ANO XXII—N.º 84-85 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ. — 1961

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Existência de produto escalar em espaços vectoriais normados (*)

por **Luiz Adauto da Justa Medeiros**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

Introdução. Esta redacção, contém o resumo de uma exposição feita por nós no IMPA, como trabalho complementar ao curso de Teoria Espectral das Transformações Lineares em Espaços de HILBERT, ministrado pelo Prof. LEOPOLDO NACHBIN em 1960.

No que segue, procuraremos descrever, sob forma didáctica, as ideias contidas no trabalho de VON NEUMANN-P. JORDAN, «On Inner Products in Linear Metric Spaces», Ann. Math. 3 (1935), 719-723. O objectivo dos autores do trabalho citado, é provar que dado um espaço vectorial normado complexo ou real, E, é possível, mediante uma condição natural, definir um produto escalar em E, de tal modo que a norma primitiva de E, seja induzida, no sentido que veremos a seguir, por um tal produto escalar.

Admitiremos conhecidos os princípios do estudo dos espaços vectoriais e por questão de nomenclatura e notação, poremos algumas definições que faremos uso frequente no que segue.

Os espaços vectoriais que vamos considerar, serão sobre os corpos C ou R dos números complexos ou reais respectivamente. Observemos, ainda, que dado um complexo z, vamos representar, como é habitual, o seu conjugado por $\bar{z}$.

1. Definição. Seja E um espaco vectorial. Diremos que E é um espaço vectorial normado, quando existir uma aplicação $\| \ \|$ de E em R, satisfazendo as seguintes condições:

N 1) $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e sòmente se $x = 0$.

N 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo escalar λ e todo vector x.

N 3) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ para todo par de vectores x e y.

A aplicação $\| \ \|$ denomina-se norma e o número real $\|x\|$ norma de x.

2. Definição. Seja E um espaço vectorial sobre C e φ uma aplicação de $E \times E$, produto cartesiano de E por E, em C. Diz-se que φ é uma forma sesquilinear her-

(*) Exposição em seminário de Análise Funcional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

mitiana se as seguintes condições forem satisfeitas:

S 1) φ é uma forma linear relativamente a primeira coordenada, isto é

$$\varphi(x'+x'',y)=\varphi(x',y)+\varphi(x'',y)$$
$$\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y),\ \lambda\in C.$$

S 2) φ é dotada da simetria hermitiana, isto é,

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$$

onde $\overline{\varphi(y,x)}$ é o complexo conjugado de $\varphi(y,x)$.

Resulta desta definição, que se $\varphi:E\times E\to C$, for uma forma sesquilinear hermitiana, então φ satisfaz as condições segutntes:

$$\varphi(x,y'+y'')=\varphi(x,y')+\varphi(x,y'');$$
$$\varphi(x,\lambda y)=\bar{\lambda}\varphi(x,y),\ \lambda\in C.$$

3. Definição. Uma forma sesquilinear hermitiana φ, diz-se estritamente positiva, se $\varphi(x,x)$ for um número real estritamente positivo, para $x\neq 0$.

4. Definição. Diz-se que um espaço vectorial E, sobre C, é dotado de produto escalar, quando estiver definida em $E\times E$ uma forma φ sesquilinear hermitiana, estritamente positiva. Tal forma linear φ denomina-se um produto escalar em E e o seu valor $\varphi(x,y)$ representa-se por $(x\,|\,y)$.

Se um espaço vectorial E for dotado de um produto escalar, a aplicação $x\to+(x\,|\,x)^{1/2}$ de E em R, é uma norma em E, como é fácil verificar, denominada norma induzida em E pelo produto escalar e escreve-se

$$\|x\|^2=(x\,|\,x).$$

Seja E um espaço vectorial dotado de produto escalar. Tem-se, por um cálculo simples, para $x,y\in E$

$$(x+y\,|\,x+y)+(x-y\,|\,x-y)=2((x\,|\,x)+(y\,|\,y))$$

da qual obtem-se, usando a norma induzida,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2\quad(\mathrm{NJ}).$$

Daí resulta que quando o espaço vectorial E for dotado de produto escalar, segue-se que a igualdade (NJ) é verdadeira para cada par de vectores de E. Tal igualdade, nada mais é, geomètricamente, do que o conhecido facto, de em um paralelogramo a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais ser igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos seus quatro lados.

