juntos e nos convencermos de que esse sistema engloba grande parte da matemática. Mas agora o nosso conjunto inicial de sentenças a é aceitável em outro sentido, ou pelo menos nem todos estão dispostos a aceitá-lo da mesma maneira que o anterior. Por outro lado, podemos construir este novo sistema com as mesmas características de efectividade do anterior. Em particular, existe um critério efectivo para saber se uma sequência $S_1 \cdots S_n$ é ou não um argumento desse novo sistema. Vimos que essas características de efectividade estão intimamente relacionadas ao sistema inicial, que então poderia, sob um certo ponto de vista, ser considerado como o sistema matemático básico.

Espaços de Banach uniformemente convexos (*)

por Luiz Adauto da Justa Medeiros
Professor da Universidade do Brasil e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.
Rio de Janeiro — Brasil

§ 1. Introdução. Nosso objectivo nesta exposição é apresentar, sob forma didáctica, um resultado sobre espaços de BANACH, descoberto por D. MILMAN e publicado em «Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S.», vol. 20 (1938). O resultado a que nos referimos consiste do teorema 1, do parágrafo 3, cuja demonstração que faremos, não é o original de MILMAN, mas sim uma devida a B. J. PETTIS, publicada em «Duke Mathematical Journal», vol. 5 (1939) 249-253. Convem salientar, que fizemos, oralmente, esta exposição, como complemento ao curso sobre Espaços de HILBERT ministrado no IMPA pelo professor LEOPOLDO NACHBIN, em 1960.

A demonstração do teorema 1 do § 3 se baseia na representação das formas lineares φ, do segundo dual $\mathfrak{X}^{**}$ do espaço de BANACH $\mathfrak{X}$, através de uma integral. Vamos nos limitar a espaços de BANACH reais o que não é restritivo como veremos no parágrafo 3.

§ 2. Representação de formas lineares. Neste parágrafo, demonstraremos um teorema de representação das formas lineares sobre o espaço de BANACH $M(E)$, das funções limitadas em um conjunto E, já provado por BANACH no caso particular em que E é o conjunto dos inteiros naturais e generalizado por T. H. HILDEBRANDT, consulte Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36 (1934) p. p. 868-875. Antes de iniciarmos a demonstração, faremos um apanhado rápido de alguns resultados sobre a teoria da integral.

Seja E um conjunto e representemos por $\mathcal{P}(E)$ a família de todas as partes de E incluindo E e a parte vazia.

Denomina-se decomposição de E a um conjunto finito $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de elementos de $\mathcal{P}(E)$ tais que $E_i \cap E_j$ é a parte vazia para $i \neq j$ e $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = E$.

Se D_1 e D_2 forem duas decomposições de E, diremos que D_1 precede D_2, quando toda parte de D_1 estiver contida em alguma parte de D_2 e escreveremos $D_1 \leqq D_2$. É fácil verificar que a relação $\leqq$ assim definida é uma relação de ordem parcial na família Π das decomposições de E. Dada duas decomposições D_1 e D_2 de E, a decomposição obtida de D_1 e D_2 interseptando os seus elementos, a qual representaremos por $D_1 \cap D_2$ é tal que precede D_1 e D_2. Como

(*) Exposição em seminário de Análise Funcional no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

este facto vale para qualquer par de decomposições, segue-se que a família das decomposições é um conjunto dirigido. Resulta, portanto, que se f for uma função numérica definida em Π, tem sentido falar em limite da f segundo o conjunto dirigido Π, que é dito do seguinte modo: diremos que um número L é limite de uma função numérica f definida em Π, quando, para cada $\varepsilon > 0$, existir uma decomposição D_ε tal que para toda $D \leqq D_\varepsilon$ tenha-se $|f(D) - L| < \varepsilon$. Escreve-se abreviadamente

$$L = \lim_{D \leq} f(D)$$

e que se lê limite de f segundo a direcção $\leqq$.

