MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — (Cursos de Biológicas, Geológicas, Prof. Adjuntos) — 6-10-1961.

5378 — Dada a função $w = y^2 y^2 e^{x/2} + z^2 x^2 e^{y/2} + x^2 y^2 e^{z/2}$, calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$.

5379 — Determine os máximos e mínimos da função

$$z = x y^2 (3x + 6y - 2).$$

5380 — Efectue a condensação e determine a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

5381 — Faça a contagem e separação das raízes da equação

$$x^3 = 2x + 5$$

e calcule aproximadamente uma delas pelo método de Newton.

5382 — No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos qual a probabilidade de obter uma soma de pontos

a) Pelo menos igual a 3?

b) Maior do que 3?

5383 — Propriedades da distribuição normal. Num exame observaram-se os seguintes resultados:

40 °/₀ de notas inferiores a 10.
50 °/₀ de notas entre 10 e 15.
10 °/₀ de notas superiores a 15.

Admitindo que as notas seguem a distribuição normal, determine a média e o desvio padrão.

Enunciados dos n.os 5378 a 5383 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.ª Prova Prática de Informação — 29-5-1961.

I

5384 — 1) Estudar a função $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x-2)^2}$.

2) Desenvolver em série de potências inteiras de x a função

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

indicando o intervalo onde é válido o desenvolvimento.

3) Calcular

$$\lim_{x=\infty} \left(\cos\frac{a}{x} + m \operatorname{sen}\frac{a}{x}\right)^x.$$

R: 1. *a*) *Domínio* $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$.

b) *Ponto de intersecção com os eixos:* $P(0, 0)$.

c) *Não apresenta simetrias nem é periódica.*

d) *Extremos e intervalos de monotonia*

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3} \quad \begin{array}{l} f'(x) \geqslant 0 \ \textit{em}\ [6, +\infty[\ \textit{e}\ ]-\infty, 2[\\ f'(x) \leqslant 0 \ \textit{em}\ ]2, 6] \\ f'(x) = 0 \ \textit{para}\ x = 0 \ \textit{e}\ x = 6 \\ \textit{e apenas é extremante}\ x = 6 \\ \textit{(minimizante).} \end{array}$$

e) *Convexidade e concavidade*

$$f'(x) = \frac{48x}{(x-2)^4}$$

e assim $f(x)$ *é convexa em* $[0, +2[$ *e* $]2, +\infty[$ *e côncava em* $]-\infty, 0]$. *Em* $x = 0$ *tem um ponto de inflexão.*

f) *Assíntotas:*

Como $\lim\limits_{x=2} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = +\infty$ *existe a assíntota* $X = 2$;

$\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = \infty$: *não existem assíntotas paralelas* *ao eixo dos* y y . *Dado que* $f(x) = 2x + 8 + \dfrac{24x - 32}{(x-2)^2}$ *existe a assíntota oblíqua* $Y = 2X + 8$.

2. $$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{2n} \ \textit{para} \ |x| < 1.$$

Então $f(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *para* $|x| < 1$.

3. *É uma indeterminação da forma* 1^{∞}. *Calcule-se então*

$$\lim_{x=\infty} x \log \left(\cos \frac{a}{x} + m \operatorname{sen} \frac{a}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{\log \left(\cos \dfrac{a}{x} + m \operatorname{sen} \dfrac{a}{x} \right)}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{a}{x^2} \operatorname{sen} \dfrac{a}{x} - \dfrac{m a}{x^2} \cos \dfrac{a}{x}}{\cos \dfrac{a}{x} + m \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{a \operatorname{sen} \dfrac{a}{x} + m a \cos \dfrac{a}{x}}{\cos \dfrac{a}{x} + m \operatorname{sen} \dfrac{a}{x}} = m a$$

isto é, $\lim_{x=\infty} \left(\cos \dfrac{a}{x} + m \operatorname{sen} \dfrac{a}{x} \right)^x = e^{ma}$.

II

5385 — 1) Mostre que a função

$$F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

verifica a equação $F'_x + F'_y + F'_z = 0$ qualquer que seja F.

2) Calcular

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \, dx.$$

3) Determine os parâmetros reais a, b e c, por forma que o polinómio $f(z) = z^4 - 2z^3 + az^2 + bz + c$ tenha a raíz complexa i e uma raíz real dupla. Quais são as raízes de $f(z)$?

R: 1) *Fazendo* $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$, *vem* $F'_x = f'_u - f'_w$, $F'_y = -f'_u + f'_v$, $F'_z = -f'_v + f'_w$, *donde* $F'_x + F'_y + F'_z = 0$.

2) *Fazendo* $x = t^6$, *vem*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = 6 \int_0^1 \frac{t^6}{1+t^2} dt =$$

$$= 6 \int_0^1 \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6 \int_0^1 t^4 dt -$$

$$- 6 \int_0^1 t^2 dt + 6 \int_0^1 dt - 6 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{6}{5} [t^5]_0^1 - 2 [t^3]_0^1 + 6 [t]_0^1 - 6 [\operatorname{arctg} t]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5} - 2 + 6 - 6 \frac{\pi}{4} = \frac{26}{5} - \frac{3\pi}{2}.$$

3) *Se* $f(z)$ *tem a raiz* i *também tem a raiz* $-i$. *A fórmula de Girard* $\dfrac{p_1}{p_0} = \Sigma r_i$ *dá* $2 = i - i + r_1 + r_1 \Rightarrow r_1 = 1$. *Portanto,*

$$\begin{cases} f(i) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} (1 - a + c) + (2 + b) i = 0 \\ a + b + c - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 2 + b = 0 \\ a + b + c - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -2 \\ 1 - a + c = 0 \\ a + c - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

As raízes são $i, -i, 1$ (*dupla*).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 27-6-1961.

I

5386 — 1) Deduza a fórmula de Taylor para uma função de uma variável.

2) O polinómio $f(z) = 24z^5 + 34z^4 + 39z^3 + 36z^2 + 15z + 2$ tem raízes positivas? Porquê?

Calcule as suas raízes, sabendo que as raízes reais são racionais (não é necessário calcular os limites excedente e deficiente das raízes). Apresente a decomposição de $f(z)$ em factores primos.

R: 2) *As raízes racionais são da forma* p/q *em que* $p = \pm 1, \pm 2$ *e* $q = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. *Como* f (z) *não tem raizes positivas, as raízes racionais encontram-se entre os números:* $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, -2, -\frac{2}{3}$.

A aplicação das regras de exclusão de NEWTON *permite aproveitar apenas os números:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{2}{3}$. *A regra de* RUFFINI *indica, finalmente, que as raízes racionais são:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}$. *As outras duas raizes são imaginárias:* i *e* $-$i.

$$f(z) = 24\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)(z^2+1).$$

II

5387 — 3) Quando se diz que $F(x,y)$ é diferenciável em $P(a,b)$? Enuncie e demonstre uma condição suficiente de diferenciabilidade.

Mostre que a função $g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ é homogénea e verifique o teorema de EULER.

4) Mostre que toda a função contínua em $[a,b]$ é integrável no sentido de RIEMANN, nesse intervalo. Sendo $g(x)$ contínua em $[a,b]$, prove que $\int_a^b g(x)\,dx = g(c)(b-a)$ $(a \leqslant c \leqslant b)$.

R: 3) *A função é homogénea de grau zero pois* $g\left(\frac{tx+ty}{tx-ty}\right) = t^0 g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. *Como* $g'_x = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2}$ *e* $g'_y = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{2x}{(x-y)^2}$ *vem* $x\,g'_x + y\,g'_y = 0$, *que é a verificação do teorema de* EULER.

