é um infinitésimo (com valores do mesmo sinal), as séries $\sum u_n$ e $\sum \log(1 + u_n)$ são da mesma natureza.

b) Estude a série $\sum\limits_{1}^{\infty} \log \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ por aplicação do critério de *a*).

c) Mostre que o termo geral da série anterior se pode pôr na forma $f(n) - f(n+1)$ e aproveite o facto para calcular a soma da série (se for convergente).

5510 — Seja X o vector $\{x_1\, x_2\}$ e $Y = \{y_1\, y_2\}$ um segundo vector função do primeiro (i. e., $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$) e designe por $\dfrac{dY}{dX}$ a matriz $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$.

Considerando agora que X é por sua vez função de $T = \{t_1\, t_2\}$ e definindo $\dfrac{dX}{dT}$ de modo análogo a $\dfrac{dY}{dX}$, mostre que $\dfrac{dY}{dT} = \dfrac{dY}{dX} \cdot \dfrac{dX}{dT}$, fórmula que generaliza a derivação de funções compostas de uma só variável independente.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 24 de Julho de 1962.

5511 — Seja $\mathbf{T}$ uma transformação linear de $R^3 \equiv [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ em $R^2 \equiv [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ definida por $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

a) Determine a matriz da transformação e os vectores de R^3 que se transformam no vector nulo de R^2.

b) Considerando R^3 e R^2 formados por segmentos orientados de origem 0, a transformação anterior representa uma projecção oblíqua de R^3 sobre R^2. Caracterize a direcção da projecção pelos seus cosenos directores.

c) Considerando $\mathbf{T}$ como transformação de R^3 em R^3, qual a matriz que a representa? Quais os vectores próprios da transformação?

5512 — Determine a primitiva de $\dfrac{\dfrac{2x-1}{1-x}}{1-\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$ que se anula para $x = 0$.

5513 — Determine o i. c. da série $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$. Verifique que a série coincide com a série de McLaurin de $\log(1+x)$ e a partir daí escreva os desenvolvimentos de $\log(1-x)$ e de $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ em série de potências de x. Aproveite o resultado para indicar qual a parte principal de $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ quando $x \to 0$.

5514 — Seja $AX = B$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e $\det A \neq 0$.

a) Que sabe acerca da natureza de um tal sistema?

b) Dando a A a forma $A = [A_1\, A_2 \cdots A_i \cdots A_n]$ mostre que o sistema se pode escrever

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_i x_i + \cdots + A_n x_n = B,$$

ou seja

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + (A_i x_i - B) \cdot 1 + \cdots + A_n x_n = 0.$$

c) Que pode concluir quanto à dependência linear das matrizes colunas $A_1, A_2, \cdots, A_i x_i - B, \cdots A_n$, onde x_i é o valor da incógnita de ordem i? Quanto vale o determinante de $[A_1\, A_2 \cdots A_i x_i - B \cdots A_n]$? Justifique.

d) Deduza da alínea anterior que

$$x_i = \frac{\det[A_1\, A_2 \cdots B \cdots A_n]}{\det[A_1\, A_2 \cdots A_i \cdots A_n]}.$$

Que regra obteve?

Enunciados dos n.os 5507 a 5514 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Prova Prática de Informação — 16-2-1962.

I

5515 — 1) Prove que

$$(A \cup B) \cap C \cup D) = $$
$$= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup A \cap D) \cup (B \cap D).$$

2) Dado o conjunto

$$X = \left\{(-1)^n \frac{2n}{n+1}\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

indique, justificando todas as respostas:

a) pontos interiores, pontos exteriores, pontos fronteiros e pontos de acumulação;

b) ínfimo e supremo;

O conjunto é fechado? Porquê?

R: 1) $(A \cup B) \cap (C \cup D) =$
$= \{x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \in (C \cup D)\}$.

Ora

$$x \in (A \cup B) \wedge x \in (C \cup D) = (x \in A \vee x \in B) \wedge$$
$$\wedge (x \in C \vee x \in D) = (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \vee$$
$$\vee (x \in A \wedge x \in D) \vee (x \in B \wedge x \in D) = (x \in A \cap C) \vee$$
$$\vee x \in B \cap C) \vee (x \in A \cap D) \vee (x \in B \cap D) = x \in (A \cap C) \cup$$
$$\cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$$

o que prova a igualdade proposta.

