V definida por

(1) $$\sigma(ax+by) = bx + ay$$

sendo a e b reais, pois E é real. Segue-se que $\sigma^2 = I$, sendo I a aplicação idêntica, de onde resulta que σ é uma involução. Sendo

$$M = \{ax+by\,;\ \sigma(ax+by) = ax+by\} = \\ = \{k(x+y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

e

$$N = \{ax+by\,;\ \sigma(ax+by) = -(ax+by)\} = \\ = \{k(x-y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

segue-se que σ é uma involução em torno de M paralelamente a N.

Suponhamos que V seja dotado de produto escalar, o qual, como no caso complexo, vamos representar por $(\,|\,)$. Então se $\|x\| = \|y\|$, tem-se

$$\|ax+by\|^2 = (ax+by\,|\,ax+by) = \\ = a^2\|x\|^2 + 2ab\ x,y\ + b^2\|y\|^2 = \\ = b^2\|x\|^2 + 2ab(x\,|\,y) + b^2\|y\|^2 = \\ = (bx+ay\,|\,bx+ay) = \\ = \|bx+ay\|^2 .$$

Daí resulta, que se E for um espaço vectorial real, quando $\|x\| = \|y\|$ a involução σ é uma isometria.

O trabalho de F. A. FICKEN, tem por objectivo provar que dado um espaço vectorial real normado E, se para cada par de vectores $x, y \in E$, tais que $\|x\| = \|y\|$, a involução σ definida por (1) for uma isometria, então E é dotado de um produto escalar, que induz a norma de E. O autor prova que se esta hipótese for verdadeira, então a norma de E satisfaz à condição (N J), de onde resulta a veracidade da afirmativa. Como observação final, estende o seu teorema para os espaços vectoriais complexos, ainda sem se libertar da condição (NJ).

Sobre produtos infinitos de funções

por **Graciano Neves de Oliveira**

§ 1 — No último número da «Gazeta de Matemática» publicámos um artigo em que estudámos produtos infinitos numéricos, procurando reduzi-los a séries por aplicação de logaritmos. Esta ideia tem-se-nos revelado fecunda e por isso aplicámo-la ao estudo de produtos infinitos de funções, tendo já conseguido alguns resultados interessantes que passamos a expor.

§ 2 — Consideremos o produto

(2. 1) $$P(x) = \prod_0^{\infty} \omega_n(x)$$

que suporemos convergente em todo o ponto x dum conjunto X onde os ω_n são definidos.

Diremos que o produto (2. 1) converge *quase uniformemente* no ponto a (ponto de acumulação de X) se dado um $\delta > 0$ arbitrário é sempre possível determinar uma ordem $m(\delta)$ tal que para $n > m(\delta)$ se verifique

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta$$

em certa vizinhança ε_n de a, podendo ε_n depender de n.

Dando-se o caso de ε_n ser independente de n diz-se que a convergência é uniforme.

No que se segue suporemos sempre $\omega_n > 0$.

TEOREMA 1. *Se* $\mathrm{P(x)}$ *é quase uniformemente convergente em* a *e se* $\mathrm{P(x)} > \mathrm{k} > 0$ *em certa vizinhança* ε *de* a, *o resto de ordem*

n, $Q_n(x)$ *tende quase uniformemente para* 1 *em* a [1].

Por hipótese temos pois

(2. 2) $$|P_n(x) - P(x) < \delta$$

para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$.

A desigualdade (2. 2) pode ainda escrever-se

$$-\delta < P_n - P < \delta$$

ou

$$P - \delta < P_n < P + \delta$$

ou, escolhendo $\delta < k$ e por ser $P(x) > k > 0$ em $I(a, \varepsilon)$ temos

$$0 < k - \delta < P_n$$

para $n > m$ e na menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon_n)$ e $I(a, \varepsilon)$ que designaremos por $I(a, \eta_n)$.

De (2. 2) vem então

$$\left|1 - \frac{P(x)}{P_n(x)}\right| < \frac{\delta}{k - \delta}$$

ou

(2. 3) $$|1 - Q_n(x)| < \frac{\delta}{k - \delta}$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \eta_n)$ com o que fica concluida a demonstração.

Teorema 2. *Se* $Q_n(x)$ *tende quase uniformemente para* 1 *em* a *e numa vizinhança* ε_n *de* a *se tem* $P_n(x) < k$, *para* $n > m_1$, *o produto converge quase uniformemente em* a.