Seja μ uma função numérica de conjunto, real, definida em $\mathscr{P}(E)$. Diz-se que μ é aditiva quando $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ para $E_1 \cap E_2$ vazio. Diz-se que μ é de variação limitada em E, quando para cada decomposição D de E, a soma $\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$ for finita e nesse caso, ao número real positivo

$$V(\mu; E) = \sup_D \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \lim_{D \leq} \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$$

denomina-se variação total de μ em E. Caso μ seja uma função de conjunto real e positivo, obtem-se:

$$V(\mu; E) = \sup_D \sum_{i=1}^{n} |(E_i)| = \sup_D \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(E).$$

Seja f uma função real definida em E, μ uma função de conjunto real, aditiva definida em $\mathscr{P}(E)$ e de variação limitada. Seja D uma decomposição de E e $t_i \in E_i$. Consideremos as somas $s_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\mu(E_i)$, quando D varia em Π.

Quando existir $\lim_{D \leq} s_D$, diremos que êle será a integral de Stieltjes da f em E e representaremos por

$$\int_E f(x)\,d\mu(x).$$

Seja $M(E)$ o espaço de Banach das funções reais limitadas em E com a norma definida por

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|;\, x \in E\}$$

e representemos por $M^*(E)$ o espaço de Banach das formas lineares reais contínuas sobre $M(E)$, isto é, o dual de $M(E)$.

Vamos representar por χ_{E_i} a função característica da parte E_i, isto é, $\chi_{E_i}(t) = 0$ se $t \in \complement E_i$ e $\chi_{E_i}(t) = 1$ se $t \in \complement E_i$.

Na demonstração do teorema que segue, faremos uso da função $\operatorname{sgn}\mu$, definida em $\mathscr{P}(E)$ por

$$\operatorname{sgn}\mu(E_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu(E_i) = 0 \\ \dfrac{|\mu(E_i)|}{\mu(E_i)} & \text{se } \mu(E_i) \neq 0. \end{cases}$$

Segue-se que $\mu(E_i)\operatorname{sgn}\mu(E_i) = |\mu(E_i)|$.

Proposição 1. A cada elemento φ de $M^*(E)$, corresponde uma função real μ, aditiva, de variação limitada, definida em $\mathscr{P}(E)$, cuja variação total em E é igual a $\|\varphi\|$ e tal que

$$\varphi(f) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$$

para toda $f \in M(E)$.

Demonstração. Seja χ_{E_i} a função característica de E_i. Se $\varphi \in M^*(E)$, como $\chi_{E_i} \in M(E)$, $\mu(E_i) = \varphi(\chi_{E_i})$ é uma função de conjunto real, aditiva definida em $\mathscr{P}(E)$. Vamos provar que μ é de variação limitada em E. De facto, seja D uma decomposição de E em n partes E_i e seja f a função definida em E por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x)\operatorname{sgn}\mu(E_i).$$

Conclui-se que f pertence a $M(E)$ e portanto

$$\|f\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \operatorname{sgn} \mu(E_i) \right| ; x \in E_i \right\} \leqq 1$$

porque $\chi_{E_i}(x) = 1$ e $\operatorname{sgn} \mu(E_i) = \pm 1$ ou zero. Daí obtém-se

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \mu(E_i)\, \varphi(\chi_{E_i})$$

ou

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \operatorname{sgn} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|\,.$$

Logo, para toda decomposição D de E, obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \leqq \|\varphi\|$$

e portanto, $V(\mu\,;E)$ é finita e μ é de variação limitada, sendo $V(\mu\,;E) \leqq \|\varphi\|$. Dada $f \in M(E)$, consideremos a função f_D definida por

$$f_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \chi_{E_i}$$

sendo $t_i \in E_i$, a qual pertence a M(E) pois é uma combinação linear de funções de $M(E)$. Vamos provar que $\lim\limits_{D \leq} f_D = f$. De facto, sendo f limitada, seu conjunto de valores está contido em um intervalo finito $(a\,,b)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, decomponhamos $(a\,,b)$ em partes iguais $a = y_0 < y_1 < \cdots \cdots < y_{n-1} < y_n = b$ de tal modo que $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Representando por $E_i = \{x \in E\,;\, y_{i-1} < < f(x) \leqq y_i\}$ e por D_ε a decomposição de E cujos conjuntos são E_i, segue-se que

$$\|f_{D_\varepsilon} - f\| = \sup \{|f_{D_\varepsilon}(x) - f(x)|\,;\, x \in E\} < \varepsilon$$

pois se $x \in E\,, x \in E_i$ para algum i e daí

$$f_{D_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \chi_{E_i}(x) = f(t_i)$$

e portanto

$$|f_{D_\varepsilon}(x) - f(x)| = |f(t_i) - f(x)| < y_i - y_{i-1} < \varepsilon\,,$$

pois t_i também pertence a E_i.