2 *a*) *Interior*: $\emptyset$.
Exterior: $R - X - \{2\} - \{-2\}$.
Fronteira: $X \cup \{2\} \cup \{-2\}$.
Pontos de acumulação: -2 e 2.

b) *inf* $X = -2$ *sup* $X = 2$.
O conjunto não e fechado porque $-2 \notin X$ *e* $2 \notin X$.

II

5516 – 1) Mostre que, sendo $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_1 a_2 = b^2$, se tem $(1 + a_1)(1 + a_2) \geqq (1 + b)^2$.

2) Verifique a identidade seguinte:

$$(1+i)^n = \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right)(1-i)^n .$$

R: 1) $(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 = 1 + a_1 + a_2 + b^2$ *e, como* $\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}$ *ou* $a_1 + a_2 \geqq 2b$, *vem* $(1 + a_1)(1 + a_2) \geqq 1 + 2b + b^2 = (1 + b)^2$.

$$2)\quad (1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)(1-i)^n = \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)(\sqrt{2})^n \times \left[\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right).$$

III

5517 – 1) Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \cdot \log n}$.

2) Em relação à série $\sum \frac{x^n}{\log(n+1)}$

a) determine o intervalo onde ela é absolutamente convergente e refira a sua natureza fora de tal intervalo;

b) estude a natureza da série nos extremos do intervalo de convergência;

c) refira-se à convergência uniforme, determinando o respectivo intervalo.

3) Mostre que, se for $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n = a$ (finito), então

$$\sum_{1}^{\infty} (a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = 3a - (a_1 + 2a_0).$$

R: 1) *Fazendo* $y_n = \frac{n+1}{n} \log n$, *vem* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$ *e o teorema de Cauchy permite concluir imediatamente que* $\sqrt[n]{y_n} \to 1$.

$$2\,a)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{\log(n+2)}}{\dfrac{|x|^n}{\log(n+1)}} = |x| \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = |x|.$$

A série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$ *e divergente para* $x > 1$ *e* $x < -1$.

b) *Para* $x = 1$ *tem-se a série* $\sum \frac{1}{\log(n+1)}$ *que é divergente, pois* $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ *e* $\sum \frac{1}{n+1}$ *é uma série divergente (série harmónica).*

Para $x = -1$ *tem-se a série alternada* $\sum (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ *que é convergente (simplesmente), pois* $\frac{1}{\log(n+1)} \to 0$ *decrescendo.*

c) *A série é uniformemente convergente em qualquer intervalo* $[-1, r]$ $(r < 1)$.

3) *Fazendo* $S_n = \sum\limits_{0}^{n-1} a_n$, *vem*

$$S'_n = \sum_{1}^{n} (a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) = S_n + (S_{n+1} - a_0) + (S_{n+2} - a_0 - a_1) = S_n + S_{n+1} + S_{n+2} - (a_1 + 2a_0)$$

e, como $S_n \to a$, $S_{n+1} \to a$, $S_{n+2} \to a$, $S'_n \to 3a - (a_1 + 2a_0)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 21-3-1962.

I

5518 – 1) Diga o que é uma relação de ordem parcial e uma relação de ordem.

Mostre que o conjunto de todas as sucessões reais pode ser parcialmente ordenado do seguinte modo: a sucessão $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ *precede* a sucessão $b_1, b_2, \cdots b_n \cdots$ se existe um m tal que $a_n < b_n$ para $n > m$.

2) Diga como se define a soma de números racionais e mostre que a soma de dois números racionais positivos recíprocos não pode ser inferior a 2.

R: 1) *Se* $a_n < b_n$ *para* $n > m$ *e* $b_n < c_n$ *para* $n > m'$, *então para* $n > \sup(m, m')$ *é* $a_n < c_n$, *o* *que mostra que a relação introduzida é uma relação de ordem parcial. Sendo* $\mathcal{R}$ *a relação, não se tem sempre* $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots \mathcal{R}\, b_1, b_2, \cdots b_n \cdots \vee b_1, b_2, \cdots b_n \cdots \cdots \mathcal{R}\, a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ *e portanto não se trata de uma relação de ordem.*

2) *Sendo* $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] > 0$ *e* $\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] > 0$, *se fosse* $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] + \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] < \left[\frac{2}{1}\right]$ *ter-se-ia* $\left[\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right] < \left[\frac{2}{1}\right]$ *ou* $\alpha^2 + \beta^2 < 2\alpha\beta$, *o que é absurdo.*

II

5519 — 1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão é que os limites máximo e mínimo sejam iguais e finitos.

Calcule $\displaystyle\lim_{n=\infty} \frac{\log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)}{\sqrt[3]{\frac{n+3}{n+1}}-1}$.