Por hipótese tem-se

(2. 4) $$|1 - Q_n(x)| < \delta$$

para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \varepsilon_n')$.

A desigualdade (2. 4) pode escrever-se

$$\left|1 - \frac{P(x)}{P_n(x)}\right| < \delta$$

donde

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta\,|P_n(x)|.$$

Sendo m um número superior a m_1 e a $m(\delta)$ e designando por $I(a, \eta_n)$ a menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon_n)$ e $I(a, \varepsilon_n')$ teremos

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta k$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \eta_n)$ e fica o teorema demonstrado.

§ 3 — A par com o produto (2. 1) consideremos a série

(3. 1) $$S(x) = \log P(x) = \sum_0^\infty \log \omega_n(x).$$

Designemos por $R_n(x)$ o resto de ordem n desta série. Será manifestamente $R_n = \log Q_n$.

Suponhamos que $P(x)$ satisfaz às hipóteses do teorema 1 do § 2. Isso implica como provámos a desigualdade (2. 3) que pode escrever-se

(3. 2) $$|1 - Q_n| < \delta'$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$.

De (3. 2) vem evidentemente

$$|\log Q_n(x)| < \varepsilon$$

ou

(3. 3) $$|R_n| < \varepsilon$$

ou ainda

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

que permite enunciar o

Teorema 1. *Se* $P(x)$ *é quase uniformemente convergente em* a *e se* $P(x) > k > 0$ *em certa vizinhança de* a, *a série* (3. 1) *é quase uniformemente convergente em* a.

E de modo semelhante se prova o

Teorema 2. *Se a série* (3. 1) *é quase uniformente convergente em* a *e numa vizinhança* ε_n' *de* a *se tem* $P_n(x) < k$, *para* $n > m_1$, *então o produto* $P(x)$ *é quase uniformemente convergente em* a.

---

[1] Isto é, ter-se-á $|Q_n(x) - 1| < \delta$ para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \eta_n)$.

De facto verificando-se (3. 3) para $n > m$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$ temos nas mesmas condições

$$|\log Q_n(x)| < \varepsilon$$

ou

$$|1 - Q_n| < \delta'.$$

Pelo teorema 2 do § 2 fica este provado.

§ 4 — É conhecido o seguinte teorema de ARZELA:

A condição necessária e suficiente para que uma série seja contínua em ponto de continuidade dos seus termos é que a convergência seja quase uniforme nesse ponto.

Podemos agora provar o

TEOREMA 1. *Se em* a *o produto* (2. 1) *é quase uniformemente convergente, se em* $\mathrm{I}(\mathrm{a}, \varepsilon)$ *é* $\mathrm{P}(\mathrm{x}) > \mathrm{k} > 0$ *e se em* a *todos os* ω_n *são funções contínuas então o produto* P *é ainda função contínua em* a.

De facto pelo teorema 1 do § anterior a série (3. 1) será quase uniformemente convergente em a. Os seus termos são todos funções contínuas em a [1]. Logo pelo teorema de ARZELA $\log P(x)$ é uma função contínua em a. O mesmo acontece pois a $P(x) = e^{\log P(x)}$.

TEOREMA 2. *Se em* a *o produto* (2. 1) *não se anula e é uma função contínua bem como todos os seus factores e se além disso numa vizinhança* $\mathrm{I}(\mathrm{a}, \varepsilon_n)$ *se tem* $\mathrm{P}_n(\mathrm{x}) < \mathrm{k}$, *o produto converge quase uniformemente em* a.

Com efeito em a os termos da série (3. 1) e a sua soma serão funções contínuas. Pelo teorema de ARZELA convergirá quase uniformemente. E pelo teorema 2 do § anterior fica este provado.

[1] Supozemos de início $\omega_n(x) > 0$. Aliás aqui a condição $P(x) > k > 0$ em $I(a, \varepsilon)$ implica já que nenhum ω_n se anule em $I(a, \varepsilon)$.

§ 5 — Neste § suporemos sempre que existe uma vizinhança do ponto a onde o produto $P(x)$ é convergente e diferente de zero.