O nosso problema, é provar a recíproca da afirmativa anterior, isto é, se E for um espaço vectorial complexo normado a igualdade (NJ) é uma condição suficiente para que E seja dotado de um produto escalar, de tal modo que a norma primitiva de E seja induzida por este produto escalar. Em outras palavras, devemos provar, que se a norma de E satisfaz a condição (NJ) é possível definir uma aplicação $\varphi:E\times E\to C$, que seja uma forma sesquilinear hermitiana estritamente positiva e se $x\in E$ então $\|x\|=+\varphi(x,x)^{1/2}$.

A seguir, provaremos a existência de uma φ nas condições anteriores. Antes, porém, daremos a motivação para que a definição da φ seja bastante natural.

5. Motivação. Suponhamos o problema resolvido. Tem-se $\varphi:E\times E\to C$, sesquilinear hermitiana estritamente positiva e $\|x\|^2=\varphi(x,x)$, para todo $x\in E$. Sendo $\varphi(x,y)$ um número complexo, podemos escrevê-lo sob a forma

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)+i\,I\varphi(x,y)$$

sendo $R\varphi(x,y)$ e $I\varphi(x,y)$ as partes real e imaginária de $\varphi(x,y)$, respectivamente. Por outro lado, tem-se por um cálculo simples

$$\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)=$$
$$=2[\varphi(x,y)+\varphi(y,x)]$$

que pode ser escrita também como segue:

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=$$
$$=2[\varphi(x,y)+\overline{\varphi(x,y)}]=4R\varphi(x,y)$$

ou seja

$$R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2]$$

sendo

$$I\varphi(x,y)=-Ri\varphi(x,y)=-R\varphi(ix,y)$$

podemos escrever

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2].$$

De posse deste resultado, vamos no parágrafo seguinte demonstrar a existência do produto escalar.

6. Existência de produto escalar. Seja E um espaço vectorial normado, complexo, cuja norma satisfaz a condição (NJ). Vamos provar que a aplicação $\varphi: E\times E\to C$, definida por

$$(1)\quad \varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$(2)\quad R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

é um produto escalar em E e que a norma de E é por ele induzida. Tal facto, ficará demonstrado, após os seguintes lemas.

LEMA 1. *Se* $\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *for definida por* (2) *tem-se*

$$\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'+\mathrm{x}'',\mathrm{y})+\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'-\mathrm{x}'',\mathrm{y})=2\,\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}',\mathrm{y}).$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, sendo a igualdade (NJ) válida em E, se nela substituirmos x e y por $x'+y$ e x'' respectivamente, obtem-se

$$(3)\quad \|x'+x''+y\|^2+\|x'-x''+y\|^2=$$
$$=2(\|x'+y\|^2+\|x''\|^2).$$

Anàlogamente, substituindo em (NJ) x e y por $x'-y$ e x'' respectivamente resulta

$$(4)\quad \|x'+x''-y\|^2+\|x'-x''-y\|^2=$$
$$=2(\|x'-y\|^2+\|x''\|^2).$$

Subtraindo (4) da (3) obtem-se:

$$(\|x'+x''+y\|^2-\|x'+x''-y\|^2)+$$
$$+(\|x'-x''+y\|^2-\|x'-x''-y\|^2)=$$
$$=2(\|x'+y\|^2-\|x'-y\|^2)$$

que pela (2), pode ser escrita do seguinte modo:

$$(5)\quad R\varphi(x'+x'',y)+R\varphi(x'-x'',y)=$$
$$=2R\varphi(x',y)$$

o que prova o Lema 1.