III

5388 — 5) Dada a tabela $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 1 & 0 & 1 & a \end{array}$, determine a por forma que o polinómio interpolador seja do terceiro grau.

Sem achar o polinómio interpolador, calcule $y(-2)$ e $y(4)$.

6) Defina base de um espaço vectorial e prove que em R^n qualquer conjunto de n vectores independentes constitue uma base.

Deduza a regra de CRAMER e utilize-a para resolver o sistema de n equações a n incógnitas $AX = A^j + A^k$ em que A^j e A^k são as colunas j e k da matriz A regular.

Utilize a teoria dos sistemas homogéneos para escrever as equações normais da recta $r \equiv \begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+z-1=0. \end{cases}$

Qual deverá ser o valor de a para que a recta seja perpendicular ao eixo Oy?

R: 5) *Construindo a tabela de diferenças vem*

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1	2	-1	0	2	$a-6$
0	1	-1	2	$a-4$	
1	0	1	$a-2$		
2	1	$a-1$			
3	a				

Para que o polinómio interpolador seja do terceiro grau é preciso que $\Delta^4 y(-1) = 0$, *ou seja* $a = 6$.

Para $a = 6$ *vem* $y(4) = 6+5+4+2 = 17$ *e* $y(-2) = 1$.

6) *A solução do sistema* $AX = A^j + A^k$ *é o vector* X' *de componentes* $x'_r = 0$ $(r \neq j, k)$, $x' = 1$, $x'_k = 1$.

Para escrever as equações normais de r *escolha-se uma solução do sistema, por exemplo* $(0, -1, 1)$ *e escreva-se o sistema na forma* $\begin{cases} ax + (y+1) + (z-1) = 0 \\ x + (z-1) = 0 \end{cases}$ *(sistema homogéneo).*

Para tal sistema é $\dfrac{x}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{y+1}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{z-1}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$ *ou* $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1-a} = \frac{z-1}{-1}$, *que são as equações normais de* r.

Para que $r \perp Oy$ *deverá ser* $1-a=0$ *ou* $a=1$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência extraordinário — 30-6-1961.

I

5389 — 1) Mostre que $f(x)$ se desenvolve pela série de TAYLOR em qualquer intervalo $[a, a \pm k]$ onde as suas derivadas sejam globalmente limitadas. Prove também que toda a série inteira em x é série de MAC LAURIN da sua própria soma.

2) Prove que é condição necessária e suficiente para que a seja zero de ordem n de $g(x)$ que esta função se possa escrever na forma $g(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, sendo $\varphi(x)$ uma função contínua que não se anula para $x = a$.

Separe os zeros do polinómio $2x^3-15x^2+36x+1$, utilizando a sucessão de ROLLE.

R: 2) *Utilizando o método de* NEWTON, *fàcilmente se calculam os limites excedente e deficiente das raízes do polinómio:* $L=3$ *e* $l=-1$. *Os zeros da primeira derivada são* $x'_1=2$ *e* $x'_2=3$ *e, construindo a sucessão de* ROLLE $\left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & 3 \\ \hline - & + & + \end{array}\right|$, *verifica-se que existe um zero do polinómio em* $[-1,2]$.

II

5390 — 3) Diga em que condições a equação $F(x,y)=0$ define uma função implícita $y(x)$ na vizinhança de $P(a,b)$. Utilize a regra de derivação das funções compostas para deduzir a expressão de $y'(x)$ e $y''(x)$.

4) Deduza a desigualdade de SCHWARTZ e a fórmula fundamental do cálculo integral. Utilize esta para calcular $\int_1^2 x^2 \log^2 x\,dx$.

R: 4)

$$\int_1^2 x^2 \log^2 x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 x^2 \log x\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx\right\} =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\int_1^2 x^2\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$
$$= \frac{8}{3}\log^2 2 - \frac{16}{9}\log 2 + \frac{14}{27}$$

III

5391 — 5) Dados os pares de valores (x_i, y_i), $(i=0,1,\cdots n)$, em que os valores de x estão em progressão aritmética, diga como procede para fazer uma interpolação com a fórmula de LAGRANGE, supondo que dispõe de tabelas de coeficientes Lagrangianos (não efectue demonstrações).

6) Quando se diz que p filas paralelas de uma matriz são independentes? Se, numa dada matriz, o número máximo de linhas independentes é r e o número máximo de colunas independentes é s prove que $r=s$.

Qual é o valor dos menores de ordem superior a r numa matriz de característica r? Porquê?

Considere o sistema possível $AX=B$ e seja X_0 uma solução. Prove que todas as soluções deste sistema são da forma $X=X_0+Y$ em que Y é solução de $AY=0$.

Discuta o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x-y+z&=1\\ 3x+y+3z&=a\\ 5x+3y+5z&=5 \end{aligned}$$

por meio da teoria dos determinantes. Interprete geomètricamente a discussão.

R: 6) *A matriz do sistema é* $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\3&1&3\\5&3&5\end{bmatrix}$

e é fácil ver que $\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$ *é determinante principal. Construindo os determinantes característicos*

$$\Delta'_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\3&1&a\end{vmatrix}=6-2a \quad e \quad \Delta'_4=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\5&3&5\end{vmatrix}=0$$

o sistema proposto será possível quando $6-2a=0$ *ou* $a=3$ *e impossível quando* $a\neq 3$.

A interpretação geométrica e simples. Quando o sistema é possível os planos representados pelas 3.ª e 4.ª equações passam pela recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\x-y+z=1\end{cases}$. *Quando o sistema é impossível, o plano representado pela 3.ª equação é paralelo à recta* r *e o plano representado pela 4.ª equação passa por* r.

I. S. C. E. F. – MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova Prática — 12-7-61.

5392 — 1) Estude a natureza da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

R: *Como* $\lim_{n=\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{x^{n+1}}\log\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{x^n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right|=\dfrac{1}{|x|}$,

a série é absolutamente convergente quando $|x|>1$ *e divergente quando* $|x|<1$. Para $x=1$ *tem-se a série* $\sum_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *que é divergente, e para* $y=-1$ *vem a série alternada decrescente* $\sum(-1)^n$

$log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *portanto convergente. A série é uniformemente convergente em* $]-\infty,-1]$ e $[r,+\infty[$ $(r>1)$.

2) Dada a função $f(x) = e^{ax}\log(e+x)$, calcule a por forma que $f(x)$ tenha um extremo para $x=0$. Indique a natureza desse extremo.

Averigue se a imagem de $f(x)$ admite assíntotas.

R: *Como* $f'(x) = e^{ax}\left[a\,log(e+x) + \frac{1}{e+x}\right]$, *a condição* $f'(0)=0$ *implica* $a=-1/e$. *Calculando* $f''(x)$, *vem* $f''(0)<0$, *o que indica que* $x=0$ *é um maximizante.*

$$\lim_{x=-e} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = \lim_{x=+\infty}\frac{log(e+x)}{e^{\frac{1}{e}x}} =$$

$$= \lim_{x=+\infty} e\,\frac{e^{-\frac{1}{e}x}}{e+x} = 0:\ X=-e \ \text{ e } \ Y=0 \ \textit{são pois}$$

assíntotas. Não há assíntotas obliquas.