TEOREMA 1. *Se a série* $\sum_0^\infty \frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}$ *é uniformemente convergente no ponto* a, *a derivada de* P(x) *no ponto* a *pode obter-se pela regra de derivação dum produto finito:*

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} P'(a) = {} & \omega'_0(a)\,\omega_1(a)\,\omega_2(a)\cdots \\ & + \\ & \omega_0(a)\,\omega'_1(a)\,\omega_2(a)\cdots \\ & + \\ & \omega_0(a)\,\omega_1(a)\,\omega'_2(a)\cdots \\ & + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

De facto a série

$$(5.2) \qquad S(x) = \log P(x) = \sum_0^\infty \log \omega_n(x)$$

será convergente numa certa vizinhança de a.

Consideremos a série $s(x)$ cujo termo geral é a derivada de $\log \omega_n(x)$:

$$s(x) = \sum_0^\infty \frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}$$

como esta série é uniformemente convergente em a teremos

$$S'(a) = s(a)$$

De (5. 2) vem

$$S'(a) = \frac{P'(a)}{P(a)}$$

e portanto

$$P'(a) = s(a)\,P(a)$$

ou ainda

$$(5.3) \qquad P'(a) = \sum_0^\infty \frac{\omega'_n(a)}{\omega_n(a)}\,P(a)$$

donde imediatamente se tira (5. 1).

TEOREMA 2. *Se em* $\mathrm{I}(\mathrm{a}, \varepsilon)$ *é* $\omega_n(\mathrm{x}) > \mathrm{k} > 0$, *para* $\mathrm{n} > \mathrm{m}_1$, *e se em* a $\sum_0^\infty \omega'_n(\mathrm{x})$ *converge* *absoluta e uniformemente,* P(x) *pode derivar-se pela regra deduzida.*

Bastará, pelo teorema anterior, provar que $\sum_0^\infty \frac{\omega_n'}{\omega_n}$ é uniformemente convergente em a.

Ora temos em $I(a, \varepsilon)$ e para $m > m_1$

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \sum_m^{m+p} \frac{|\omega_n'|}{\omega_n} < \frac{1}{k} \sum_m^{m+p} |\omega_n'| .$$

Por hipótese pode sempre tomar-se m tão grande que numa vizinhança $I(a, \varepsilon')$ se tenha

$$\sum_m^{m+p} |\omega_n'| < \delta k .$$

Logo para m suficientemente grande e x pertencente à menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon)$ e $I(a, \varepsilon')$ temos

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \delta$$

donde

$$\left|\sum_m^{\infty} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \delta$$

e fica o teorema demonstrado.

Teorema 3. *Todo o produto da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n \varphi(x))$ *se pode derivar no ponto* a, *pela regra deduzida, se* $\sum u_n$ *é absolutamente convergente, se em* a *a derivada de* $\varphi(x)$ *é limitada e se em* $I(a, \varepsilon)$ *se tem* $1 + u_n \varphi(x) > k > 0$ *a partir de certa ordem.*

Neste caso tem-se

$$\sum |\omega_n'| = |\varphi'(x)| \sum |u_n|$$

pelo que $\sum |\omega_n'|$ converge uniformemente. Pelo teorema 2 fica este provado.

Teorema 4. *Produto infinito da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n x^n)$ *é derivável, pela regra deduzida, em qualquer ponto* a *do interior do intervalo* $-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}$ *em que é*

$$\lambda = \overline{lim} \sqrt[n]{|u_n|}$$

desde que em $I(a, \varepsilon)$ *seja* $1 + u_n x^n > k > 0$.

Com efeito a série

$$\sum |\omega_n'| = \sum |n u_n x^{n-1}|$$

converge uniformemente em qualquer ponto interior a $-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}$ com $\gamma = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$.

§ 6 — Supozemos nas demonstrações dos quatro teoremas anteriores que existia uma vizinhança de a onde o produto infinito não se anulava e era sempre convergente. Supozemos ainda que nessa vizinhança era $\omega_n > 0$ para todo o n.

Se o produto não satisfaz a estas condições, mas é possível determinar uma ordem n tal que o resto Q_n as satisfaz os teoremas continuam válidos como é fácil verificar [1].

Efectivamente, teremos

$$P = P_n Q_n$$

Se Q_n satisfaz à hipótese de algum dos quatro teoremas anteriores e todos os ω_i, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$, são deriváveis podemos escrever

$$P' = P_n' Q_n + P_n Q_n' = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P_n Q_n + + P_n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} Q_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P .$$

Se algum dos $\omega_i \ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ é nulo toma-se, é claro

$$\frac{P_n}{\omega_i} = \omega_0 \cdots \omega_{i-1} \omega_{i+1} \cdots \omega_{n-1} .$$

A regra mantém-se pois neste caso.