Sendo $R\varphi(0,y)=0$, pois $\|-y\|=\|y\|$, fazeddo em (5) $x'=x''$, obtem-se $R\varphi(2x',y)=$ $=2R\varphi(x',y)$. Daí resulta que podemos escrever a (5) do seguinte modo:

$$(6)\quad R\varphi(x'+x'',y)+R\varphi(x'-x'',y)=$$
$$=R\varphi(2x',y).$$

LEMA 2. *Se* $\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *for definida por* (2), *então*

$$\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'+\mathrm{x}'',\mathrm{y})=\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}',\mathrm{y})+\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'',\mathrm{y}).$$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente em (6) substituir x' por $(x'+x'')/2$ e x'' por $(x'-x'')/2$.

Dos lemas 1 e 2 resulta que

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo $R\varphi$ definida por (2) uma forma aditiva relativamente a primeira coordenada x.

LEMA 3. *A forma* φ *definida por* (1) *e* (2) *é homogénea relativamente a* x.

DEMONSTRAÇÃO. De facto, pondo

$$S=\{\lambda\in C;\ \varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)\},$$

vamos provar que $S = C$. Como S é uma parte de C é suficiente provarmos que $C \subset S$. Tem-se 0 e 1 pertencem a S. Sendo $\varphi(0, y) = 0$, pois $R\varphi(0, y) = 0$ segue-se que $\varphi(x - x, y) = 0$ ou $\varphi(x, y) + \varphi(-x, y) = 0$, isto é, $\varphi(-x, y) = -\varphi(x, y)$, provando que $-1 \in S$. Sendo φ aditiva em relação a x, se $\lambda, \mu \in S$, resulta que $\lambda \pm \mu \in S$ e daí resulta que o conjunto $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ dos inteiros é uma parte de S. Sejam $\lambda, \mu \in Z, \mu \neq 0$. Tem-se $\varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \lambda \varphi\left(\frac{x}{\mu}, y\right)$ e multiplicando ambos os membros desta última igualdade pelo inteiro $\mu \neq 0$, obtem-se

$$\mu \varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \mu \lambda \varphi\left(\frac{x}{\mu}, y\right) = \lambda \varphi(x, y)$$

pois $\mu \in Z \subset S$. Daí resulta que $\varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \frac{\lambda}{\mu} \varphi(x, y)$, provando que S contém o conjunto Q dos racionais. Para provar que S contém os reais, seja λ um real e $\{\lambda_n\}$ uma sucessão de racionais convergente para λ. Lembrando as condições (1) e (2) que definem a φ e ainda mais, que a norma é contínua, segue-se que

$$\varphi(\lambda x, y) = \varphi(\lim \lambda_n x, y) = \lim \varphi(\lambda_n x, y) = \lim \lambda_n \varphi(x, y) = \lambda \varphi(x, y)$$

provando que S contém os números reais.

Vejamos que o número complexo $i \in S$. De facto, por (1) e (2), segue-se que

$$\varphi(ix, y) = R\varphi(ix, y) - iR\varphi(-x, y)$$

e sendo $R\varphi(-x, y) = -R\varphi(x, y)$, obtém-se

$$\varphi(ix, y) = R\varphi(ix, y) + iR\varphi(x, y) = i[R\varphi(x, y) - iR\varphi(ix, y)] = i\varphi(x, y).$$

Se μ for um qualquer número real, segue-se que $\mu i \in S$ e portanto $\lambda + \mu i \in S$, para cada par de números reais λ, μ, provando que $C \subset S$. Resulta que $C = S$.

Podemos resumir os resultados contidos nos lemas 2) e 3) dizendo que a forma $\varphi : E \times E \to C$ definida por (1) e (2) é linear relativamente a x.