3) Calcule $P\,x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

R:
$$P\,x\,log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = P\,x\,log(x-1) -$$
$$- P\,x\,log(x+1) = \frac{x^2}{2}log(x-1) - \frac{1}{2}P\frac{x^2}{x-1} -$$
$$-\frac{x^2}{2}log(x+1) + \frac{1}{2}P\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{2}log(x-1) -$$
$$-\frac{1}{2}P\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x^2}{2}log(x+1) +$$
$$+\frac{1}{2}P\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2}{2}log(x-1) -$$
$$-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}log(x-1) - \frac{x^2}{2}log(x+1) +$$
$$+\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}log(x+1) = \frac{x^2}{2}log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) +$$
$$+ log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x.$$

4) Sendo $z = F(x,y)$, considere as funções $u = g(z)$ e $v = h(z)$ e prove que:

a) $$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

sabendo que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

R: *a)* $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{du}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dv}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$
$$= \left(\frac{du}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{dv}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

e, como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},$$

resulta a igualdade, atendendo também à alínea a).

5) Mostre que os vectores

$$A_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes. Determine a forma geral dos números que satisfazem à igualdade $l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3 + l_4 A_4 = 0$.

R: *Se os vectores são linearmente dependentes, ter-se-á de verificar a relação* $l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3 + l_4 A_4 = 0$ *em que* l_1, l_2, l_3, l_4 *são constantes não conjuntamente nulas.*

Aquela condição equivale a dizer que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} l_1 \quad\quad + l_3 - l_4 &= 0\\ l_3 \quad\quad &= 0\\ l_1 + l_2 + l_3 \quad &= 0\\ l_2 \quad\quad + l_4 &= 0\end{aligned}$$

terá de possuir soluções não nulas. Com efeito,

$$\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix} = 0$$

e por conseguinte o sistema tem soluções não nulas. Como $\Delta = \begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$, *o sistema e simplesmente indeterminado e as suas soluções são proporcionais. Acha-se fàcilmente uma solução não nula tomando os complementos algébricos de* l_1, l_2, l_3 e l_4 *em*

$$D = \begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\l_1&l_2&l_3&l_4\end{vmatrix}.$$ *A forma geral das soluções é*

$$\frac{l_1}{-\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=\frac{l_2}{\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{l_3}{-\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=\frac{l_4}{\Delta}=\alpha$$

ou

$$\frac{l_1}{-1}=\frac{l_2}{1}=\frac{l_3}{0}=\frac{l_4}{-1}=\alpha$$

ou ainda

$$\begin{cases}l_1=-\alpha\\ l_2=\alpha\\ l_3=0\\ l^4=-\alpha\end{cases}.$$

6) Dada a recta $r\equiv\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, calcule os seus cosenos directores e escreva a equação do plano que passa por r e corta o eixo $0x$ em $(2,0,0)$.

R: *cos* $\alpha,\beta,\gamma=\pm\dfrac{0,1,2}{\sqrt{5}}$.

Como $r\equiv\begin{cases}x-1=0\\2y-z-1=0\end{cases}$, *será* $\alpha(x-1)+$ $+\beta(2y-z-1)=0$ *a equação do feixe de planos que passa por* r. *Fazendo* $m=\dfrac{\alpha}{\beta}$, *vem* $x+2my-$ $-mz-m-1=0$ *e a equação axial é* $\dfrac{x}{m+1}+$ $+\dfrac{2m}{m+1}y-\dfrac{m}{m+1}z=1$. *Como o plano pedido deverá passar por* $(2,0,0)$, *terá de ser* $m+1=2$ *ou* $m=1:\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova Prática — 15-7-1961.

5393 1) Dada a curva $y=\dfrac{a\,x+b\,x^2+c\,x^3}{1+2x-x^2}$, determine a, b e c por forma que a assíntota oblíqua seja a recta $X+Y-1=0$ e a tangente na origem seja $2X-Y=0$.

R: *Como* $\dfrac{a\,x+b\,x^2+c\,x^3}{1+2x-x^2}=-c\,x-(b+2c)+$ $+\varphi(x)$, *com* $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=0$, *a assíntota oblíqua é* $Y=-cX-(b+2c)$, *isto é*, $c=1$ *e* $b=-3$. *Então* $y=\dfrac{a\,x-3x^2+x^3}{1+2x-x^2}$ *e* $y'(0)=2$, *o que dá* $a=2$.

2) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin da função $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$, determinando o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

Calcule $P\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$.

R: $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{a_0+a_1(x-1)}{(x-1)^2}+\dfrac{b_0}{x-2}=$ $=-\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$.

Cálculo de a_0 *e* a_1: *fazendo* $x-1=t$, *vem* $R_1(x)=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{2+t}{-1+t}=-2-3t+\cdots$ *e* $a_0=$ $=-2,a_1=-3$.

Cálculo de b_0: $b_0=R_2(2)=\left[\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right]_{x=2}=3$.

Ora $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_0^\infty x^n$ *para* $|x|<1$ *e portanto*

$$-\frac{2}{(x-1)^2}=-2\left(\frac{1}{1-x}\right)'=$$
$$=-2\sum_1^\infty n\,x^{n-1}\ \textit{também para}\ |x|<1;$$
$$-\frac{3}{x-1}=\frac{3}{1-x}=3\sum_0^\infty x^n\ \textit{para}\ |x|<1;$$
$$\frac{3}{x-2}=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{3}{2}\sum_0^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^n\ \textit{para}\ |x|<2;$$

Então $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\sum\limits_0^\infty\left(1-2n-\dfrac{3}{2^{n+1}}\right)x^n$, *para* $|x|<1$.

$$P\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=-2P\frac{1}{(x-1)^2}-3P\frac{1}{x-1}+3P\frac{1}{x-2}=$$
$$=\frac{2}{x-1}+3\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

3) Prove que a função $z=x\,f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisfaz, quaisquer que sejam as funções f e g, à relação

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

R.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} - g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3} + \frac{y^2}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\cdot f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fazendo as operações indicadas no primeiro membro da igualdade, obtem-se 0.

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix}$, determine p por forma que o sistema homogéneo $A\,X = 0$ seja indeterminado. Ache nesse caso um sistema fundamental de soluções.

R.: *Para que o sistema* $A\,X = 0$ *seja indeterminado é preciso que a característica de* A *seja menor do que três.*

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *e* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *deverá ser*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } p = 2.$$

O sistema é simplesmente indeterminado e o sistema fundamental de soluções é constituído apenas por uma solução que se obtém fàcilmente tomando os complementos algébricos de x_1, x_2 e x_3 *no determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha. \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

5) Decomponha em quadrados a forma

$$x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3.$$

R.:

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	-1	0	$\rightarrow x_1 - x_2$
x_2	-1	0	-1	
x_3	0	-1	0	

	x_2	x_8	
x_2	-1	-1	$\rightarrow -x_2 - x_8$
x_3	-1	0	

	x_3	
x_3	-1	$\rightarrow -x_3$

$$x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3 = (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2.$$

6) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,0,0)$ e é perpendicular à recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

R.: *O feixe de planos que passa por* $P(1,0,0)$ *é* $A(x-1) + B\,y + C\,z = 0$ *e os parâmetros directores de* r *são* $h = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ *e* $l = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. *Ter-se-á de verificar a condição*

$$\frac{A}{-1} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{1},$$ *o que conduz à equação do plano:* $x + y - z - 1 = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — 2/10/1961.

Prova prática

3594 — 1) Calcule $\lim\limits_{x=+0}(\operatorname{cosec} x + \log x)$.

R.: $\lim\limits_{x=+0}(\operatorname{cosec} x + \log x) = \lim\limits_{x=+0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \log x\right) = \lim\limits_{x=+0}\frac{1 + \operatorname{sen} x \log x}{\operatorname{sen} x}$.