A mesma desigualdade vale para toda a decomposição obtida redecompondo os intervalos de D_ε ou seja, para toda $D \leqq D_\varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{D \leq} f_D = f$ como desejávamos.

Sendo $\varphi \in M^*(E)$ e $f_D \in M(E)$, obtém-se

$$\varphi(f_D) = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \chi_{E_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \varphi(\chi_{E_i})$$

e como $\varphi(\chi_{E_i}) = \mu(E_i)$, obtém-se finalmente

$$\varphi(f_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \mu(E_i)\,.$$

Sendo μ de variação limitada e f limitada, segue-se que o limite do somatório existe segundo $[D \leqq]$ e é igual a integral da f relativamente a μ. Sendo $|\varphi(f_D) - \varphi(f)| \leqq \leqq \|\varphi\| \cdot \|f_D - f\|$, pelo que vimos anteriormente conclui-se que $\lim \varphi(f_D) = \varphi(f)$ e finalmente obtém-se

$$\varphi(f) = \int_E f(x)\, d\,\mu(x)\,.$$

Para completar a demonstração, é suficiente provar que $\|\varphi\| = V(\mu\,;E)$. Vimos anteriormente $\|\varphi\| \geqq V(\mu\,;E)$ e usando a representação anterior, obtém-se

$$|\varphi(f)| \leqq \|f\| \cdot V(\mu\,;E) \text{ ou } \|\varphi\| \leqq V(\mu\,;E)$$

o que prova ser $\|\varphi\| = V(\mu\,;E)$.

Nossa próxima etapa, será obter um resultado análogo para os elementos do biudal $\mathfrak{X}^{**}$ de um espaço de Banach $\mathfrak{X}$, provando que neste caso é possível obter uma representação integral, sendo a função de conjunto positiva. Isto será obtido através do corolário que segue.

Corolário. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach real e φ um elemento de $\mathfrak{X}^{**}$. Então existe* *uma função de conjunto real* β *satisfazendo as seguintes condições:*

a) β *é definida em toda parte da esfera unitária* S *do dual* $\mathfrak{X}^*$, *sendo aditiva e de variação limitada.*

b) β *é uma função não negativa.*

c) $\| \varphi \| = \mathrm{V}(\beta\,;\mathrm{S})$.

d) $\varphi(f) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{f(x)\,d}\,\beta\mathrm{(x)}$ para toda $\mathrm{f} \in \mathfrak{X}^*$.

Demonstração. Seja $M(S)$ o espaço de Banach de todas as funções reais limitadas em S, esfera unitária de $\mathfrak{X}^*$, com a norma supremo. É claro que a restricção de um elemento qualquer $f \in \mathfrak{X}^*$ a S pertence a $M(S)$. Ainda mais, se $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$ ele pertencerá a $\mathrm{M}^*(S)$ e portanto, a proposição anterior garante a existência de uma função de conjunto μ satisfazendo as condições *a*), c) e *d*). Pelo teorema da decomposição de Jordan, tem-se $\mu = \pi - \nu$, sendo π e ν funções de conjunto satisfazendo as condições *a*) e *b*). Para cada parte F de S, consideremos a parte $P(F)$ de S constituída por todos os $x \in S$ tais que $-x \in F$ e definamos a função de conjunto ν_0 por $\nu_0(F) = \nu(P(F))$. Segue-se que ν_0 tem as propriedades *a*) e *b*) pois ν as possui e ainda mais $\nu_0(S) = \nu(S)$. Pois bem, a função β definida em $\mathscr{P}(S)$ por $\beta(F) = \pi(F) + \nu_0(F)$ para toda parte F, possui as propriedades exigidas na tese do corolário. De facto, *a*) e *b*) são imediatas. Para provarmos a c), sabemos que $\| \varphi \| = V(\mu\,;S)$ e que sendo $\mu = \pi - \nu$, ainda pelo teorema da decomposição de Jordan, tem-se $V(\mu\,;S) = \pi(S) + \nu(S)$ e como $\nu(S) = \nu_0(S)$, obtém-se $V(\mu\,;S) = \pi(S) + \nu(S)$ e como $\nu(S) = \nu_0(S)$, vem $\| \varphi \| = V(\mu\,;S) = \pi(S) + \nu_0(S) = \beta(S) = V(\beta\,;S)$, porque β é uma função de conjunto real positiva.