LEMA 4. *A aplicação* $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{C}$, *definida por* (1) *e* (2) *é dotada da simetria hermitiana.*

DEMONSTRAÇÃO. Realmente, sendo

$$R\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] = R\varphi(y, x),$$

pois, $\|x - y\| = \|y - x\|$ e sendo

$$R\varphi(ix, iy) = \frac{1}{4}[\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2] = R\varphi(x, y),$$

porque

$$\|ix + iy\| = \|x + y\|, \|ix - iy\| = \|x - y\|,$$

resulta que podemos escrever

$$\varphi(x, y) = R\varphi(x, y) - iR\varphi(iix, iy) = R\varphi(y, x) + iR\varphi(x, iy) = R\varphi(y, x) + iR\varphi(iy, x)$$

ou finalmente

$$\varphi(x, y) = \overline{R\varphi(y, x) - iR\varphi(iy, x)} = \overline{\varphi(y, x)}$$

provando o lema 4.

Resulta do lema 4 e da definição que o precede, que a forma $\varphi : E \times E \to C$, definida por (1) e (2) é sesquilinear hermitiana, veja definição 2.

LEMA 5. *Se* $\mathrm{x} \to \|\mathrm{x}\|$ *for a norma de* E *então* $\|\mathrm{x}\|^2 = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, *sendo* φ *definida por* (1) *e* (2).

DEMONSTRAÇÃO. De facto,

$$\varphi(x, x) = R\varphi(x, x) - iR\varphi(ix, x).$$

Tem-se

$$R\varphi(x, x) = \frac{1}{4}\|x + x\|^2 = \|x\|^2$$

e

$$R\varphi(ix,x)=\frac{1}{4}[\,\|ix+x\|^2-\|ix-x\|^2=$$

$$=\frac{1}{4}[\,\|(i+1)x\|^2-\|(i-1)x\|^2]=$$

$$=\frac{1}{4}[(|i+1|^2-|i-1|^2)\|x\|^2]=0$$

o que prova o lema 5.

Resulta do lema 5, com os dados anteriores, que a aplicação $\varphi: E\times E\rightarrow C$ definida por (1) e (2) é uma forma sesquilinear hermitianae positiva, isto é, um produto escalar em E, tal que a norma de E é por êle induzida.

Tudo o que demonstramos, será resumido no seguinte:

TEOREMA 1. *Seja* E *um espaço vectorial normado, complexo. A condição necessária e suficiente para que* E *seja dotado de um produto escalar que induza a norma de* E, *é que para cada par de vectores* x, y e E *se tenha*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

COROLÁRIO. *A condição necessária e suficiente para que um espaço vectorial normado complexo* E, *seja dotado de produto escalar, é que cada subespaço de dimensão dois o seja.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, se E for dotado de produto escalar, evidentemente cada subespaço de dimensão dois também será.

Recìprocamente, suponhamos que todo subespaço E' de dimensão dois do espaço vectorial normado complexo E, seja dotado de produto escalar. Daí resulta que para cada par de vectores do subespaço E' vale a condição (NJ). Como vale para cada E', valerá para cada par de vectores de E e pelo teorema 1 segue-se que E é dotado de produto escalar.

7. Espaços vectoriais reais. Vamos considerar neste parágrafo, apenas espaços vectoriais cujos escalares sejam números reais. Em um tal espaço vectorial E, denomina-se produto escalar a uma aplicação $\varphi: E\times E\rightarrow R$ que seja uma forma bilinear simétrica, estritamente positiva, isto é, satisfazendo as condições:

a) φ é linear relativamente a primeira coordenada

b) φ é simétrica, isto é

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$$

c) φ é estritamente positiva.

Resulta que φ é, também, linear relativamente a segunda coordenada.

O Teorema 1, demonstrado anteriormente, vale para espaços vectoriais reais. A necessidade da condição (NJ), no caso real, deduz-se de maneira semelhante aquela usada para o caso complexo. Quanto à suficiência, observe a motivação que foi feita e concluirá, sem dificuldade, que a parte real $R\varphi(x,y)$ seria o produto escalar no caso real. A demonstração seria análoga a que foi feita. Convém acrescentar, ainda, que vale também o corolário, evidentemente.