Como $\lim\limits_{x=+0}\operatorname{sen} x \log x = \lim\limits_{x=+0}\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x} =$

$$= \lim_{x=+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} = \lim_{x=+0} -\frac{\operatorname{sen} x}{\frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x} = 0, \text{ vem}$$

$\lim_{x=+0} (\operatorname{cosec} x + \log x) = +\infty$.

5395 — 2) Estude a função assim definida

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & (x<0) \\ 1 & (x=0) \\ \dfrac{x^2}{x-1} & (x>0) \end{cases}$$

Faça a representação geométrica de $f(x)$.

R.: a) *Domínio* $]-\infty, 1[, \ ]1, +\infty[$. *Pontos de descontinuidade:* $x=0$ *e* $x=1$.

b) *Não apresenta simetrias nem periodicidade.*

c) *Intervalos de monotonia; extremos.*

Como o comportamento da função em $]-\infty, 0]$ *é bem conhecido, basta ver o que se passa em* $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \qquad \begin{array}{l} f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \\ f'(x)>0 \Rightarrow x>2 \\ f'(x)<0 \Rightarrow x<2 \end{array}$$

Portanto, $f(x)$ *é decrescente em* $]0,1[$ *e* $]1,2[$, *tem um mínimo no ponto* $m(2,4)$ *e é crescente em* $]2,+\infty[$.

d) *Convexidade* $(x>0)$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad \begin{array}{l} f''(x)>0 \Rightarrow x>1 \\ f''(x)<0 \Rightarrow x<1 \end{array}$$

A função é convexa em $]1,+\infty[$ *e côncava em* $]0,1[$.

e) *Assíntotas.*

Como $\lim_{x=1} f(x) = \infty$ *existe a assíntota* $X=1$ *paralela ao eixo* Oy. *Existe também a assíntota oblíqua* $Y=X+1$ *pois* $f(x) = x+1+\frac{1}{x-1}$ *e* $\lim_{x=\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

5396 — 3) Calcule $P\dfrac{1}{2+\cos x}$.

R.: *Fazendo* $tg\frac{x}{2} = t$ *vem* $P\dfrac{1}{2+\cos x} =$

$$= 2P\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 2P\frac{1}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} P \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

5397 — 4) A função $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(0,0)=0$ é contínua no ponto $P(0,0)$? Porquê? Calcule $g'_x(0,0)$ e $g'_y(0,0)$.

R.: *Calculemos* $\lim_{\substack{x=0\\y=0}} g(x,y)$ *segundo a direcção da recta* $y=\alpha x$:

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} g(x,y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2+\alpha^2 x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{x+\alpha^2 x} = \infty.$$

Segundo a direcção da parábola $y^2=x$:

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} g(x,y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Assim se vê que não existe $\lim_{\substack{x=0\\y=0}} g(x,y)$ *e portanto* $g(x,y)$ *não é contínua em* $P(0,0)$.

$$g'_x(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{x} = +\infty$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{y=0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y=0} \frac{0}{y} = 0.$$

5398 — 5) Como se sabe, para uma tabela de três pares de valores $\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$ a fórmula interpoladora de Lagrange é $I(x) = \sum_{i=0}^{2} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} y_i$

$$\left[\varphi(x) = \prod_{i=0}^{2} (x-x_i) \ \text{ e } \ \varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x-x_i} \right].$$

a) Sabendo que $\varphi_0(x_0)=6$, $\varphi_1(x_1)=-2$, $\varphi_2(x_2)=3$ e que $-7\varphi_0(x)+9\varphi_1(x)-2\varphi_2(x) = 12x-18$, ache os valores de x_0, x_1 e x_2.

b) Supondo que o polinómio interpolador é do primeiro grau e que se verificam as relações $y_0+y_1+y_2 = -11$ e $y_2-y_1=2$, determine os valores de y_0, y_1 e y_2. Escreva o polinómio interpolador.

R.: a)

$$\begin{array}{l} -7\varphi_0(x_0) = 12x_0 - 18 \\ -42 = 12x_0 - 18 \Rightarrow x_0 = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9\varphi_1(x_1) = 12x_1 - 18 \\ -18 = 12x_1 - 18 \Rightarrow x_1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2\varphi_2(x_2) = 12x_2 - 18 \\ -6 = 12x_2 - 18 \Rightarrow x_2 = 1 \end{array}$$

b) $\varphi_0(x) = x(x-1) = x^2 - x$

$\varphi_1(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$

$\varphi_2(x) = (x+2)x = x^2 + 2x$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6} y_0 + \frac{x^2 + x - 2}{-2} y_1 + \frac{x^2 + 2x}{3} y_2$$

e, como é do primeiro grau, terá de ser

$$\frac{1}{6} y_0 - \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{3} y_2 = 0 .$$

Esta equação, juntamente com as duas relações dadas, conduz ao sistema
$$\begin{cases} y_0 - 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_0 + y_1 + y_2 = -11 \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$$
cuja solução é
$$\begin{cases} y_0 = -7 \\ y_1 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6}(-7) + \frac{x^2 + x - 2}{-2}(-3) + \\ + \frac{x^2 + 2x}{3}(-1) = 2x - 3 .$$

5399 — 6) Utilize a teoria dos determinantes para estudar a posição relativa dos planos $\pi_1 \equiv x - y - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z - 1 = 0$, $\pi_3 \equiv x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_4 = y + z = 0$.

Escreva a equação da recta r que passa pela origem e se apoia na recta $s \equiv \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$ sabendo que $r \perp s$.

R.: *A característica da matriz do sistema*
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$
é $r = 2$. *Com efeito, da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

o determinante de maior ordem significativo que dela se pode extrair é $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ *(determinante principal).*

Os determinantes característicos $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

e $\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *são ambos nulos e por isso o sistema é indeterminado de grau* 1.

Geomètricamente significa que os planos π_3 *e* π_4 *passam pela recta definida por* π_1 *e* π_2.

O problema de geometria analítica pode resolver-se do seguinte modo: conduz-se pela origem o plano $\pi \perp s$, *acha-se a intersecção* P *do plano* π *com a recta* s *e depois escreve-se a equação da recta* OP.

A recta s *tem os parâmetros directores* $h = -1$, $k = -1$ *e* $l = 1$; *o plano* π *é* $Ax + By + Cz = 0$ *tal que* $\frac{A}{h} = \frac{B}{k} = \frac{C}{l}$, *isto é,* $\pi \equiv x + y - z = 0$.

A intersecção P *determina-se resolvendo o sistema*
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
cuja solução é $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *A recta* r *é então*

$$r \equiv \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{-\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad ou \quad r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} .$$

Enunciados e soluções dos n.os 5384 a 5399 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 20-7-1961.

5400 — Seja π_1 o plano determinado por $A(1,0,0)$, $B(0,1,2)$ e $C(0,0,1)$ e π_2 o plano que intersecta a parte positiva dos eixos coordenados a distâncias da origem iguais a 1.

Conduza pelo ponto $P(1,1,1)$ uma recta paralela à intersecção dos planos π_1 e π_2.

5401 — É dado um triângulo isósceles de base 20 e altura 8 cm. De todos os paralelogramos inscritos neste triângulo com um dos lados assente na base do triângulo e os ângulos agudos iguais a $\operatorname{ang\,tg} \frac{4}{3}$, quais as dimensões do de área máxima?