[1] Portanto agora só exigimos $\omega_i > 0$ para além da ordem $n-1$.

§ 7 — Damos agora algumas aplicações da regra de derivação que deduzimos.

Sabe-se que é

$$(7.1)\qquad \operatorname{sen} x = x \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

É fácil ver que este produto se pode derivar pela regra deduzida com base no teorema 3 do § 5 e no que se disse no § 6.

Teremos

$$(7.2)\qquad \begin{aligned} \cos x = & \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) + \\ & + x \left[\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)\right]' \end{aligned}$$

neste caso é

$$\frac{\omega' n}{\omega n} = - \frac{2x}{n^2 \pi^2 - x^2}.$$

Pela fórmula (5. 3)

$$\left[\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)\right]' = - \sum_{1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 \pi^2 - x^2} \times \\ \times \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

pelo que (7. 2) passa a escrever-se

$$\cos x = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) - x \sum_{1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 \pi^2 - x^2} \times \\ \times \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

entrando aqui com o valor de

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

tirado de (7. 1) vem

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^2 \pi^2 - x^2}.$$

Sabe-se também que

$$\cos x = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right)$$

atendendo ao teorema 3 do § 5, ao § 6 e à fórmula (5. 3) podemos escrever

$$-\operatorname{sen} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{-8x}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2} \cos x$$

donde

$$\operatorname{tg} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{8x}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2}.$$

É ainda conhecido o seguinte produto infinito

$$(7.3)\qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdots$$

Temos

$$\omega_n = \cos \frac{x}{2^n}$$

e

$$\omega'_n = - \frac{1}{2^n} \operatorname{sen} \frac{x}{2^n}.$$

Como

$$|\omega'_n| = \left| \frac{1}{2^n} \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

a série $\sum_{1}^{\infty} |\omega'_n|$ é uniformemente convergente em qualquer ponto. Para qualquer x tem-se $\omega_n > k > 0$ desde que n seja suficientemente grande. Atendendo ao teorema 2 do § 5 e ao § 6 podemos a (6. 3) aplicar a fórmula (5. 3), vindo

$$\frac{\cos x \cdot x - \operatorname{sen} x}{x^2} = - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}}{\cos \frac{x}{2^n}} \times \\ \times \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

donde

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{x}{2^n}.$$

Provaremos agora que a soma da série

$$(7.4) \qquad \sum\left[\frac{2(n+1)x^{2n+1}}{1+x^{2(n+1)}}+\frac{(2n+1)x^{2n}}{1+x^{2n+1}}-\frac{(2n+1)x^{2n}}{1-x^{2n+1}}\right]$$

é zero qualquer que seja x desde que $|x|<1$.

Para isso partiremos da igualdade (1)

$$\prod(1+x^{2(n+1)})\cdot\prod(1+x^{2n+1})\cdot\prod(1-x^{2n+1})=1$$

para $|x|<1$.

Designemos por P_1, P_2, P_3 respectivamente o 1.º, 2.º e 3.º produto infinito. Por derivação teremos

$$(7.5) \qquad P_1' P_2 P_3 + P_1 P_2' P_3 + P_1 P_2 P_3' = 0$$

A fórmula (5. 3) é aplicável a qualquer dos três produtos num ponto de intervalo aberto $(-1, +1)$.

Fàcilmente se conclui que

$$P_1' = S_1 P_1$$
$$P_2' = S_2 P_2$$
$$P_3' = S_3 P_3$$

respectivamente com

$$S_1 = \sum\frac{2(n+1)x^{2n+1}}{1+x^{2(n+1)}}$$

$$S_2 = \sum\frac{(2n+1)x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$$

$$S_3 = -\sum\frac{(2n+1)x^{2n}}{1-x^{2n+1}}.$$

Entrando com estes resultados em (7. 5) e dividindo tudo por $P_1 P_2 P_3$ logo obtemos o que pretendiamos.

§ 8 — Acabaremos, dando o seguinte critério de convergência uniforme para um produto infinito:

(1) Vicente Gonçalves, Curso de Álgebra Superior (1944), pág. 137.