2) Se $\sum u_n$ é uma série absolutamente convergente e se a sucessão v_n é limitada, prove que a série $\sum u_n v_n$ é também absolutamente convergente.

Mostre que a série $\displaystyle\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ é simplesmente convergente e tem por soma 1.

R: 1) $$\lim_{n=\infty} \frac{\log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)}{\sqrt[3]{\frac{n+3}{n+1}}-1} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{n=\infty} \frac{\xi\frac{n}{n^2+1}}{\zeta\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{3n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{3}{2}, \text{ pois } \lim \xi = \lim \zeta = 1 .$$

2) *A série é convergente pois é alternada decrescente e* $a_n \to 0$. *A convergência é simples pois* $\sum \frac{2n+1}{n(n+1)}$ *é divergente:* $\displaystyle\lim_{n=\infty} n^{\alpha} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)} = 2\ (\alpha = 1)$.

Como $u_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$, *vem*

$$S_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1} \quad \textit{e portanto}$$

$S = \displaystyle\lim_{n=\infty} S_{2n} = 1$.

III

5520 — Se $f(x)$ satisfaz a desigualdade $|f(z_1) - f(z_2)| \leq C\,|z_1 - z_2|$ (C constante) para todo o par de pontos z_1, z_2 de um conjunto Z, prove que $f(x)$ é uniformemente contínua em Z.

Interprete geomètricamente aquela desigualdade e demonstre utilizando um exemplo, que a proposição recíproca não é verdadeira (sugestão: tome como exemplo a função $y = \sqrt{x}$ em $[0, 1]$).

2) Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) . \end{cases}$

Calcule $g'(x)$ e estude a continuidade de $g(x)$ e $g'(x)$ em $]-\infty, +\infty[$.

3) Calcule $P \dfrac{\log x}{(x-1)^2}$.

R: 1) $$|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| = \frac{1}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}}\,|z_1 - z_2|$$

e, como não se pode ter $\dfrac{1}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}} \leq C$ *para* $z_1, z_2 \in V_{\varepsilon}(0)$, *não se verifica a desigualdade apresentada, embora* $y = \sqrt{x}$ *seja uniformemente contínua em* $[0, 1]$.

2) $g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$g(x)$ *é uma função contínua em todos os pontos próprios e descontínua no infinito;* $g'(x)$ *é uma função contínua para* $x \neq 0$, *descontínua em* $x = 0$ *e contínua no infinito.*

3) $$P \frac{\log x}{(x-1)^2} = P\,(x-1)^{-2} \log x = -(x-1)^{-1} \log x + $$
$$+ P \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{\log x}{x-1} + P\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\frac{\log x}{x-1} + \log|x-1| - \log|x| .$$

Enunciados e soluções dos n.os 5515 a 5520 de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 30 de Abril de 1962.

I

5521 — Defina a multiplicação de números inteiros e prove que $[m+1, m]$ é o elemento unidade para a multiplicação.

Prove a propriedade distributiva da multiplicação para os números inteiros.

2) Defina as médias aritmética e geométrica e utilize a desigualdade existente entre elas para provar que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

R: 2) $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} =$
$= \frac{n+1}{2}$, *isto é,* $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ *ou* $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

II

5522 — 1) Demonstre que a fórmula $\log(1+x) = x - \lambda x^2 \left(\lim_{x=0} \lambda = \frac{1}{2}\right)$ se pode obter da fórmula de MAC-LAURIN para a função $\log(1+x)$.

Calcule $\lim_{n=\infty} \frac{\log n!}{1^k + 2^k + \cdots + n^k} (k > 0)$.

2) Deduza o critério da razão e explique por que motivo ele não serve para esclarecer a natureza da série $S)$ $1 + a + b^2 + a^3 + b^4 + \cdots + a^{2n-1} + b^{2n} + \cdots$ $(0 < a < b < 1)$. Estude a natureza de $S)$.

R: 1) *Pela fórmula de* MAC-LAURIN *é* $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}$ *e, como* $\lim_{x=0} \frac{1}{2(1+\theta x)^2} = \frac{1}{2}$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

Fazendo $x_n = \log n!$ *e* $y_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, *como* $\lim_{n=\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)! - \log n!}{(n+1)^k} = \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^k} = \frac{1}{k} \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)^k}{(n+1)^k} = 0$, *vem imediatamente (teorema de* CAUCHY*)*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n!}{1^k + 2^k + \cdots + n^k} = 0.$$

2) *Como* $\rho_{2n} = \frac{b^{2n}}{a^{2n-1}} \to +\infty$ *e* $\rho_{2n+1} = \frac{a^{2n+1}}{b^{2n}} \to 0$, *tem-se uma infinidade de vezes* $\rho_n > 1$ *mas isso não é garantia de divergência.*

$1 + a + b^2 + a^3 + b^4 + \cdots < 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots$ *e a série* Σb^n *é convergente o que implica a convergência da série dada.*

III

5523 — 1) Considere o polinómio $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ e calcule $\lim_{x=+\infty} P(x)$ e $\lim_{x=-\infty} P(x)$ (considere separadamente os casos n par e n ímpar).