Antes de demonstrarmos a *d*), observemos que

$$\int_S -f(x)\,d\nu(x) = \int_S f(-x)\,d\nu(x) = $$

$$= \int_S f(x)\,d\nu_0(x)\,.$$

Sabemos que

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\mu(x)$$

e portanto,

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\pi(x) - \int_S f(x)\,d\nu(x)$$

que pela observação anterior pode ser escrita do modo seguinte

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\pi(x) + \int_S f(x)\,d\nu_0(x)$$

ou

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\beta(x)$$

como desejávamos provar.

§ 3. Espaços de Banach uniformemente convexos. Consideremos o espaço vectorial R^2 constituido por todos os vectores $x = (x_1\,, x_2)$ do plano. Sabemos que com as normas

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \text{máx}\,(|x_1|\,, |x_2|)$$

R^2 é um espaço normado. A esfera unitária S_2 correspondente a norma $\| \;\|_2$ é um círculo de raio um e centro na origem e a S_∞ correspondente a $\| \;\|_\infty$ é um quadrado com vértices nos pontos $(+1\,, +1)$, $(+1\,, -1)$, $(-1\,, -1)$, $(-1\,, +1)$. Sejam x e y dois vectores *quaisquer* do plano tais que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ e $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$. É fácil verificar que quando $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|_2$ tende para um, resulta que $\|x - y\|_2$ tende para zero. Entretanto, $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|_\infty$ pode tender para um sem que necessàriamente $\|x - y\|_\infty$ tenda para zero. O leitor poderá verificar tal facto intuitivamente. No que segue vamos trabalhar com espacos de BANACH cuja norma tenha um comportamento semelhante ao da norma $\| \ \|_2$, com relação ao facto observado anteriormente.

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de BANACH e consideremos dois vectores x e y quaisquer da superfície da esfera unitária S de $\mathfrak{X}$. Suponhamos que quando o ponto médio $\frac{x+y}{2}$ da corda unindo os vectores x e y, tenda para a superfície de S resulte, que o comprimento desta corda tenda para zero, quaisquer que sejam x e y tomados na superfície de S. Este mesmo facto pode ser dito do seguinte modo: se x e y são dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ então

$$\lim_{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \to 1} \|x-y\| = 0$$

o que é ainda equivalente a dizer que se x, y forem dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ sendo $\|x\| = \|y\| = 1$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$ quando $\left| \left\| \frac{x+y}{2} \right\| - 1 \right| < \delta_\varepsilon$.

Observando que $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqq 1$, o que acabamos de dizer é equivalente a afirmar que para cada $\varepsilon > 0$, existe δ_ε de tal modo que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta_\varepsilon$ então $\|x-y\| < \varepsilon$. Finalmente esta última forma é equivalente a afirmar que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$ então $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta_\varepsilon$. Tal facto motiva a definição que segue, que embora limitada a espaços de BANACH, poderia ser posta em um espaço normado.

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que um espaço de BANACH $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que se x e y forem dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ sendo $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$ então $\|x+y\| < 2 - \delta_\varepsilon$.

EXEMPLO. Todo espaço de HILBERT $\mathfrak{H}$ é como espaço de BANACH uniformemente convexo.