5402 — Primitive as funções

$$a)\ x \sec^2 x \, ; \quad b)\ \frac{2x^3 + x^2 + 6x + 1}{2x^3 - x^2 + 4x - 2} .$$

5403 — Sejam $OXYZ$ e $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ dois sistemas de referência não necessàriamente triortogonais, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ respectivamente, relacionados pela igualdade matricial

$$[\hat{\mathbf{e}}_1\ \hat{\mathbf{e}}_2\ \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]\, T$$

a) Qual a relação entre as matrizes colunas X e $\hat{X}$ que representam um mesmo vector $\mathbf{x}$ de $\mathcal{R}^3$ nos dois sistemas de referência?

b) Se for G a matriz de elemento genérico $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j})$ [matriz da métrica relativa ao sistema de referência $OXYZ$] e $\hat{G}$ a correspondente matriz para $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, qual a expressão matricial do produto interno de dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ num e noutro dos sistemas de referência?

Aproveite a igualdade das duas expressões do produto interno para concluir que $\hat{G} = T^T G\, T$.

c) Se for $P^T \mathcal{Q}\, P + 2\, \mathrm{A}^T P + a_{44} = 0$ a equação de uma superfície de 2.ª ordem no primeiro sistema, qual a forma que toma a equação da mesma superfície no segundo sistema de referência?

Mostre que nesta transformação de coordenadas a matriz $G^{-1}\mathcal{Q}$ dá lugar a outra semelhante e que o polinómio $|G^{-1}\mathcal{Q} - \lambda I|$ é invariante, o mesmo acontecendo a $c\,(G^{-1}\mathcal{Q})$, $Tr\,(G^{-1}\mathcal{Q})$, $Tr\,\mathrm{adj}\,(G^{-1}\mathcal{Q})$ e $|G^{-1}\mathcal{Q}|$.

d) Se em vez de uma quádrica se tratar de uma cónica do plano XOY, deduza a forma que tomam os invariantes anteriores em função do ângulo θ que formam entre si os dois eixos coordenados.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame Final — 14-10-1961.

5404 — *a*) Verifique que a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio racional e dois irracionais.

b) Dados os vectores

$$\overline{a} = [1 \;\; -y \;\; z]$$
$$\overline{b} = [x \;\; 1 \;\; 0]$$

determine x, y e z de modo que $\overline{b}$ seja vector próprio da matriz correspondente ao valor próprio racional e os vectores $\overline{a}$ e $\overline{b}$ definam um rectângulo de área 6.

5405 — Uma função $T(x)$ está definida da seguinte forma:

$$T(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 10 \\ 0 & \text{para} \quad 10 < x < 11 \\ -2 & \text{para} \quad 11 < x \leqslant 12 \end{cases}.$$

Determine a partir dela uma função contínua $M(x)$ que satisfaça às relações $\dfrac{dM}{dx} = T(x)$ e $M(0) = 12$.

Represente gràficamente as duas funções em dois sistemas de referência com o mesmo eixo de ordenadas e eixos das abcissas paralelos e indique como a partir da função dada se pode estudar o crescimento e os máximos e mínimos da função $M(x)$.

5406 — Calcule

a) $P\, e^{2x} \cdot \cos 3x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

5407 — Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x(x+y)} & \text{para } x(x+y) \neq 0 \\ 0 & \text{para } x(x+y) = 0 \end{cases}.$$

a) Estude a sua continuidade na origem.

b) Verifique se aí admite derivadas parciais.

c) Investigue a existência de alguma direcção ao longo da qual exista derivada dirigida na origem e indique o seu valor.

Enunciados dos n.^{os} 5400 a 5407 de F. R. Dias Agudo

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 1.ª chamada.

I

Parte Teórica

5408 — 1) $\mathfrak{G}$ é um grupo multiplicativo; que entende por ordem de um elemento $a \in \mathfrak{G}$?

Se os elementos $a_i \in \mathfrak{G}$ têm ordem n_i, com $i = 1, 2, \cdots, k$, qual é a ordem do elemento $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$?

5409 — 2) Seja $\mathfrak{A}$ um anel. Suponha que em $\mathfrak{A}$ semi-grupo em relação ao produto, existe inverso a^{-1} de qualquer elemento $a \neq 0$. Prove que $\mathfrak{A}$ é então um corpo — S.

5410 — 3) Considere o grupo das raízes índice n

da unidade e seja

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$$

a sua decomposição em factores primos. Indique os sub-grupos do grupo considerado e os respectivos índices.

II

Parte Prática

5411 — 1) Considere o grupo $\mathfrak{S}$ das permutações de ordem n e a aplicação de $\mathfrak{S}$ no grupo aditivo abeliano constituído pelos números 0 e 1 (a operação é a adição aritmética quando ao menos um dos números é zero e ainda $1 + 1 = 0$).

Como se chama a aplicação assim definida? Justifique.

5412 — 2) Considere o conjunto $\mathfrak{A}$ de elementos $a, b, \cdots$, cada um deles definido por três números reais; por exemplo,

$$a \equiv (x_1, x_2, x_3);$$

sendo

$$b \equiv (y_1, y_2, y_3),$$

defina-se $a + b$ por

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Mostre que $\mathfrak{A}$ é grupo aditivo abeliano. Justifique.

5413 — 3) Constituirão os polinómios de coeficientes reais um anel? No caso afirmativo:

a) Terá o anel elemento unidade?

b) Terá o anel divisores próprios de zero?

c) Será o anel comutativo?

Justifique as respostas.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 2.ª chamada.

I

Parte Teórica

5414 — 1) Dê a definição de grupo cíclico em notação aditiva. Defina elemento primitivo nesse caso. Se $k \cdot a$ é elemento primitivo e m a ordem do grupo, que relação existe entre k e m?

5415 — 2) Com fundamento nos postulados da definição de um corpo — S poderá assegurar a solução das equações

$$a \cdot x + b = c$$
$$y \cdot a + b = c.$$

Justifique.

5416 — 3) Seja $\mathfrak{G}$ um grupo aditivo e seja $\mathfrak{g}$ um dos seus sub-grupos. Como define classes laterais (à esquerda e à direita) neste, relativamente a $\mathfrak{g}$.

Prove que se estas classes laterais coincidem, o sub-grupo é normal.

II

Parte Prática

5417 — 1) Decomponha a permutação

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

no produto dum número mínimo de transposições.

5418 — 2) Os números $+1$ e -1 constituem um grupo relativamente à multiplicação. Mostre que este grupo é imagem homomorfa do grupo aditivo dos inteiros. Poderá estabelecer um homomorfismo entre aquele grupo e o grupo multiplicativo do conjunto dos números reais, uma vez deste excluído o zero?

5419 — 3) Considere o conjunto das matrizes diagonais de 3.ª ordem. Terá este conjunto estrutura de anel? Justifique completamente a resposta.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Maio 1961.

I

Parte Teórica

5420 — 1) Estabeleça uma condição para que o produto de duas matrizes seja permutável quando elas são simétricas.

5421 — 2) Sejam: E espaço vectorial complexo de n dimensões $A \in (E \rightarrow E)$ e $e_1, e_2, \cdots, e_n$ uma base de E.

a) Supondo que

$$A\,e_1 = \cdots = A\,e_k = \Theta \qquad 1 < h < n$$

e que para $k \geqslant h + 1$, $A\,e_k$ é uma combinação linear de $e_{h+1}, \cdots, e_n$, escreva uma matriz que represente A naquela base. Qual a dimensão do espaço nulo do operador A?

b) Nas mesmas condições que relação existe entre os valores próprios de A e os da restricção de A no espaço de base

$$e_{h+1}, \cdots, e_n?$$

5422 — 3) Seja E o espaço vectorial dos números complexos sobre o corpo Ω dos números reais. Mostre que a transformação

$$x \to \bar{x} \quad \text{(conjugado de } x)$$

é linear e determine a sua matriz relativamente à base $1, i$.