Prove que, com n ímpar, o polinómio $P(x)$ tem pelo menos uma raiz real.

2) Calcule $P\frac{x+1}{x^4(x^2+1)}$.

3) Sendo $f''(x) \geq 0$ em $[a, b]$, prove que o gráfico de $f(x)$ em $[x_1, x_2]$ $(a \leq x_1 < x_2 \leq b)$ está abaixo da corda que une os pontos $M_1[x_1, f(x_1)]$ e $M_2[x_2, f(x_2)]$.

R: 2) $\frac{x+1}{x^4(x^2+1)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{x^4} + \frac{S_0}{x^2+1}$.

Cálculo de a_0, a_1, a_2 *e* a_3:

$R_0(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ *e, fazendo a divisão do numerador pelo denominador até o cociente atingir o grau 3, obtem-se* $1 + x - x^2 - x^3$ *que é o polinómio procurado.*

Cálculo de S_0:

$R_\Delta(x) = \frac{x+1}{x^4} = \frac{x+1}{1 - 2\Delta + \Delta^2}$ *e vem imediatamente* $S_0 = x + 1$.

$$P\frac{x+1}{x^4(x^2+1)} = P\frac{1}{x^4} + P\frac{1}{x^3} - P\frac{1}{x^2} - P\frac{1}{x} + P\frac{x}{x^2+1} + P\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Enunciados e soluções dos n.os 5521 a 5523 de Fernando de Jesus

F. C. P. — MATEMÁTICAS GERAIS — Engenharia — 1.º Exame de Frequência — Fevereiro de 1962.

Ponto N.º 2

5524 — 1 — *a*) Resolver a equação $\overline{z^4} + 1 = 0$ em que $z \in C$. (Tal como no curso, sendo $z \in C$, o símbolo $\bar{z}$ designa aqui o conjugado de z).

b) Mostrar que os afixos das raízes encontradas são vértices de um quadrado centrado na origem.

c) Decompor o polinómio $X^4 + 1 \in C[X]$ em factores *primos* (sobre C); indicar ainda a decomposição desse polinómio em factores primos (sobre R). Justificar a resposta.

2 — *a*) Decompor em fracções simples de $C(X)$ a fracção racional

$$\frac{2iX^3 + (1-3i)X^2 + (8-3i)X + 2i - 2}{(X-2)^2(X+1)^2}$$

b) Calcular a soma dos inversos dos zeros do polinómio

$$2iX^3 + (1-3i)X^2 + (8-3i)X + 2i - 2.$$

3 — *a*) Achar equações paramétricas da recta r que passa pelo ponto

$$A\,(1\,,2\,,-1)$$

e tem a direcção do vector $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Achar equações cartesianas dessa mesma recta r.

c) Achar a equação cartesiana do plano α, que passa pela recta r, e é paralelo à recta s, de equações cartesianas.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

d) Escrever equações cartesianas de uma recta genérica do plano α que seja paralela ao plano

$$y + z = 1\,.$$

4 — Seja A um operador linear sobre um espaço vectorial E; designe $C\,(A)$ o *contra domínio* de A (isto é, a totalidade das imagens, $A\,x$, dos vectores $x \in E$).

a) Mostrar que $C\,(A)$ é um *sub-espaço* de E.

b) Supondo $\dim E = n$, e $(e_1\,,e_2\,,\cdots,e_n)$ uma *base* de E, mostrar que $C\,(A)$ é a *variedade linear* gerada pelos n vectores $A\,e_1\,,A\,e_2\,,\cdots A\,e_n$, e indicar como, mediante adequado confronto destes n vectores, é possível calcular a *dimensão de* $C\,(A)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Engenharia — 2.ª chamada — 1.º Exame de Frequência.