De facto, a norma induzida pelo produto interno de $\mathfrak{H}$ satisfaz a condição

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo par de vectores x e y de $\mathfrak{H}$. Em particular se tomarmos $\|x\| = \|y\| = 1$, obtem-se

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$$

ou

$$\|x+y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2 < 4 - \varepsilon^2$$

para $\|x-y\| > \varepsilon$. Daí resulta que tomando $0 < \varepsilon < 2$, vem

$$\|x+y\| < 2 - \delta_\varepsilon$$

sendo $\delta_\varepsilon = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$.

Nosso objectivo, agora, é provar que todo espaço de BANACH uniformemente convexo é reflexivo. Devemos provar que para cada forma linear φ do segundo dual $\mathfrak{X}^{**}$, existe um vector x_0 do espaço de partida $\mathfrak{X}$ tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda forma linear f pertencente ao dual $\mathfrak{X}^*$. Observemos que é suficiente provar este facto para as formas lineares reais φ pertencentes ao bidual $\mathfrak{X}^{**}$. Realmente, admitamos que tenhamos provado para as formas reais φ. Seja ψ uma forma linear complexa de $\mathfrak{X}^{**}$. Tem-se por um resultado conhecido, que $\psi(f) = \psi_1(f) - i\psi_1(if)$ sendo ψ_1 uma forma linear real de $\mathfrak{X}^{**}$. Supondo que a ψ_1 corresponda x_0 pertencente a $\mathfrak{X}$, tem-se $\psi_1(f) = f(x_0)$, $\psi_1(if) = if(x_0)$ e daí resulta que $\psi(f) = f(2x_0)$ e como a decomposição da ψ é única, é suficiente à ψ fazer corresponder $2x_0$. Conclui-se daí, que podemos realmente nos limitar as formas lineares reais, para o objectivo que temos em mente.

A demonstração do teorema principal se baseia essencialmente no corolário da proposição 1 do § 2 e nos dois lemas que seguem.

LEMA 1. *Seja* $\mathfrak{X}$ *um espaço de* BANACH *uniformemente convexo. Para cada* f *real pertencente a* $\mathfrak{X}^*$, *sendo* $\| f \| \neq 0$, *existe um e um só vector* x_0 *tal que* $\| x_0 \| = 1$ *sendo* $f(x_0) = \| f \|$.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $\| f \| \neq 0$ é bastante supor que $\| f \| = 1$. Como $\| f \| = \sup \{ |f(x)| ; \| x \| = 1 \}$, existe uma sequência $\{t_n\}$ de vectores de $\mathfrak{X}$, tal que $\| t_n \| = 1$ e $\lim_{n \to \infty} |f(t_n)| = 1$. De modo equivalente, para cada $\varepsilon > 0$ existe um n_ε tal que $1 - \varepsilon < |f(t_n)| < 1 + \varepsilon$ para $n > n_\varepsilon$. Sabemos que $|f(t_n)| \leq \| f \| \cdot \| t_n \| = 1$ e por ser f uma forma linear real $|f(t_n)|$ tomará os valores $\pm f(t_n) = f(\pm t_n)$. Daí resulta que existe uma sucessão $\{x_n\}$ de vectores de $\mathfrak{X}$ tal que, $\| x_n \| = 1$ e $1 - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq 1$ para $n > n_\varepsilon$. Vamos provar que $\{x_n\}$ é uma sequência de CAUCHY e como $\mathfrak{X}^*$ é de BANACH será convergente. De facto, sendo $\mathfrak{X}$ uniformemente convexo, para cada $\varepsilon > 0$ existe um δ_ε tal que para quaisquer x e y de $\mathfrak{X}$ sendo $\| x \| = \| y \| = 1$ e $\| x + y \| > 2 - \delta_\varepsilon$, tem-se $\| x - y \| < \varepsilon$. Considerando o ε anterior e o seu correspondente δ_ε, seja $n_\varepsilon = \dfrac{2}{\delta_\varepsilon}$. Logo pelo que vimos anteriormente, para $m, n > n_\varepsilon$, obtem-se $f(x_m + x_n) = f(x_m) + f(x_n) > 1 - \dfrac{1}{m} + 1 - \dfrac{1}{n} > 2 - \dfrac{2}{n_\varepsilon} = 2 - \delta_\varepsilon$ ou seja, $2 - \delta_\varepsilon < |f(x_m + x_n)| \leq \| f \| \ \| x_m + x_n \| = \| x_m + x_n \|$. Sendo $\| x_m \| = \| x_n \| = 1$, resulta, pois $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, que $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$ para $m, n > n_\varepsilon$, o que prova ser $\{x_n\}$ uma sucessão de CAUCHY e portanto existe um x_0 em $\mathfrak{X}$ tal que $\lim x_n = x_0$. Sendo $\| \ \|$ uma aplicação contínua, conclui-se que $\| x_0 \| = \lim \| x_n \|$ e portanto $\| x_0 \| = 1$. Ainda mais tem-se