II

Parte Prática

5423 — 1) Seja E o espaço vectorial real com 3 dimensões, considerado em Geometria Analítica com base e_1, e_2, e_3 (vectores unitários do sistema de eixos tri-rectangulares). Escreva a matriz que corresponde ao operador e que determina uma rotação de 30° em torno de e_3 e no sentido de e_1 para e_2.

Determine os valores próprios desse operador.

5424 — 2) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

determine o seu polinómio característico, a sua matriz adjunta e a sua inversa.

5425 — 3) Escreva a associada da matriz de transformação de

$$e_1^* = e_1$$
$$e_k^* = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \cdots + \alpha_{(n-1)k} e_{n-1} + e_n \; (2 \leqslant k \leqslant n).$$

Qual a matriz da transformação inversa?

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.° exame de frequência — 2.ª chamada — 31/5/61.

I

Parte Teórica

5426 — 1) Se $\mathcal{A}$ é matriz simétrica e $\mathcal{B}$ anti-simétrica, de que natureza é a matriz $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$? Justifique.

5427 — 2) *a)* Considerem-se os operadores lineares A e B sobre o espaço vectorial E (no corpo Ω) e admita que eles têm um vector próprio comum x, mas correspondente a diferentes valores próprios. Será x vector próprio de uma combinação linear de A e B, com coeficientes em Ω?

b) Seja $\mathcal{A}$ uma matriz quadrada de ordem n com valores próprios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Quais são os valores próprios de $\alpha A + \beta I$ (α e β complexos quaisquer)?

5428 — 3) Seja $A \in (E \to E_1)$ com E e E_1 espaços vectoriais. Mostre que: vectores linearmente dependentes são transformados em vectores com a mesma propriedade.

II

Parte Prática

5429 — 1) Num espaço de dimensão $n = 2k$ e x_i, x_i' $(i = 1, \cdots, k)$ uma base. Escreva a matriz que corresponde à transformação definida por

$$A x_i = \alpha_i x_i + \beta_i x_i'$$
$$A x_i' = -\beta_i x_i + \alpha_i x_i'.$$

Qual a matriz que corresponde à transformação inversa?

5430 — 2) Calcule a matriz adjunta e a matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5431 — 3) Calcular as raízes características e os vectores próprios da matriz de 4.ª ordem cujos elementos são todos iguais a 1.

Indicar uma base para cada sub-espaço próprio.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

Enunciados dos n.os 5408 a 5431 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Prova escrita do exame final — Julho de 1961.

(Responda apenas a uma questão de cada grupo).

I

5432 — 1) Determinar as equações vectoriais da tangente, do plano normal, do plano osculador e da binormal no ponto da linha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

em que $x = 1$.

II

5433 — 1) Desenvolver em série de Fourier no intervalo $[-\pi, +\pi]$ a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}.$$

III

5434 – 1) Calcular $\iiint_{(v)} (x^2 + y^2)\, d v$ sendo (v) o volume limitado pelo plano XOY e pela semi-superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$.

2) Determinar o volume da parte da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

que é interior à superfície cónica

$$z^2 = x^3 + y^2.$$

IV

5435 — 1 — *a*) Quando é que se diz que a equação

$$P(x, y)\, d x + Q(x, y)\, d y = 0$$

é uma diferencial exacta?

b) Mostrar que $\frac{1}{y^2}$ é um factor integrante para a equação

$$3 x^2 y^3\, d x + (x^3 y^2 + 2 y + 1)\, d y = 0$$

e determinar o seu integral geral.

V

5436 – 1) Dada a equação

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 5 \frac{d y}{d x} + 6 y = x e^x$$

mudar a variável (dependente) y para a variável z por forma que $y = z e^x$.

Determinar a solução geral da equação dada e a solução particular y_1 que verifica as condições $y_1(0) = y_1'(0) = 0$.

Enunciados dos n.os 5432 a 5436 de A. César de Freitas

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **1.ª frequência, 1.ª chamada — (Janeiro 1961).**

5437 – 1) Dados um ponto P do plano vertical de projecção, uma recta qualquer r e uma recta s do 2.º bissector, conduzir por P a recta perpendicular a r que se apoia em s.

5438 – 2) Dadas 2 rectas enviesadas, sendo uma delas vertical e a outra qualquer, determinar o ângulo que elas definem.

5439 — 3) Dados um plano qualquer pelos traços, um plano de nível de cota 3 e uma recta r que não pertence a nenhum dos planos, determinar:

a) a intersecção dos planos

b) os pontos de r que são equidistantes dos planos dados.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. C. — Cálculo das Probabilidades — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 8-3-1960.**

I

Parte Teórica

5440 — 1) Enuncie e demonstre o teorema da possibilidade composta para uma classe dupla em probabilidade descontínua.

5441 – 2) Enuncie a lei binomial no problema das provas repetidas. Generalize o enunciado.

5442 – 3) Em Probabilidade contínua defina probabilidade no caso de lançamentos em regiões ilimitadas. Enuncie um teorema relativo a esse caso e faça a aplicação a um exemplo.

II

Parte Prática

5443 – 1) Num baralho de 40 cartas tiram-se à sorte sucessivamente e sem reposição 5 cartas. Calcular a probabilidade de saída de:

a) um só ás;

b) um ás pelo menos;

c) 3 cartas de um mesmo naipe e 2 de outro;

d) uma copa na última tiragem, sabendo que nas anteriores só saiu uma. Justifique sumàriamente.

5444 – 2) Duma urna com 10 esferas, sendo 6 brancas e 4 pretas, tiram-se à sorte, simultâneamente, 2 esferas que saiem da mesma côr. Qual a probabilidade de, em nova tiragem de 2 esferas, de entre as 8 restantes, voltar a saír esfera da mesma côr das duas primeiras?

5445 – 3) Sobre os catetos dum triângulo rectângulo $[O\,A\,B]$ lançem-se à sorte 2 pontos M e N, um em cada cateto. A recta aleatória $M\,N$ divide o triângulo em 2 regiões: um triângulo rectângulo e um quadrilátero. Calcule a probabilidade de, em novo lançamento de um ponto Q, este caír no quadrilátero.

Enunciados dos n.os 5437 a 5445 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

ASTRONOMIA

F. C. L. — Astronomia — Exame Final — 1.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5446 — 1) Os valores da paralaxe heliocêntrica de Marte aparecem nas efemérides astronómicas? Porquê?

5447 — 2) A expressão usualmente utilizada na correcção do semi-diâmetro

$$s_1'' = s''\,(1 + \pi \operatorname{sen} 1'' \cos z)$$

inclui termos de 2.ª ordem? Justifique a resposta.

5448 – 3) A expressão analítica que nos permite determinar a precessão planetária inclui termos periódicos? Porquê?

5449 – 4) Todas as estrelas da nossa galáxia podem emitir energia em virtude dos fenómenos de contracção gravitacional? Justifique a resposta.

5450 — 5) A denominada lei da massa-luminosidade aplica-se a todas as estrelas situadas até 100 parsecs do Sol? Porquê?

5451 – 6) As estrelas novae têm uma posição determinada no diagrama Hertzsprung-Russell? Justifique a resposta.