Teorema 1. *Se* $\prod w_n\,(w_n>0)$ *é um produto infinito numérico absolutamente convergente e numa vizinhança de* a, $\omega_n(x)$ *está sempre entre os números* $\frac{1}{w_n}$ *e* w_n *(ou é igual a um deles), então* $\prod \omega_n(x)$ *converge uniformemente em* a.

Antes de demonstrarmos esta proposição convém notar o seguinte:

Por um processo inteiramente análogo ao usado na demonstração do teorema 2 do § 2 se demonstraria:

Teorema 2. *Se* $Q_n(x)$ *tende uniformemente para* 1 *em* a *e numa vizinhança* ε *de* a *se tem* $P_n(x)<k$, *para* $n>m_1$, *o produto* $\prod \omega_n(x)$ *converge uniformemente em* a.

Depois, baseando-nos neste teorema e de modo análogo ao que se usou para provar o teorema 2 do § 3 se provaria:

Teorema 3. *Se a série* (3. 1) *é uniformemente convergente em* a *e numa vizinhança* ε *de* a *se tem* $P_n(x)<k$, *para* $n>m_1$, *então o produto* $\prod \omega_n$ *é uniformemente convergente em* a.

Posto isto provemos finalmente o teorema 1:

Designe W_n o maior dos valores $\frac{1}{w_n}$ e w_n. Teremos por hipótese em $I(a,\varepsilon)$

$$(8.1) \qquad \frac{1}{W_n}\leqq \omega_n(x)\leqq W_n$$

donde

$$(8.2) \qquad |\log\omega_n(x)|\leqq \log W_n.$$

Como $\prod w_n$ é absolutamente convergente, convergirá $\prod W_n$ (1) e será evidentemente diferente de zero. A série $\sum \log W_n$ é pois convergente. Mostra a desigualdade (8. 2) que $\sum \log \omega_n(x)$ é uniformemente convergente em a.

De (8. 1) tira-se ainda

$$\prod_0^m \omega_n(x) \leq \prod_0^m W_n .$$

Seja $K = \prod_0^\infty W_n$. Teremos

$$\prod_0^m \omega_n(x) < K \qquad \text{em } I(a, \varepsilon).$$

Pelo teorema 3 fica a demonstração concluida.

Notemos que, designando por $W_n^*(x)$ o maior dos valores $\omega_n(x)$ e $\dfrac{1}{\omega_n(x)}$, ainda se pode tirar de (8. 2)

$$\log W_n^*(x) \leq \log W_n$$

logo $\sum \log W_n^*$ converge. Será portanto convergente e diferente de zero o produto $\prod W_n^*$. Podemos pois concluir que $\prod \omega_n(x)$ é absolutamente convergente em $I(a, \varepsilon)$ (1).

(1) Como demonstrámos no nosso artigo do último número da «Gazeta de Matemática».

As funções recursivas e os fundamentos da matemática (*)

por *Mário Tourasse Teixeira*
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro — Brasil

Muitas vezes não estamos dispostos a aceitar (em algum sentido) de imediato uma certa sentença S. No entanto, se nos apresentam uma determinada sequência de sentenças

$$S_1, S_2, \cdots S_n = S$$

passamos a considerar aceitável a sentença S. Podemos dizer então que a sequência em questão é um argumento para S no sentido de aceitação considerado.

Uma maneira que parece natural de construir sistemàticamente argumentos é a seguinte. Damos um conjunto a de sentenças aceitáveis e um conjunto $R_1, R_2, \cdots, R_n$ de regras que nos convencemos levam sempre, quando aplicadas a sentenças aceitáveis, a sentenças aceitáveis.

(*) Palestra realizada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

Então, toda a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

onde cada S_i ou pertence a a ou é obtida de anteriores por uma das regras R_i, é um argumento.

Suponhamos, por exemplo, que estejamos interessados em gerar dessa maneira argumentos para a teoria elementar dos números. Para tornar mais explícitas as sentenças em que estamos interessados, vamos dar também um processo de geração para elas.

Primeiro especifiquemos os termos (substantivos), que serão obtidos a partir de variáveis (x, y, etc.) e constantes (0 é bastante) por meio de $+$, $\cdot$ e $'$ (soma, multiplicação e sucessor). Exemplos de termos serão então

$$x + 0$$
$$x \cdot y$$
$$x' + y$$

etc.