Sôbre a existência de produto escalar em espaços vectoriais, vale a pena, ainda, dar como notícia o seguinte trabalho: F. A. FICKEN, «Note on the existence of scalar products in normed linear spaces», Ann. of Math. (2) vol. 45 (1944) pp. 362-366, que consiste em impor uma outra condição sobre a norma de um espaço vectorial normado de modo a permitir a existência de um produto escalar. Faremos a seguir o resumo do trabalho citado, sem demonstrações. Pelo corolário do Teorema 1 é bastante nos limitarmos aos subespaços vectoriais de dimensão dois. Sejam então x, y dois vectores independentes de um espaço vectorial real E e seja V o subespaço gerado por estes dois vectores. Consideremos a aplicação σ de V em

V definida por

$$(1) \qquad \sigma(a\,x + b\,y) = b\,x + a\,y$$

sendo a e b reais, pois E é real. Segue-se que $\sigma^2 = I$, sendo I a aplicação idêntica, de onde resulta que σ é uma involução. Sendo

$$M = \{a\,x + b\,y\,;\ \sigma(a\,x + b\,y) = a\,x + b\,y\} = \\ = \{k\,(x+y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

e

$$N = \{a\,x + b\,y\,;\ \sigma(a\,x + b\,y) = -(a\,x + b\,y)\} = \\ = \{k\,(x-y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

segue-se que σ é uma involução em torno de M paralelamente a N.

Suponhamos que V seja dotado de produto escalar, o qual, como no caso complexo, vamos representar por $(\,|\,)$. Então se $\|x\| = \|y\|$, tem-se

$$\|a\,x + b\,y\|^2 = (a\,x + b\,y\,|\,a\,x + b\,y) = \\ = a^2\|x\|^2 + 2\,a\,b\ x, y\ + b^2\|y\|^2 = \\ = b^2\|x\|^2 + 2\,a\,b\,(x\,|\,y) + b^2\|y\|^2 = \\ = (b\,x + a\,y\,|\,b\,x + a\,y) = \\ = \|b\,x + a\,y\|^2 .$$

Daí resulta, que se E for um espaço vectorial real, quando $\|x\| = \|y\|$ a involução σ é uma isometria.

O trabalho de F. A. Ficken, tem por objectivo provar que dado um espaço vectorial real normado E, se para cada par de vectores $x, y \in E$, tais que $\|x\| = \|y\|$, a involução σ definida por (1) for uma isometria, então E é dotado de um produto escalar, que induz a norma de E. O autor prova que se esta hipótese for verdadeira, então a norma de E satisfaz à condição (N J), de onde resulta a veracidade da afirmativa. Como observação final, estende o seu teorema para os espaços vectoriais complexos, ainda sem se libertar da condição (NJ).

Sobre produtos infinitos de funções

por **Graciano Neves de Oliveira**

§ 1 — No último número da «Gazeta de Matemática» publicámos um artigo em que estudámos produtos infinitos numéricos, procurando reduzi-los a séries por aplicação de logaritmos. Esta ideia tem-se-nos revelado fecunda e por isso aplicámo-la ao estudo de produtos infinitos de funções, tendo já conseguido alguns resultados interessantes que passamos a expor.

§ 2 — Consideremos o produto

$$(2.\,1) \qquad P(x) = \prod_{0}^{\infty} \omega_n(x)$$

que suporemos convergente em todo o ponto x dum conjunto X onde os ω_n são definidos.

Diremos que o produto (2. 1) converge *quase uniformemente* no ponto a (ponto de acumulação de X) se dado um $\delta > 0$ arbitrário é sempre possível determinar uma ordem $m(\delta)$ tal que para $n > m(\delta)$ se verifique

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta$$

em certa vizinhança ε_n de a, podendo ε_n depender de n.

Dando-se o caso de ε_n ser independente de n diz-se que a convergência é uniforme.

No que se segue suporemos sempre $\omega_n > 0$.

Teorema 1. *Se* $\mathrm{P(x)}$ *é quase uniformemente convergente em* a *e se* $\mathrm{P(x)} > \mathrm{k} > 0$ *em certa vizinhança* ε *de* a, *o resto de ordem*