$$f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 1 = \| f \|.$$

Para completar a demonstração é suficiente provarmos a unicidade. Para tal, suponhamos que existisse x_1 em $\mathfrak{X}$, sendo $\| x_1 \| = 1$, $f(x_1) = \| f \| = 1$ e que $x_1 \neq x_0$. Seja então $\varepsilon > 0$ tal que $\| x_1 - x_0 \| > \varepsilon$ e como $\| x_1 \| = \| x_0 \| = 1$ e $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\| x_1 + x_0 \| < 2 - \delta_\varepsilon$, sendo portanto $\delta < 2$. Tem-se portanto

$$2 = f(x_1 + x_0) \leq |f(x_1 + x_0)| \leq$$
$$\leq \| f \| \cdot \| x_1 + x_0 \| < 2 - \delta_\varepsilon$$

o que é absurdo, logo $x_0 = x_1$.

LEMA 2. *Seja* $\mathfrak{X}$ *um espaço de* BANACH *uniformemente convexo,* x, y *dois vectores de* $\mathfrak{X}$ *e* $f \neq 0$ *uma forma linear real de* $\mathfrak{X}^*$. *Se* $\| x \| = 1$, $\| y \| \leq 1$ *e* $f(x) = \| f \|$ *então para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$f(y) \leq (1 - \delta_\varepsilon) \| f \|.$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, dado um qualquer $\varepsilon > 0$, seja $\eta = \min(1/2, \varepsilon/2)$. Usando o facto de $\mathfrak{X}$ ser estritamente convexo, seja ζ_η o correspondente de η e ponhamos $\delta_\varepsilon = \min(\zeta_\eta, \eta)$. Vamos provar que um tal δ_ε satisfaz as condições do teorema. Observemos que não é restritivo supor que $0 < \varepsilon < 2$, daí obtém-se $0 < \delta_\varepsilon \leq \eta \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < 2$ e dividamos a demonstração em duas etapas.

a) Suponhamos $0 \leq \| y \| \leq 1 - \eta$. Tem-se $f(y) \leq \| f \| \cdot \| y \| \leq \| f \| \ (1 - \eta) \leq (1 - \delta_\varepsilon) \| f \|$ e o lema é verdadeiro.

b) Suponhamos $1 - \eta < \| y \| \leq 1$. Ponhamos $z = \frac{y}{\|y\|}$. Sendo $\|x-y\| \geqq \varepsilon$, obtém-se

$$\|x - z\| \geqq \|x - y\| - \|y - z\| \geqq \varepsilon - \\ - \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

ou

$$\|x - z\| \geqq \varepsilon - (1 - \|y\|) > \varepsilon - \eta \geqq \eta .$$

Daí resulta que $\|x\| = \|z\| = 1$ e $\|x - z\| \geqq \eta$ e por ser $\mathfrak{X}$ uniformemente convexo, obtém-se que $\|x + z\| \leqq 2 - \zeta_\eta$ e portanto, para $f(x) = \|f\|$, conclui-se que

$$f(z) = f(z + x) - f(x) \leqq \|f\| \, \|z + x\| - \|f\|$$

ou

$$f(z) \leqq \|f\| (2 - \zeta_\eta) - \|f\| = \\ = \|f\| (1 - \zeta_\eta) \leqq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\| .$$

Resultando, finalmente, que

$$f(y) = \|y\| f(z) \leqq \|y\| (1 - \delta_\varepsilon) \|f\| \leqq \\ \leqq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\|$$

o que prova completamente o lema.