Ponto N.º 4

5525 — 1 — *a*) Seja λ um parâmetro real arbitrário; mostrar que o afixo do complexo $z = \lambda - 1 + 2\lambda\,i$ descreve uma recta (que será determinada), quando λ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

b) Determinar o valor mínimo de $|z|$, aproveitando o resultado obtido em *a*).

c) Será o conjunto dos valores de z, considerados em *a*), um *espaço vectorial* (sobre C), a respeito da *adição* e *multiplicação* por um complexo, habituais? Justificar a resposta.

2 — Indicar, justificando a resposta, quais dos seguintes conjuntos de polinómios constituem um *ideal* de $C\,[X]$:

a) o conjunto $R\,[X]$ dos polinómios de $C\,[X]$, cujos coeficientes são reais;

b) o conjunto D dos polinómios de $C\,[X]$ que não têm valoração inferior a 2;

c) o conjunto dos polinómios constantes de $C\,[X]$.

Num dos casos afirmativos, indicar ainda um gerador do respectivo ideal.

3 — Num referencial orto-normal, sejam $\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 4z - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ as equações de duas rectas r e s, respectivamente.

a) Determinar a equação do plano α, que passa por r e é paralelo a s;

b) Achar o ângulo que forma com o plano α uma recta que tem a direcção do vector $\vec{u} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$.

c) Achar os planos, paralelos às rectas r e s, que distam da origem 4 unidades.

4 — Seja A um operador linear sobre um espaço vectorial E, n — dimensional sobre um corpo K de números.

a) Mostrar que, sendo $u_1\,,u_2\cdots,u_n$ uma *base* de E, e $A\,u_1\,,A\,u_2\cdots,A\,u_n$, vectores *linearmente dependentes* (em E), o operador A não tem inverso, — e que, se os vectores $A\,u_1\,A\,u_2\cdots A\,u_n$, são *linearmente independentes*, o operador A é invertível.

b) Sejam, em particular, $E = R^3$ e $K = R$. Seja A o operador linear sobre R^3 tal que

$$\begin{aligned} A\,(1\,,0\,,1) &= (1\,,0\,,0) \\ A\,(0\,,1\,,1) &= (0\,,1\,,0)\,. \\ A\,(0\,,1\,,0) &= (0\,,0\,,1) \end{aligned}$$

Estudar a invertibilidade do operador A assim caracterizado, tendo em conta a alínea *a*).

c) Achar os transformados, por A, dos vectores $(1\,,0\,,0)$, $(0\,,1\,,0)$, $(0\,,0\,,1)$, de R^3.

NOTA — Na elaboração dos precedentes enunciados teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto: em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira (1350, no corrente ano lectivo) *as duas aulas práticas por semana prescritas por lei, sendo uma apenas dada em cada turma. (E, mesmo assim, cada turma comporta por vezes 60 alunos).*

Enunciados dos n.ºs 5524 a 5525 de A. Andrade Guimarães

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 1962.

1.ª chamada

5526 — 1 *a*) Defina conjunto aberto e conjunto fechado. Sendo Y sub-conjunto fechado do conjunto aberto X, prove que $X - Y$ é aberto.

1 *b*) Calcule

$$\lim (n+2)^2 \left[\frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1) \right].$$

2 *a*) Demonstre que o raio de convergência de $\sum a_n x^n$ é dado por

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2 *b*) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{(a + b \cos n\pi)^{2n}}{n^2+1} (2x+1)^n$$

2 *c*) Prove que a convergência é uniforme nesse intervalo.

3 *a*) Calcule $\omega(2)$, $f'_e(2)$ e $f'_d(2)$ para

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{se } x < 2 \\ +\sqrt{5-x^2} & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

3 *b*) Se $f(x)$ é contínua em a e $g(y)$ em $b = f(a)$, prove que a composição $g[f(x)]$ é contínua com a.

4 *a*) Calcule $P\ (\operatorname{cosec} x \cdot \sec x)^2$.

4 *b*) Calcule $P \dfrac{1+x}{x^5 + 4x^3}$.

2.ª chamada

5527 — 1 *a*) Sejam $X_1, X_2, \cdots$ conjuntos limitados de números reais tais que $X_n \supset X_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Relacione, justificando, os limites de $W \cdot l_n$, L_n, l_{n+1}, L_{n+1} de X_n e X_{n+1}. As sucessões l_n e L_n convergem? Porquê?

1 *b*) Discuta a existência de limite para a sucessão de termo geral

$$\mu_n = \frac{\alpha^n \beta^n}{\alpha^n + \beta^n} \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

2 *a*) Enuncie e prove o critério de Raabe.