Prática

5452 — Calcule o tempo médio do ocaso do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = +\,65^\circ\ \ 34'\ \ 54'' \\ \lambda = -\,7^h\ \ 39^m\ \ 17^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Junho 22.

(Precisão do problema $0^m.1$).

F. C. L. — Astronomia — Exame Final — 2.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5453 — 1) O fenómeno da aberração da luz proveniente de Júpiter varia no decurso do ano? Justifique a resposta.

5454 — 2) A partir da expressão da influência, na ascensão recta, da precessão luni-solar em um ano

$$d\,\alpha = \theta\,(\cos \varepsilon + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} \alpha)$$

justifique se um erro $d\,\delta$ no valor da declinação tem importância no valor da ascensão recta.

5455 – 3) Do ponto de vista teórico, poderão existir estrelas sem movimento próprio? Justifique a resposta.

5456 – 4) O aparecimento, na esfera celeste, das estrelas novas é um fenómeno frequente? Porquê?

5457 – 5) As estrelas sub-gigantes são muito numerosas na nossa galáxia? Justifique a resposta.

5458 – 6) Uma galáxia espiral com barra apresenta substracto? Justifique a resposta.

Prática

5459 – Calcule o tempo legal do nascimento do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = -\,71^\circ\ \ 58'\ \ 43'' \\ \lambda = +\,8^h\ \ 35^m\ \ 08^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Setembro 24.

(Precisão do problema $0^m.1$).

Enunciados dos n.os 5446 a 5459 de Raimundo Vicente

F. C. C. — ASTRONOMIA — 1.ª Frequência — 2.ª chamada — Fevereiro de 1961.

Prova Prática

5460 — Em 1961, Janeiro 16, observou-se em Coimbra uma estrela com um teodolito, tendo-se determinado a distância zenital

$$z = 46^\circ \; 57' \; 46'',6$$

e o azimute

$$A = 279^\circ \; 7' \; 23'',6 .$$

A observação foi feita às $2^h \, 13^m \, 20^s,53$ de tempo universal.

Calcular a ascensão recta e a declinação da estrela.

Prova Teórica

5461 — 1) Determinação da latitude de um lugar. Vantagem de observação de uma estrela no meridiano.

5462 — 2) Conversão de tempo sideral local em tempo solar médio local.

5463 — 3) Transformação de coordenadas; passagem de um astro no 1.º vertical.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — ASTRONOMIA — 2.ª Frequência — 1.ª chamada — 26-4-1961.

Parte Prática

5464 — Calcular para Coimbra e para o dia 15 de Maio de 1961 o T. U. e o azimute nos instantes correspondentes ao nascimento e ocaso da estrela γ Pegasis.

Parte Teórica

5465 — 1) Influência da refracção nas coordenadas equatoriais.

5466 — 2) Deduzir (ou estabelecer) as fórmulas fundamentais da paralaxe em azimute e distância zenital.

5467 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série da latitude local geocêntrica.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — ASTRONOMIA — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — Maio de 1961.

Parte Prática

5468 — Em 1961, Abril 17, observou-se num determinado instante em Coimbra e a leste do meridiano a estrela γ Cassiopeiae com a distância zenital verdadeira

$$55^\circ \; 12' \; 33'',6 .$$

Calcular o T. U., o azimute e o ângulo paraláctico da estrela nesse instante.

Parte Teórica

5469 — 1) Influência da refracção no nascimento ou ocaso de um astro

5470 — 2) Dedução das fórmulas fundamentais para a determinante da paralaxe em declinação e ascensão recta.

5471 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série do raio local terrestre.

Nota — Responder só a duas perguntas.

F. C. C. — ASTRONOMIA — Exame Final — 1.ª chamada 12-6-61.

Prova Prática

5472 — Calcular para um lugar situado no semi-meridiano de Coimbra de latitude

$$\varphi = 41^\circ \; 15' \; 34'',7$$

e para 1961, Junho 27, o T. U., a distância zenital e o azimute da maior digressão a leste da estrela α Cassiopeiae.

Enunciados dos n.os 5460 a 5472 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — COMPLEMENTOS DE GEOMETRIA — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5473 — 1) Seja S a superfície definida pela equação vectorial paramétrica

$$\vec{r} = f(u)\,\vec{i} + f(u)\,g(v)\,\vec{j} + g(v)\,\vec{k},$$

onde f e g são funções de classe suficientemente elevada e tais que as derivadas f' e g' são constantemente positivas.

a) Mostre que as linhas de curvatura da superfície S são definidas pela relação

$$\log\left(f(u)+\sqrt{1+(f(u))^2}\right)\pm$$
$$\pm\log\left(g(v)+\sqrt{1+(g(v))^2}\right)=\log\ C$$

onde C é uma constante arbitrária (positiva).

b) Mostre que as linhas da superfície S que cortam ortogonalmente as linhas de S definidas por $f(u)\,g(v)=$ Const., são as linhas de S definidas por $(f(u))^2-(g(v))^2=$ Const.

c) Verifique que a superfície S não tem pontos umbilicais.

5474 — 2) Dada a superfície S de equação vectorial paramétrica

$$\vec{r}=(u^3+u)\,\vec{i}-\frac{2}{v}(u^3+u)\,\vec{j}+2\,v\,\vec{k},$$

seja Γ a família de linhas de S, definida pela equação diferencial

$$u^2\frac{d^2v}{du^2}+(u^3-3u)\frac{dv}{du}+(3-u^2)\,v=u^5$$

a) Mostre que existe em Γ uma e uma só linha que é definida por uma equação da forma $v=a\cdot u^m$, onde a e m são constantes e determine uma equação vectorial paramétrica dessa linha.

b) Utilizando o resultado anterior, determine, em termos finitos, uma equação vectorial paramétrica geral das linhas da família Γ e determine, em particular, uma equação vectorial paramétrica da linha γ da família Γ que passa pelo ponto P definido por $u=1, v=1$ e tal que nesse ponto se tem $\left(\frac{dv}{du}\right)_P=2$.

c) Mostre que a linha γ obtida é uma linha assintótica da superfície S. Qual é a outra linha assintótica de S que passa pelo ponto P?

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5475 — 1) Seja f a função real de variável real x definida pela relação

$$f(x)=\frac{x^3+A\,x^2+B}{C\,x^2+4}$$

onde A, B, C são constantes.

a) Determinar as constantes A, B, C, de modo que o gráfico de f seja tal que a recta de equação cartesiana $x+y=0$ seja uma assíntota e o ponto $(0, f(0))$ seja de inflexão.

b) Esboçar o gráfico da função f.

c) Determinar a área da região limitada pelo gráfico de f e pelas rectas $x+y=0$ e $x=1$.

5476 — 2) Sobre uma circunferência de raio R, considere um ponto A. Seja P um ponto da tangente à circunferência em A e que dista R de A. Designe por B e C os pontos de encontro da circunferência com uma secante variável que passe por P. Mostre que o valor máximo da área do triângulo $A\,B\,C$ é igual a $\frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}R^2$.

5477 — 3 — *a*) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ é convergente.

b) Verifique que a igualdade

$$\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(2n-1)}=$$
$$=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{n+n}$$

é válida para todo o natural n.

c) Baseando-se na igualdade anterior, mostre que a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ é igual a $2\log 2$.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática II — 1.ª prova parcial — Agosto de 1961.