TEOREMA 1. *Todo espaço de* BANACH $\mathfrak{X}$ *uniformemente convexo é reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Devemos provar que para cada forma linear $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$, existe um vector $x_0 \in \mathfrak{X}$ tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda forma linear $f \in \mathfrak{X}^*$. Pela observação que fizemos sobre as formas lineares reais e complexas é suficiente considerar as formas lineares $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$ que sejam reais. Seja, portanto, φ uma forma linear real de $\mathfrak{X}^{**}$ e vamos supor que $\|\varphi\| = 1$. Para uma tal φ existe uma sequência $\{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{X}^*$, tal que

$$(1) \quad \|f_n\| = 1 \;\text{ e }\; \|\varphi\| = 1 \geqq \varphi(f_n) > 1 - \frac{1}{n}$$

sendo os f_n reais para $n = 1, 2, \cdots$. Pelo lema 1, para cada n existe uma sequência $\{x_i^n\}_{i \in N}$ tal que $\|x_i^n\| = 1$, para $i = 1, 2, \cdots$, convergente para x_0^n e $f_n(x_0^n) = \|f_n\|$ e além disso $\|x_0^n\| = 1$ para todo n. Como para cada n faz-se corresponder um único $x_n = x_0^n$, conclui-se que existe uma sequência $\{x_n\}$ de elementos de $\mathfrak{X}$ satisfazendo a seguinte condição:

$$(2) \quad \|x_n\| = 1 \;\text{ e }\; f(x_n) = \|f_n\| = 1 .$$

Nossa próxima etapa, será demonstrar que esta sequência $\{x_n\}$ é de CAUCHY e que $x_0 = \lim x_n$ é tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda $f \in \mathfrak{X}$.

Sabemos, pelo corolário da proposição 1 do § 2, que dada φ existe uma função de conjunto β aditiva e real positiva definida em todas as partes da esfera unitária S de $\mathfrak{X}$ e tal que

$$(3) \qquad 1 = \|\varphi\| = V(\beta, S) = \beta(S)$$

e

$$(4) \quad \varphi(f) = \int_S f(x) \, d\beta(x) \;\text{ para toda }\; f \in \mathfrak{X}^* .$$

Ponhamos $S_{n,\varepsilon} = \{x \in S ; \|x - x_n\| < \varepsilon\}$, para cada $\varepsilon > 0$ e usando (4) obtém-se

$$\varphi(f_n) = \int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x) + \\ + \int_{S - S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x)$$

e por (1) podemos escrever

$$(5) \quad 1 - \frac{1}{n} < \int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x) + \\ + \int_{S - S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x)$$

Se $x \in S - S_{n,\varepsilon}$, tem-se $\|x - x_n\| \geqq \varepsilon$ e portanto, sendo $\|x_n\| = 1$, $\|x\| \leqq 1$, $\|x - x_n\| \geqq \varepsilon$, $f_n(x_n) = \|f_n\| = 1$, o lema 2 nos diz que

$$(6) \qquad f_n(x) \leqq (1 - \delta_\varepsilon)$$

sendo δ_ε independente de n.

Resulta que a (5), em vista de (6), toma a forma seguinte:

$$1-\frac{1}{n}<\int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x)\,d\beta(x)+$$
$$+(1-\delta_\varepsilon)\int_{S-S_{n,\varepsilon}} d\beta(x)$$

e sendo β positiva, obtém-se

$$1-\frac{1}{n}<\int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x)\,d\beta(x)+$$
$$+(1-\delta_\varepsilon)\beta(S-S_{n,\varepsilon}).$$

Sendo $x\in S_{n,\varepsilon}\subset S$, $\|x\|\leqq 1$ portanto, $f_n(x)\leqq|f_n(x)|\leqq\|f_n\|\cdot\|x\|=1$ e finalmente

$$1-\frac{1}{n}<\beta(S_{n,\varepsilon})+(1-\delta_\varepsilon)\beta(S-S_{n,\varepsilon}).$$

Por (1) concluíu-se que

$$\beta(S-S_{n,\varepsilon})\leqq\frac{1}{n\,\delta_\varepsilon} \tag{7}$$

para $n=1,2,\cdots$.