2 *b*) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{1}{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n.$$

2 *c*) Deduza daí a convergência uniforme da série

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\cos nx}{n}$$

em $(-\infty, +\infty)$.

3 *a*) Usando a definição de derivada, calcule $f'(3)$ para

$$f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{1+x}}.$$

Confirme o resultado usando as regras de derivação.

3 *b*) Seja $f(x)$ um polinómio de grau par e termo independente negativo. Que pode dizer das suas raízes? Justifique.

4 *a*) Calcule $P \dfrac{\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4 *b*) Calcule $P \dfrac{4x+1}{4x^4 + 4x^2 + 1}$.

Enunciados dos n.os 5526 a 5527 entregues por J. J. Dionísio

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — (Biológicas, Geológicas e Prof. Adj.) — 13-7-62.

5528 — Se A e B representarem dois acontecimentos, diga o que entende por $A \cup B$ e $A \cap B$. Como estão relacionadas as probabilidades $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A)$ e $P(B)$? Quando diz que dois acontecimentos são incompatíveis?

Aplicação: Seja A o acontecimento «saída de um ás» e B o acontecimento «saída de uma carta de espadas» numa tiragem casual de um baralho de 52 cartas.

O que vêm a ser neste caso $A \cup B$ e $A \cap B$?
Calcule $P(A \cup B)$.

R: $P(A \cup B) = \dfrac{4}{13}$.

5529 — Faça o estudo da curva de equação

$$y = \frac{1}{2{,}4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-13{,}4}{2{,}4}\right)^2}$$

e diga qual a importância das curvas deste tipo em Estatística.

Aplicação: Num exame em que se apresentaram 500 alunos a classificação média obtida foi 13,4 e o desvio padrão 2,4.

Admitindo que as classificações se distribuem normalmente, determine

a) a percentagem de alunos com 12 valores (considerando incluidas nesta categoria as notas do intervalo $11{,}5 \leqslant x < 12{,}5$);

b) o percentil de ordem 10 (ou 1.º decil), i. e., a nota máxima dos 50 alunos menos classificados;

c) a nota mínima dos 50 alunos mais classificados.

R: 14 %; 10,3; 16,5.

5530 — Distribuição de frequências; histogramas; classificação dos dados.

Aplicação: De uma população escolar escolheram-se ao acaso 40 alunos e mediram-se as respectivas alturas em cm, obtendo-se os seguintes resultados:

138	164	150	132	144	125	149	157	146	158
140	147	136	148	152	144	168	126	138	176
163	119	154	165	146	173	142	147	135	153
140	135	161	145	135	142	150	156	145	128

a) Organize um quadro de frequência com os dados distribuidos pelas 12 classes 118-122, 123-127, ...

b) Desenhe o histograma correspondente e determine gràficamente os quartis.

c) Calcule a média da amostra.

d) Como obter estimas centradas do valor médio e da variância da população?

5531 — Ensaios de hipóteses sobre o tipo de distribuição.

Aplicação: Considere a totalidade de famílias com 5 filhos e designe por X o n.º de rapazes de cada família. Aceitando que são igualmente prováveis os nascimentos de rapazes e de raparigas, prova-se que

$$P(X=0)=P(X=5)=\frac{1}{32}\,;\quad P(X=1)=$$
$$=P(X=4)=\frac{5}{32}\,;\quad P(X=2)=P(X=3)=\frac{10}{32}\,.$$

a) Qual a expressão que permite calcular estes valores?

b) Estudando o que se passa numa amostra de 320 famílias com 5 filhos, obtiveram-se os seguintes dados:

n.º de rapazes	0	1	2	3	4	5
n.º de famílias	8	40	88	110	56	18

Organize com estes valores um quadro para o cálculo de Q^2 e conclua daí qual a confiança que lhe merece a hipótese de serem igualmente prováveis os nascimentos de rapazes e raparigas.

R: $Q^2=12{,}0>\chi^2_{0.95}=11{,}1$ *(para 5 graus de liberdade) e a hipótese não é aceitável ao nível de significância de 5 %.*

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — (Biológicas, Geológicas e Prof. Adj.) — 16-7-62.

5532 — Sejam A e B dois acontecimentos a que correspondem as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$. O que entende por *probabilidade condicional de* B *realizado* A e em que condições se pode definir? Quando diz que A e B são independentes?

Aplicação: De um baralho de 40 cartas tiram-se sucessivamente duas ao acaso. Qual a probabilidade de obter 2 ases

a) se houver reposição da 1.ª carta antes de tirar a 2.ª?

b) se as tiragens se fizerem sem reposição?