5478 — 1) Mostre que, se f é uma função real das variáveis reais x e y, homogénea, de grau m, cujas segundas derivadas existem e são contínuas, então

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=m\,(m-1)\,f(x,y).$$

Conclua, em seguida, que a função f definida por

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{\frac{x\,y}{x^2+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0)$$

é solução da equação

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

5479 — 2) Dada a função f, das variáveis reais x e y, definida por

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{(x^3 - 4\,x\,y^2)\cdot \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

verifique que, no ponto $(0,0)$, existem e são diferentes as derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

5480 — 3) Seja E o conjunto dos pontos do plano euclideano, de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{1}{m}, \; y = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n},$$

onde m e n são inteiros positivos.

a) Determinar o derivado E', do conjunto E, e o derivado E'', do conjunto E'.

b) Seja $A = E' - E''$. Dê exemplo de uma cobertura aberta, infinita, do conjunto A, da qual não seja possível extraír uma cobertura finita.

Qual é a condição do teorema de Heine-Borel que não é satisfeita pelo conjunto A?

Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática **(II Série) — 2.ª prova parcial — Novembro de 1961.**

5481 — 1) Calcule a massa do sólido definido, em coordenadas cartesianas triortogonais, pelas condições

$$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$$

sabendo que a função densidade é, em cada ponto, numèricamente igual à distância desse ponto ao eixo dos $z\,z$.

5482 — 2) Mostre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \log \frac{1+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x}{1-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

(*Sugestão:* Considere a função f, da variável real y, definida por

$$f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \log \frac{1+y\operatorname{sen} x}{1-y\operatorname{sen} x}\,dx, \quad -1 < y < 1,$$

e calcule $\dfrac{df}{dy}$, em termos finitos; utilizando o resultado obtido, determine $f(y)$, em termos finitos).

5483 — 3) *a*) Mostre que, se $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen}(y\,x) = \frac{y}{y^2+a^2}$$

b) Mostre que a segunda integral converge uniformemente, qualquer que seja o intervalo (finito) de variação de y.

c) Conclua, em seguida, que

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot\frac{1-\cos b\,x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+b^2}{a^2}$$

Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática **(II Série) — Exame final — Dezembro de 1961.**

5484 — 1) Calcule o volume do sólido definido, em coordenadas cartesianas tri-ortogonais pelas condições:

$$\begin{cases} 4 \geqslant z \geqslant x^2 + y^2 \\ 4\,x^2 + 4\,y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

5485 — 2) Utilizando a igualdade,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{y-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}, \quad \text{para } |y| > 1,$$

calcule os integrais

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(y-\cos x)^2} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi} \log\frac{3-\cos x}{2-\cos x}\,dx.$$

5486 — 3) Calcule a integral

$$\int_0^{1/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

com um erro inferior a 0,001. Determine, em seguida, uma melhor avaliação do erro cometido.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Geometria Superior — **1.ª prova parcial — Agosto de 1961.**

5487 — 1) Seja $[G,\cdot]$ um grupo e a um elemento fixo de G. Considere o sistema $[G,\odot]$, onde a operação $\odot$ é definida por

$$x \odot y = x \cdot a \cdot y\,.$$

a) Mostre que o sistema $[G,\odot)$ é um grupo.

b) Seja λ a aplicação de G em G definida por $\lambda(x) = x\cdot b$, onde b é um elemento fixo de G. Mostre que λ é um isomorfismo de $[G,\cdot]$ sobre $[G,\odot]$, se e só se $b = a^{-1}$.

c) Seja α um automorfismo de $[G,\cdot]$ e seja α'

a aplicação de G em G definida por

$$\alpha'(x) = \alpha(x) \cdot \alpha(a) \cdot a^{-1}.$$

Mostre que α' é um automorfismo de $[G, \odot]$ e que a correspondência $\alpha \to \alpha'$ é um isomorfismo do grupo dos automorfismos de $[G, \cdot]$ sobre o grupo dos automorfismos de $[G, \odot]$.

5488 — 2) Sejam $[A, +, \cdot]$ um anel comutativo, a um elemento de A e I um ideal de A.

a) Verifique se o conjunto J, dos elementos $x \in A$, tais que $a \cdot x \in I$, é um ideal de A.

b) Verifique se o conjunto K, dos elementos $x \in A$, tais que $x = a \cdot z$, onde $z \in I$, é um ideal de A e mostre que $K \subseteq I \subseteq J$.

c) Suponha que A é o anel dos números inteiros e I é o conjunto dos múltiplos do inteiro b. Designando por d e m, respectivamente, o máximo divisor comum de a e b e o mínimo múltiplo comum de a e b, mostre que K é o conjunto dos múltiplos de m e J é o conjunto dos múltiplos de $\frac{b}{d}$.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Geomertria Superior — **III Série — 2.ª prova parcial — Novembro de 1961.**

5489 — 1) Considere a geometria analítica plana definida definida sobre o corpo K (suposto com mais de dois elementos).

Sejam A, B, C três pontos distintos colineares e seja f a dilatação definida pelas condições:

$$f(A) = A \text{ e } f(B) = C.$$

a) Mostre que não há nenhuma translação t permutável com f, a não ser a aplicação idêntica.

b) Mostre que, se a translação t não é aplicação idêntica, então as dilatações ft e tf têm pontos fixos distintos.

c) Suponha que K é o corpo dos inteiros módulo 7, que $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (3, 1)$ e $C \equiv (2, 5)$ e que $t(A) = D$, onde $D \equiv (2, 1)$. Determine os pontos fixos das dilatações ft e tf.

d) Sejam g e h as dilatações assim definidas:

$$g(B) = B \text{ e } g(C) = A; \quad h(C) = C \text{ e } h(A) = B.$$

Mostre que as dilatações fgh, ghf e hfg geram grupos cíclicos de ordem 2.

5490 — 2) Seja K um corpo e sejam P e Q dois polinómios móninos pertencentes a $K[x]$.

a) Determine uma condição necessária e suficiente a que deve satisfazer um polinómio mónico $R \in K[x]$, para que os polinómios PQ, QR e RP sejam divisíveis, respectivamente, por R, P e Q.

b) Supondo que k é o corpo dos inteiros módulo 5 e que

$$P = x^3 + x^2 + 4x + 4 \text{ e } Q = x^3 + 2x^2 + 4x + 3,$$

determine todos os polinómios R que verificam as condições da alínea anterior.

Enunciados dos n.^{os} 5473 a 5490 de José Morgado

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

148 — Jean Porte — **La Logique mathématique et le calcul mecanique** — Publicado pelo Instituto de Matemática da Universidade Nacional del Sur — Baía Blanca.

A Universidade Nacional del Sur iniciou em 1960 a publicação de Cursos de Matemática de que este trabalho é o n.º 1. Segundo informa o autor no trabalho foi utilizado livremente o conteudo de diversas exposições feitas no Seminário de Lógica do Instituto Henri Poincaré.

O livro é de leitura fácil e acessível e trata do problema da decisão; programa logístico e sistemas formais; sistema formal do cálculo das proposições puro; funções recursivas; conjuntos recursivos e recursivamente numeráveis; as numerações de Gödel; aplicação das funções recursivas aos sistemas formais; sistema formal do cálculo de predicados puro; conclusões: as possibilidades das matemáticas mecanizadas.

Os problemas da lógica são, em geral, delicados e em particular os problemas da teoria da decisão. A exposição feita neste livro é no entanto bastante simples e não requere mais que conhecimentos elementares de lógica matemática que não vão muito além da simbologia e terminologia usadas hoje universalmente.

É um livro de leitura agradável e boa introdução ao estudo destes problemas.

J. Silva Paulo