Seja $n_\varepsilon>0$ tal que $n_\varepsilon\delta_\varepsilon>2$ e vamos provar que para $m,n>n_\varepsilon$, $S_{m,\varepsilon}\cap S_{n,\varepsilon}$ é não vazia. De facto, sendo

$$\beta(S)=1,\ \beta(S-S_{m,\varepsilon})<\frac{1}{2},$$
$$\beta(S-S_{n,\varepsilon})<\frac{1}{2}$$

então

$$\beta(S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon})=\beta[S-[(S-S_{n,\varepsilon})\cup$$
$$\cup(S-S_{m,\varepsilon})]]\geqq\beta(S)-[\beta(S-S_{n,\varepsilon}+$$
$$+\beta(S-S_{m,\varepsilon})]>0.$$

Portanto $S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon}$ diferente do vazio e portanto se $x\in S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon}$ tem-se

$$\|x_m-x_n\|\leqq\|x-x_m\|+\|x-x_n\|<2\varepsilon$$

o que prova ser $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy e seja $x_0=\lim x_n$. Vamos provar que $\varphi(f)=f(x_0)$ para todo $f\in\mathfrak{X}^*$.

Definindo $S_{0,\varepsilon}=\{x\in S;\|x-x_0\|<\varepsilon\}$, conclui-se que se x_n for tal que

$$\|x_n-x_0\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

então $S_{0,\varepsilon}\supset S_{n,\varepsilon/2}$, pois se $x\in S_{n,\varepsilon/2}$ vem $\|x-x_0\|\leqq\|x-x_n\|+\|x_n-x_0\|<\varepsilon$ e $x\in S_{0,\varepsilon}$. Portanto $S-S_{0,\varepsilon}\subset S-S_{n,\varepsilon/2}$ e para $n>n_{\varepsilon/2}$, pela (7), vem

$$0\leqq\beta(S-S_{0,\varepsilon})\leqq\beta(S-S_{n,\varepsilon/2})\leqq\frac{1}{n\,\delta_{\varepsilon/2}}$$

de onde resulta que

$$\beta(S-S_{0,\varepsilon})=0. \tag{8}$$

Consideremos, então, $\varphi(f)-f(x_0)$, onde f é uma qualquer forma linear de $\mathfrak{X}^*$. Tem-se

$$\varphi(f)-f(x_0)=\int_S f(x)\,d\beta(x)-$$
$$-\int_S f(x_0)\,d\beta(x)$$

pois $\beta(S)=1$. Sendo β não negativa, por (8) podemos escrever:

$$|\varphi(f)-f(x_0)|\leqq\int_S|f(x)-f(x_0)|\,d\beta(S)=$$
$$=\int_{S_{0,\varepsilon}}|f(x)-f(x_0)|\,d\beta(x)\leqq$$
$$\leqq\|f\|\int_{S_{0,\varepsilon}}\|x-x_0\|\,d\beta(x)<$$
$$<\|f\|\,\varepsilon\int_{S_{0,\varepsilon}}d\beta(x),\ \text{pois se}$$
$$x\in S_{0,\varepsilon},\ \|x-x_0\|<\varepsilon.$$

Logo

$$\|\varphi(f)-f(x_0)\|<\|f\|\,\beta(S_{0,\varepsilon})\,\varepsilon$$

para cada $\varepsilon>0$ que prova ser

$$\varphi(f)=f(x_0)$$

isto é, $\mathfrak{X}$ é reflexivo.

Anteriormente, veja o exemplo após a definição 1 deste parágrafo, provamos que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach uniformemente convexo. Resulta daí e do teorema 1, que todo espaço de Hilbert é como espaço de Banach reflexivo.