Indique como a probabilidade pedida em *b*) se pode calcular também pela relação entre o n.º de resultados que conduzem ao acontecimento e o n.º total de resultados possíveis.

R: *a*) $\frac{1}{100}$ *b*) $\frac{1}{130}$.

5533 — Dada uma curva de equação $y=f(x)$, como calcula a área compreendida entre a curva, o eixo das abcissas e as rectas $x=a$ e $x=b$?

E se $f(x)$ for a densidade de probabilidade de uma variável casual X, que significado pode dar à referida área? Quais as condições a que se deve sujeitar $f(x)$ para que possa ser uma densidade de probabilidade?

Aplicação: Represente gràficamente a função

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } x<0\\ 1/2-cx \text{ se } 0\leqslant x\leqslant 4\\ 0 \text{ se } x>4\end{cases},$$

determine c de modo que $f(x)$ possa ser a densidade de probabilidade de uma variável casual X e calcule nesse caso $P(1<X<2)$ e $P(X>3)$.

R: $c=\frac{1}{8}\,;\ P(1<X<2)=\frac{5}{16}\,;\ P(X>3)=\frac{1}{16}$.

5534 — Distribuição binomial. Sua aproximação pela distribuição normal.

Aplicação: Uma variável X que segue a lei binomial tem $M(X)=6$ e $\sigma(X)=2$.

Calcule n, p, q, dê a expressão que permite calcular $P(X=1)$ e calcule um valor aproximado desta probabilidade recorrendo à distribuição normal.

R: $n=18,\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3},\ P(X=1)\simeq 0{,}009$.

Estima do valor médio e da variância. Estimas pontuais e por intervalos.

Aplicação: Uma amostra de 50 classificações de de uma população escolar conduziu a $\overline{x}=7{,}5$ e $s^2=4$. Aceitando que a distribuição é normal com valor médio μ e desvio padrão σ, determine uma estima centrada de σ e calcule

$$P(7{,}5-0{,}1<\mu<7{,}5+0{,}1)\,.$$

R: $\frac{2\sqrt{50}}{7}$ e 0,28,

Enunciados dos n.ºs 5528 a 5534 de F. R. Dias Agudo

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Algumas questões saídas nos primeiros exames de frequência da 6.ª cadeira no ano lectivo de 1961-1962.

5535 — *a*) Defina diferencial da função $f(x, y, z)$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

b) Determine a diferencial da função $f(x, y, z) = x \cos(y z)$ com

$$x = u \operatorname{sen} v \qquad y = u \cos v \qquad z = u$$

e verifique para este caso o princípio da invariância da diferencial.

5536 — *a*) Mostre que nas vizinhanças do ponto $(1, -1, 2)$ as equações

$$x^2 (y^2 + z^2) = 5 \qquad (x - z)^2 + y^2 = 2$$

definem y e z como funções de x continuamente deriváveis.

b) Determine os valores das derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ das funções a que se refere a alínea anterior, no ponto considerado.

5537 — *a*) Mostre que as funções u, v, w definidas por

$$u = x + y \qquad v = x + z \qquad w = y^2 + z^2 - 2 y z$$

são funcionalmente dependentes.

b) Determine o domínio e o contradomínio da transformação $(x, y, z) \to (u, v, w)$ definida pelas funções anteriores.

5538 — Mostre que as funções $z(x, y)$ definidas implicitamente pela expressão

$$f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2 x y) = 0$$

onde f designa uma função arbitrária dos seus argumentos, derivável, verificam a equação

$$x^2 - y^2 + (x z + y z) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 .$$

5539 — *a*) Defina plano tangente e normal a uma superfície num ponto regular.

b) Determine as equações cartesianas e equações vectoriais do plano tangente e da normal à superfície

$$x^2 + y^2 = 2 z$$

no ponto em que $x = -1, y = 1$.

5540 — Considere os campos vectoriais de R^3 definidos pelos vectores $\mathbf{u}(X)$ e $\mathbf{v}(X)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, e suponha que existe $\operatorname{div} \mathbf{u}$, $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ num dado aberto de R^3.

a) Mostre que

1) $$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{k} .$$

2) $$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} .$$

b) Utilize os resultados da alínea anterior e as propriedades do produto misto de três vectores para mostrar que

$$\operatorname{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} .$$

5541 — *a*) Utilizando a teoria dos extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange) determine o ponto da reta

$$x + z - 6 = 0 \qquad x - 2 y - 3 z = 0$$

que está à menor distância da origem.

b) Verifique o resultado obtido na alínea anterior resolvendo o problema por outro processo.

5542 — Utilizando a teoria dos extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange) determine o ponto da parábola $y = 4 x^2$ que está à menor distância da recta $x - y = 1$.

5543 — *a*) Determine a área da região limitada pelas linhas $x^2 = 3 - y$ e $x = 2 y$.

b) Determine o perímetro do contorno que limita a área a que se refere a alínea anterior.

5544 — *a*) Método de integração por partes.

b) Utilize o método a que se refere a alínea anterior para mostrar que se for

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n \, dx , \; n \text{ inteiro não negativo,}$$

então

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n.$$

5545 — Considere a expressão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ (c=\text{const.})$$

e mude as variáveis independentes x, y, z, t para as variáveis ξ, η, ζ, τ relacionadas com as primeiras por

$$x=\frac{\xi+v\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y=\eta,\ z=\zeta,\ t=\frac{\tau+\frac{v}{c^2}\xi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

sendo v uma constante.

Enunciados dos n.os 5535 a 5545 de A. César de Freitas

MOVIMENTO MATEMÁTICO

FORUM ATÓMICO PORTUGUÊS (em organização)

A Comissão Organizadora do *Forum Atómico Português*, constituída — por iniciativa da Secção Nuclear da Associação Industrial Portuguesa — pelos Srs.: Eng. Álvaro Machado de Assunção, Dr. Carlos Cacho, Prof. Herculano de Carvalho, Dr. Manuel Corte-Real, Eng. Quadros e Costa, Dr. Armando Gibert, Eng. Ivo Gonçalves, Eng. Teixeira Lopo e Eng. Manuel Rocha, pede-nos a publicação da seguinte nota:

«Na convicção de que o prestígio e a eficiência do futuro *Forum Atómico Português* estão intimamente ligados ao número e projecção das empresas que se inscreveram como seus sócios colectivos e, designadamente, de apoio, bem como ao interesse e entusiasmo dos seus sócios efectivos individuais, os membros da Comissão Organizadora, lançam um convite a todos — empresas e técnicos individuais — para que dêem desde já a sua adesão a esta iniciativa».

O *Forum Atómico Português* destina-se a preencher uma lacuna no nosso País, pois já há alguns anos que existem e florescem organizações semelhantes na maioria dos países da Europa. Designadamente as associações dos seguintes países: Alemanha, Bélgica, Holanda, Itália, Luxemburgo, Suiça, resolveram unir-se numa associação europeia, o *Foratom*, à qual se juntaram recentemente a Áustria e a Espanha. Portugal será membro efectivo do *Foratom* logo que se tenha constituído o *Forum Atómico Português*. Até lá está representado naquela agremiação, a título provisório, pela Secção Nuclear da Associação Industrial Portuguesa.

Para orientação dos interessados publicamos a seguir extractos de alguns dos mais significativos artigos dos Estatutos da futura associação, a saber:

Art. 3.º — O objectivo desta associação, entre outros autorizados pela lei, é o de contribuir para a promoção e coordenação de todos os esforços ao seu alcance que favoreçam o progresso e o desenvolvimento das aplicações pacíficas da energia nuclear em todos os campos.

§ único — Para isso deverá, em particular:

1.º) organizar reuniões e realizar trabalhos de interesse geral, designadamente através dos Grupos de Trabalho previstos no Art.º 23.º;

2.º) manter os sócios informados dos principais progressos técnicos da energia nuclear e das suas aplicações pacíficas e das perspectivas do mercado que esses progressos representam:

3.º) divulgar entre o público em geral a importância para o bem-estar social das aplicações pacíficas da energia nuclear, quer pela sua utilização directa, quer pelos mercados que criam, bem como procurar esclarecer os problemas relativos a riscos atómicos;

4.º) promover o conhecimento das actividades nacionais nos diversos sectores das aplicações pacíficas da energia nuclear e dos esforços feitos para o seu desenvolvimento, através de conferências, congressos, exposições, etc.;

5.º) colaborar com outros organismos nacionais ou internacionais prosseguindo objectivos análogos ou concorrentes para os mesmos fins gerais.

Art. 4.º — Podem ser sócios do *Forum Atómico Português* todas as pessoas físicas ou morais de nacionalidade portuguesa ou não, que manifestem esse desejo e sejam recomendadas, para esse fim, por dois sócios de apoio ou efectivos, de nacionalidade portuguesa.

Art. 7.º — As quotas serão pagas anualmente, em Janeiro de cada ano, de acordo com a seguinte tabela: