

## Variedade analítica real. Definição e exemplos.

por *Roberto Ramalho de Azevedo*

do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife

### 1. Introdução.

Este trabalho tem por objectivo familiarizar o leitor com a definição de variedade analítica real, através da apresentação de alguns exemplos, tratados com certo pormenor. É dirigido naturalmente àqueles que iniciam o estudo deste assunto. A ideia da presente nota surgiu numa das exposições de um Seminário, orientado pelo professor ALFREDO PEREIRA GOMES, sobre Variedades Analíticas, realizado no 1.º semestre de 1959, no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, como preparação para o estudo dos Grupos de LIE.

Adotaremos a definição de variedade analítica real baseada no conceito de carta, por nos parecer mais manejável e de compreensão mais rápida que a definição equivalente, apoiada sobre a noção de feixe de funções, preferida por alguns autores.

Consideraremos conhecidas as noções fundamentais da Topologia Geral, bem como as estruturas vectorial e topológica de  $R^n$ , esta última definida pela métrica euclídeana, com a qual  $R^n$  é um espaço separado, completo, conexo, localmente conexo e localmente compacto, mas não compacto. Tem sentido, então, considerar em  $R^n$  as noções de função real de  $n$  variáveis reais, limite,

continuidade, derivação parcial e direccional, diferencial, convergência de sucessões e séries, função analítica, etc., cuja conceituação se obtém mediante uma generalização natural dos conceitos homónimos para as funções reais de duas ou três variáveis, por demais conhecidos. Entretanto, por ser de especial importância no decorrer desta exposição, detalharemos o conceito de função analítica real num ponto  $a$  de  $R^n$ .

**DEFINIÇÃO 1.** *Diz-se que a função real  $f$ , definida em  $R^n$ , é analítica num ponto  $a \in R^n$ , se existe uma vizinhança  $X$  de  $a$  tal que, para qualquer ponto  $x \in X$ , se possa escrever  $f(x)$  como a soma de uma série de TAYLOR a  $n$  variáveis, isto é:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} d^i f(a)$$

onde:

$$d^i f(a) = \left[ \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^i f(a)$$

e:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Convém salientar que a analiticidade, bem como os demais conceitos a que nos referimos acima são *locais*, no sentido de que são definidos na vizinhança de um ponto. A im-

portância destes conceitos conduz-nos à tentativa de dar-lhes um sentido em espaços topológicos mais gerais que o  $R^n$ , mas que se comportam *localmente* como o espaço  $R^n$ . Veremos, no que segue, qual o instrumento adequado para êste mistér e nos concentraremos especialmente na noção de analiticidade, o que nos conduzirá à definição de variedade analítica real.

## 2. Variedade Topológica Real.

Consideremos um espaço topológico  $E$  (1) e seja  $U$  um aberto de  $E$ . Seja  $\alpha$  um homeomorfismo de  $U$  sobre um aberto  $X$  de  $R^n$ . Chama-se *carta de  $U$*  e denota-se por  $(\alpha, U)$  ao par composto do homeomorfismo  $\alpha$  e do conjunto aberto  $U$ . Seja  $p$  um ponto qualquer de  $E$ . Diz-se que  $(\alpha, p)$  é uma *carta do ponto  $p$*  se existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $(\alpha, U)$  é uma carta de  $U$ . O inteiro positivo  $n$  é a dimensão da carta.

Tomemos o ponto  $p \in U \subset E$  e suponhamos que  $\alpha(p) = x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ . Os números reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se dizem as *coordenadas* de  $p$  na carta  $(\alpha, U)$ . Êste é um primeiro exemplo de uma noção do espaço  $R^n$  que se «transporta» para o espaço topológico  $E$  por meio do conceito de carta. Se  $p$  é um ponto genérico de  $U$ , êle será função de suas coordenadas, no sentido de que a cada ponto  $p$  corresponde um conjunto ordenado de  $n$  números reais, e reciprocamente. Esta correspondência define o que se chama um *sistema de coordenadas* do aberto  $U$  na carta  $(\alpha, U)$ . Ê claro que a cada carta de  $U$  corresponde um sistema de coordenadas em  $U$ , e reciprocamente.

Diz-se que um espaço topológico  $E$  é *localmente euclideo* em  $p$  se existe uma carta de  $p$ .

Estamos agora em condições de definir uma variedade topológica real, primeiro estágio a considerar na definição de uma variedade analítica real.

**DEFINIÇÃO 2.** *Uma variedade topológica real  $T$  é um espaço topológico separado e conexo, localmente euclideo em cada um de seus pontos.*

Cada ponto de  $T$  possui uma carta, isto é, cada ponto de  $T$  possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de  $R^n$ . Estas vizinhanças cobrem o espaço topológico considerado; diz-se então que a família das cartas sobre  $T$  cobre  $T$ . Uma família de cartas que cobre um espaço topológico chama-se um *atlas* dêste espaço. Temos pois a:

**DEFINIÇÃO 2'.** *Uma variedade topológica real  $T$  é um espaço topológico separado e conexo munido de um atlas.*

Prova-se que todas as cartas de um mesmo ponto  $p$  de uma variedade topológica real têm a mesma dimensão (2). Êste número se chama a *dimensão da variedade em  $p$* .

Como  $T$  é um espaço topológico conexo, a dimensão da variedade é a mesma em todos os seus pontos. Com efeito, sejam  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  subconjuntos de  $T$  tais que cada  $U_i$  seja constituído por todos os pontos nos quais a variedade tenha dimensão  $i$ . Ora êstes conjuntos são abertos, pois se  $p \in U_i$ , então existe uma vizinhança de  $p$  contida em  $U_i$ , pela definição de carta de um ponto de uma variedade. Mas, sendo  $T$  conexo, não pode ser a reunião de abertos disjuntos não vazios. Logo, há apenas um dos conjuntos  $U_i$  que é não vazio, o que demonstra nossa asserção.

Diz-se que êste número comum a todos os pontos da variedade  $T$  é a *dimensão de  $T$* .

(1) No sentido de BOURBAKI, «Topologie Générale, Chap. 1».

(2) Ver LEFSCHETZ, S., «Introduction to Topology», Princeton, pg. 124.

Um exemplo simples de variedade topológica real de dimensão 2 é o conjunto  $S_2$  dos pontos de uma superfície esférica munido da topologia induzida pela de  $R^3$ , que lhe confere uma estrutura de espaço topológico separado e conexo. Além disso,  $S_2$  é localmente euclideano em cada um de seus pontos; esta afirmação será comprovada adiante quando explicitarmos o atlas. Entretanto pode ver-se intuitivamente desde já que  $S_2$  é uma variedade topológica real. Com efeito, se retirarmos de  $S_2$  um semi-meridiano qualquer (incluindo os pontos extremos), pode deformar-se de uma maneira bicontínua e biunívoca (sem rupturas nem superposições) a parte restante de  $S_2$  (que é um conjunto aberto na topologia indicada acima) de modo a obter um aberto do plano  $R^2$ ; análogamente, se retirarmos de  $S_2$  um semi-círculo equatorial (incluindo os pontos extremos) que não intercepte o semi-meridiano retirado antes, pode efectuar-se também uma deformação homeomórfica da parte restante de  $S_2$  num aberto de  $R^2$ .

Impossível é transformar «globalmente» toda a superfície esférica num aberto de  $R^2$  sem efectuar rupturas ou superposições. Basta meditar na impossibilidade de construir uma carta geográfica plana de toda a superfície da Terra.

Exige-se nas definições 2 e 2' que o espaço topológico subjacente a uma variedade topológica real seja separado afim de evitar certos casos patológicos (5).

(5) Veja-se, por exemplo, o caso da «ramificação simples», em РЕБВ, G., «Estruturas folheadas», Notas de Matemática, n.º 12, Rio de Janeiro, pg. 3.

Chama-se ramificação simples ao espaço quociente  $\frac{E \cup E'}{\rho}$ , onde  $E$  e  $E'$  são dois exemplares de  $R$  e  $\rho$  é a relação de equivalência que identifica os pontos dos abertos  $U = \{x \in E; x < 0\}$  e  $U' = \{x' \in E'; x' < 0\}$ . Os pontos de abscissa nula não são separados (figura ao lado).

As variedades topológicas reais não separadas

No exemplo da superfície esférica de há pouco, os pontos que não pertencem a nenhum dos dois semi-círculos máximos retirados de cada vez têm, em cada uma das cartas consideradas, coordenadas distintas. Vejamos como se relacionam estas coordenadas ou, em outras palavras, estudemos o problema da transformação de coordenadas em uma variedade topológica.

Consideremos, pois, as cartas  $(\alpha, U)$  e  $(\beta, V)$  das vizinhanças  $U$  e  $V$  de um ponto fixo  $p$  da variedade topológica real  $T$  e seja  $q$  um ponto genérico de  $W = U \cap V$ . As restrições  $(\alpha, W)$  e  $(\beta, W)$  das cartas acima definem, cada uma, um sistema de coordenadas para os pontos  $q$  de  $W$ .

Ponhamos:

$$\alpha(q) = x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\beta(q) = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

onde  $x \in X \subset R^n$  e  $y \in Y \subset R^n$ . Esta situação vem descrita na figura 1.

Seja  $\Phi: X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável tal que:  $y = \Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e consideremos as aplicações componentes de  $\Phi$ , que são funções reais diferenciáveis de  $n$  variáveis reais:

$$(1) \quad y_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Se o jacobiano  $\left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$  fôr diferente de zéro em todos os pontos  $x \in X$ , então o sis-

têm, entretanto, grande importância no estudo das estruturas folheadas.

o'

o

tema (1) acima é inversível e podemos escrever:

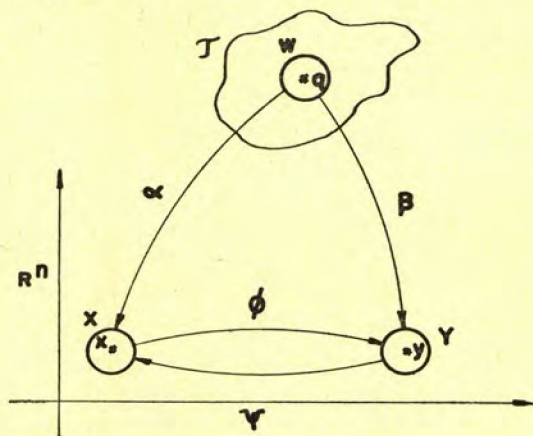


Fig. 1

(2)  $x_i = \Psi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$   
 ou ainda que:

$$x = \Psi(y)$$

onde  $\Psi: Y \rightarrow X$  é uma aplicação diferenciável<sup>(4)</sup>.

Dessa maneira,  $\Phi$  e  $\Psi$  são homeomorfismos diferenciáveis inversos um do outro e temos:

$$\alpha = \Psi \circ \beta \quad \text{e} \quad \beta = \Phi \circ \alpha$$

ou:

$$\Phi = \beta \circ \alpha^{-1} \quad \text{e} \quad \Psi = \alpha \circ \beta^{-1}.$$

Transportando para a variedade topológica  $T$  estes resultados, diremos que os sistemas de equações (1) e (2) são as fórmulas de transformação de coordenadas na variedade, correspondentes às cartas  $(\alpha, W)$  e  $(\beta, W)$ .

### 3. Variedade Analítica Real.

Seja  $p \in T$  e seja  $U$  uma vizinhança de  $p$  em  $T$  na qual estão definidos os homeo-

morfismos  $\alpha$  e  $\beta$  de  $T$  em  $R^n$ . Diremos que as cartas  $(\alpha, U)$  e  $(\beta, U)$  são *analiticamente relacionadas no ponto*  $p \in U$  se as funções reais  $\Phi_i$  e  $\Psi_i$  das equações (1) e (2) acima são funções analíticas respectivamente em  $x = \alpha(p)$  e  $y = \beta(p)$ .

Quando as duas cartas são analiticamente relacionadas em todos os pontos em que ambas são definidas, dizem-se *analiticamente relacionadas*. Por abuso de linguagem, diz-se ainda que duas cartas são analiticamente relacionadas se não existe nenhum ponto de  $T$  em que sejam ambas definidas.

Usaremos a notação  $(\alpha R \beta)_p$  para indicar que as cartas  $(\alpha, U)$  e  $(\beta, U)$  são analiticamente relacionadas em  $p$ . Verifica-se sem dificuldade que  $R$  é uma relação de equivalência.

Chama-se *família analítica de cartas* àquela em que duas cartas quaisquer são analiticamente relacionadas. Um *atlas analítico* sobre  $T$  é uma família analítica de cartas que cobre  $T$ . Diz-se que um atlas analítico sobre  $T$  é *maximal* se qualquer carta sobre  $T$  que é analiticamente relacionada a uma carta qualquer do atlas pertence ao atlas.

**DEFINIÇÃO 3.** *Uma variedade analítica real é uma variedade topológica real cujo atlas é analítico e maximal.*

A *dimensão da variedade analítica* é a mesma que a da variedade topológica subjacente<sup>(5)</sup>.

Se em vez de  $R^n$ , tivéssemos escolhido  $C^n$ , teríamos definido as variedades analíticas complexas. Outrossim, poderíamos ter definido as variedades  $p$ -vêzes ou indefinidamente diferenciáveis substituindo, em tudo que foi dito, a palavra *analítico* por qualquer

(4) Ver BUCK, C., «Advanced Calculus», Mc. Graw Hill, pg. 216.

(5) Para as variedades analíticas reais, a demonstração de que todas as cartas de um mesmo ponto da variedade têm a mesma dimensão se faz directamente; ver por exemplo COHN, P., «Lie Groups», Cambridge, pg. 12.

uma dessas. Convém observar que todos os exemplos que daremos a seguir de variedades analíticas serão, em particular, exemplos de variedades diferenciáveis (indefinidamente) pois uma função analítica é, a fortiori, indefinidamente diferenciável.

Dada uma variedade topológica, é muito difícil e por vezes impossível exibir um atlas maximal sobre esta variedade. Afim de remover este obstáculo, demonstraremos a seguir um Teorema e seu Corolário que permitirão estabelecer uma correspondência biunívoca entre atlas analíticos e variedades analíticas, de modo que, dada uma variedade analítica, se possa falar no atlas desta variedade.

**TEOREMA.** *Seja  $T$  uma variedade topológica real munida de um atlas analítico  $A$ . Então existe um único atlas analítico maximal que contém  $A$ .*

Seja  $A'$  o conjunto de todas as cartas sobre  $T$  analiticamente relacionadas a cada carta de  $A$ . Mostraremos que  $A'$  é o atlas procurado.

a)  $A'$  é um atlas analítico. Em primeiro lugar, é evidente que  $A' \supset A$ , de modo que  $A'$  cobre  $T$ . Sejam  $(\alpha_1, U)$  e  $(\alpha_2, V)$  duas cartas quaisquer de  $A'$  e seja  $W = U \cap V$ . Se  $W$  é vazio, as cartas são analiticamente relacionadas por definição. Caso contrário, seja  $p \in W$ . Como  $W$  é aberto, é uma vizinhança de  $p$  e, como  $A$  cobre  $T$  há uma carta  $(\beta, W)$  de  $p$  que pertence a  $A$ . Da definição de  $A'$  segue-se que  $(\alpha_1 R \beta)_p$  e  $(\alpha_2 R \beta)_p$ , donde  $(\alpha_1 R \alpha_2)_p$  por ser  $R$  uma relação de equivalência. De modo que as cartas  $(\alpha_1, U)$  e  $(\alpha_2, V)$  são analiticamente relacionadas num ponto qualquer  $p$  de  $W$ . Logo, o atlas  $A'$  é analítico.

b)  $A'$  é maximal. Seja  $(\rho, U)$  uma carta que é analiticamente relacionada a cada carta de  $A'$ . Como  $A' \supset A$ ,  $(\rho, U)$  é analiticamente relacionada a cada carta de  $A$  e portanto pertence a  $A'$ .

c)  $A'$  é único. Seja  $A''$  outro atlas analítico maximal contendo  $A$ . Então toda carta de  $A''$  seria analiticamente relacionada a cada carta de  $A$  e pertenceria portanto a  $A'$ . Donde  $A'' \subset A'$ . Do mesmo modo se verificaria que  $A' \subset A''$ , logo  $A' = A''$  e a unicidade está provada.

**COROLÁRIO.** *Sejam  $A_1$  e  $A_2$  dois atlas analíticos sobre a variedade analítica  $M$ . Então há um atlas analítico maximal contendo  $A_1$  e  $A_2$ , se e só se, para cada ponto  $p \in M$ , há uma carta de  $A_1$  que é analiticamente relacionada em  $p$  a uma carta de  $A_2$ .*

A condição é necessária: com efeito, se existe o atlas  $A'$  nas condições do corolário, então cada carta de  $A'$  será analiticamente relacionada a todas as cartas de  $A_1$  e de  $A_2$ , de modo que as cartas de  $A_1$  e de  $A_2$  serão analiticamente relacionadas.

A condição é suficiente: se para cada ponto  $p \in M$ , há uma carta de  $A_1$  que é analiticamente relacionada a uma carta de  $A_2$ , então por ser  $R$  uma relação de equivalência, toda carta de  $A_1$  é analiticamente relacionada a todas as cartas de  $A_2$  e portanto o atlas  $A'$ , constituído por todas as cartas de  $A_1$  e por todas as cartas de  $A_2$  é analítico. Logo, pelo teorema anterior, existe um atlas analítico maximal único  $A'$  contendo  $A_1$  e  $A_2$  e o corolário está demonstrado.

Tendo em mente estes resultados, podemos formular a seguinte

**DEFINIÇÃO 3'.** *Uma variedade analítica real é uma variedade topológica real munida de um atlas analítico.*

#### 4. Exemplos de Variedades Analíticas Reais.

I) O espaço  $R^n$  ou qualquer um de seus subconjuntos abertos, evidentemente.

II) Um ponto ou um espaço discreto são variedades analíticas reais de dimensão zéro.

III) As curvas regulares no plano são variedades analíticas reais de dimensão 1. Estudemos em particular o caso da elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , com a topologia induzida pela topologia ordinária do plano. Há um atlas, a saber, a família das cartas abaixo:

$$(pr_x, \widehat{A'BA}), (pr_x, \widehat{A'B'A}), \\ (pr_y, \widehat{BAB'}), (pr_y, \widehat{BA'B'})$$

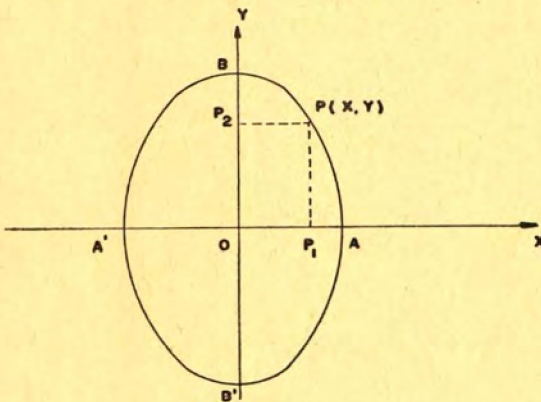


Fig. 2

onde  $pr_x$  e  $pr_y$  representam as projecções ortogonais sôbre os eixos  $OX$  e  $OY$  respectivamente; os arcos indicados da elipse são considerados sem os extremos, de modo que são conjuntos abertos na topologia escolhida. Nestas condições  $pr_x$  e  $pr_y$  são homeomorfismos de abertos da elipse sôbre abertos de  $R$ .

Vejamos que êste atlas é analítico; para isso, verifiquemos apenas que a 1.<sup>a</sup> e a 3.<sup>a</sup> cartas são analiticamente relacionadas, pois para as outras o procedimento será análogo. Fixemos idéias sôbre o ponto  $P$  da figura 2. Como  $pr_x P = P_1$  e  $pr_y P = P_2$ , o ponto  $P$  terá por coordenadas  $x$  na carta

$(pr_x, \widehat{A'BA})$  e  $y$  na carta  $(pr_y, \widehat{BAB'})$ . Na vizinhança  $\widehat{AB}$  do ponto  $P$ , a equação da elipse nos fornece as relações:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 < x < a$$

e

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad 0 < y < b,$$

que são funções analíticas de seus argumentos em  $\widehat{AB}$ .

IV) As curvas e superfícies regulares do espaço ordinário são variedades analíticas reais, de dimensões 1 e 2 respectivamente. Tomemos a superfície cilíndrica de revolução de raio unitário da figura 3, cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = \cos w \\ y = \text{sen } w \\ z = z \end{cases} \quad \text{com } \begin{cases} 0 \leq w < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

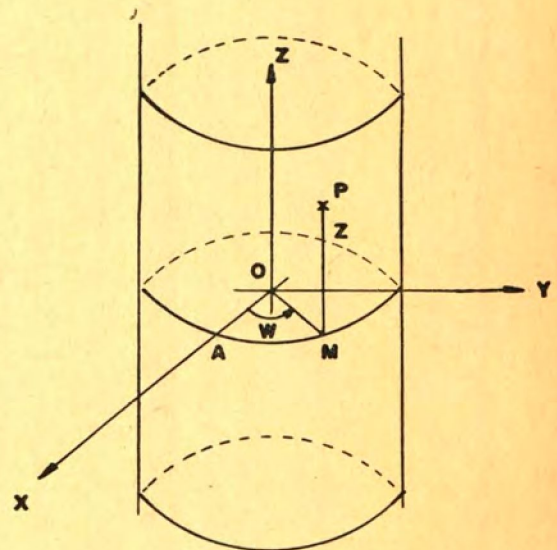


Fig. 3

É evidente que a superfície cilíndrica não se pode aplicar toda inteira sôbre o plano

sem sofrer rupturas ou superposições. Entretanto isto pode ser obtido localmente, da maneira que indicaremos a seguir.

Partiremos uma geratriz da superfície cilíndrica, aquela que passa pelo ponto  $A$ . Então o restante da superfície, que é um conjunto aberto na topologia induzida sobre ela pela topologia ordinária do espaço  $R^3$  pode ser transformado homeomorficamente sobre um aberto do plano  $(w, z)$ ,  $w$  medido em radianos, como indica a figura 4. Nesta primeira carta, as coordenadas do ponto  $P$ , indicado na figura 3, seriam :

$$w_1 = w \quad \text{e} \quad z_1 = z.$$

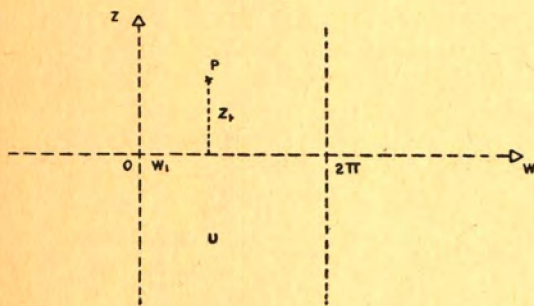


Fig. 4

Obteríamos uma segunda carta, retirando da superfície cilíndrica uma outra geratriz, por exemplo, a geratriz oposta àquela que passa pelo ponto  $A$ ; o restante da superfície seria transformado pelo homeomorfismo definido por:

$$w_2 = w - \pi \quad \text{e} \quad z_2 = z$$

num aberto do plano  $(w, z)$ , indicado na figura 5.

Estas duas cartas constituem um atlas pois cobrem a superfície cilíndrica e são além disso analiticamente relacionadas, pois  $w_2 = w_1 - \pi$  e  $z_2 = z_1$  são funções analíticas, assim como suas inversas  $w_1 = w_2 + \pi$  e  $z_1 = z_2$ .

V) Seja  $Z_2$  o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são números

inteiros e consideremos o conjunto quociente  $T^2 = R^2 / Z^2$ , obtido de  $R^2$  por identificação de todos os pontos do plano cujas coordena-

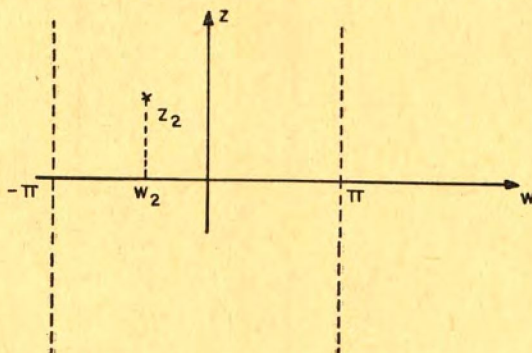


Fig. 5

das diferem por números inteiros. Na figura 6, todos os pontos marcados com um  $x$  se identificam ao ponto  $P$  do interior do quadrado de lado unitário  $OABC$ ; o ponto  $P$  será escolhido como elemento representativo da classe de equivalência a que pertence. Por outro lado, escolheremos como elementos representativos das classes de equivalência dos pontos cujas abscissas são números inteiros aqueles situados sobre o lado  $OA$  e dos pontos de ordenadas inteiras aqueles situados sobre o lado  $OC$ . Dêsse modo o conjunto dos pontos do plano definido por  $0 \leq x < 1$  e  $0 \leq y < 1$  contém os elementos

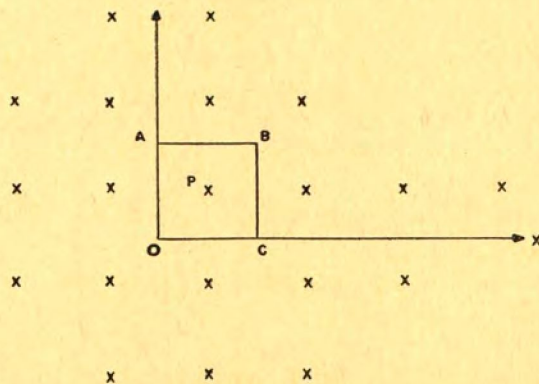


Fig. 6

representativos de todas as classes de equivalência de  $R^2$ , módulo  $Z^2$ . Materialmente, concretiza-se  $T^2$  tomando um quadrado de papel e efectuando as dobras indicadas nas figuras 7 a, 7 b e 7 c.

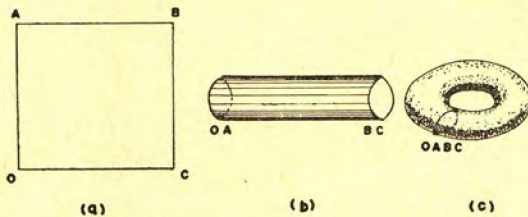


Fig. 7

A superfície obtida é, pois, o tóro ordinário cujas equações paramétricas são (ver figura 8):

$$\begin{cases} x = (R - \cos v) \cos u \\ y = (R - \cos v) \sin u \\ z = \sin u \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leq u < 2\pi \\ 0 \leq v < 2\pi \end{cases}$$

onde  $R$  é a distância de  $O$  ao centro de qualquer das secções circulares obtidas por planos que contêm  $OZ$ .

Se se introduz em  $T^2$  a topologia quociente, teremos um espaço topológico separado e conexo, que se chama tóro a duas dimensões (o tóro a 1 dimensão  $T = R/Z$  é o círculo de raio igual a 1).

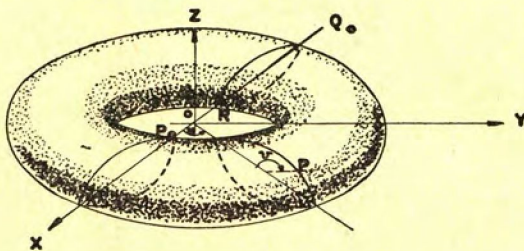


Fig. 8

Um conjunto aberto em  $T^2$  é a imagem, pela aplicação canónica, da reunião de um conjunto aberto  $U$  de  $R^2$  e de todos os

outros conjuntos de  $H^2$  cujos pontos possuem coordenadas que diferem das coordenadas dos pontos de  $U$  por números inteiros (ver figura 9).

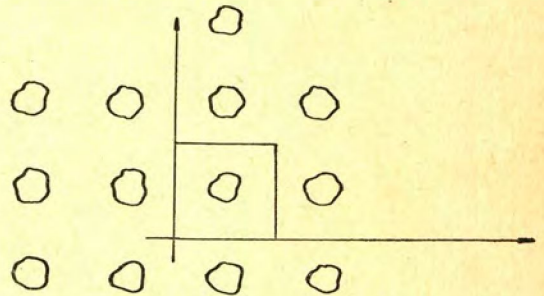


Fig. 9

Mostremos que  $T^2$  é uma variedade analítica real de dimensão 2'. Para isso explicitemos as cartas. A primeira seria obtida retirando do tóro (ver figura 8) uma circunferência vertical e outra horizontal passando por  $P_0$ , com o que a parte restante do tóro (que é um aberto na topologia quociente) seria transformada num aberto do plano  $(u, v)$  pelo homeomorfismo  $u_1 = u$  e  $v_1 = v$  (ver figura 10). As coordenadas do ponto  $P$  (ver figuras 8 e 10) seriam  $u_1$  e  $v_1$  nesta carta.

Obteríamos uma outra carta se retirássemos do tóro a circunferência horizontal e a vertical que passam por  $Q_0$  e transformássemos

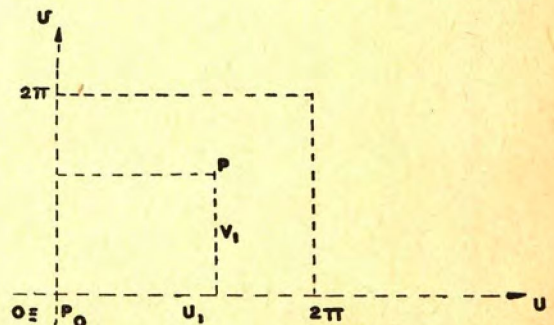


Fig. 10



o aberto resultante num aberto do plano  $(u, v)$ , indicado na figura 11, por meio do homeomorfismo:  $u_2 = u - \pi$  e  $v_2 = v - \pi$ .

Estas duas cartas formam um atlas sobre  $T^2$  pois é evidente que cobrem  $T^2$  e são analiticamente relacionadas desde que as funções:  $u_2 = u_1 - \pi$  e  $v_2 = v_1 - \pi$  bem como suas inversas  $u_1 = u_2 + \pi$  e  $v_1 = v_2 + \pi$  são funções analíticas.

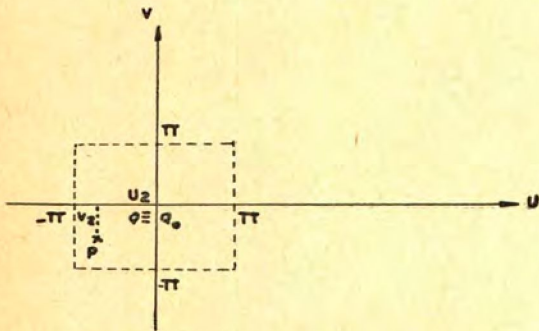


Fig. 11

VI) Um outro exemplo interessante de variedade analítica bidimensional é a faixa de MOEBIUS, que é o conjunto  $M$ , definido por:

$$M = \{(x, y) \in R^2; -1 \leq x \leq 1, -1 < y < 1, \text{ onde se identificaram os pontos } (-1, y) \text{ aos pontos } (1, -y)\}.$$

O que corresponde a considerar o quadrado  $ABA'B'$  da figura 12 e nêle identi-

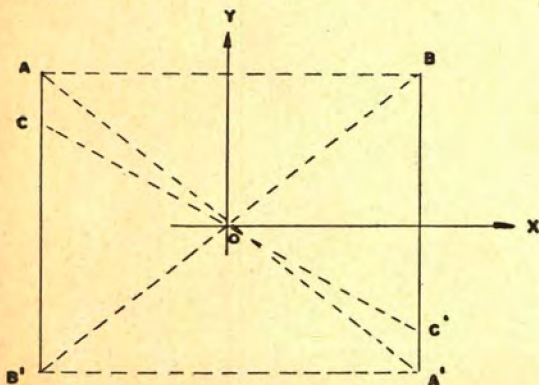


Fig. 12

ficar os pontos  $A, B', C$ , etc., aos pontos  $A', B, C'$ , etc, respectivamente.

Uma faixa de MOEBIUS se obtém, «concretamente» tomando-se um quadrado de papel e efectuando as deformações indicadas nas figuras 13a, 13b, e 13c. A figura 13b indica uma torsão efetuada de molde a inverter dos pontos  $A'$  e  $B$  e a figura 13c é a superfície (faixa de MOEBIUS) que se obtém da identificação (colagem) dos lados  $AB'$  e  $A'B$  de tal maneira que  $A$  coincida com  $A'$  e  $B'$  com  $B$ . A linha  $l$  em 13c indica a posição ocupada pelos lados  $AB'$  e  $A'B$  depois de identificados e a linha  $l'$  em 13c indica o conjunto dos pontos correspondentes aos pontos de abscissa nula da figura 12. Se considerarmos a topologia induzida pela topologia ordinária do espaço  $R^3$ , observe-se que, ao retirar a linha  $l$  ou a linha  $l'$ , obtém-se de cada vez um aberto na faixa de MOEBIUS. Se em cada um dos casos, desenrolarmos o aberto que resulta após a retirada de uma ou outra dessas linhas e o

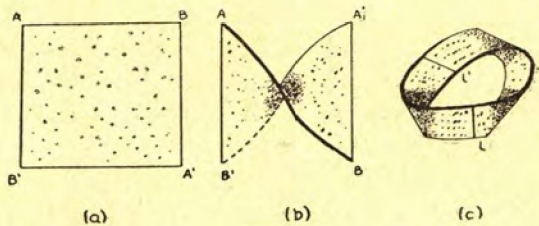


Fig. 13

aplicarmos sobre o plano, teremos ainda um aberto do tipo indicado na figura 14.

As cartas estão indicadas abaixo:

a) Para  $x \neq 1$  e  $x \neq -1$ , o que corresponde a retirar a linha  $l$ , temos:  $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases}$

b) Para  $a \neq 0$ , o que corresponde a retirar  $l'$ , temos:

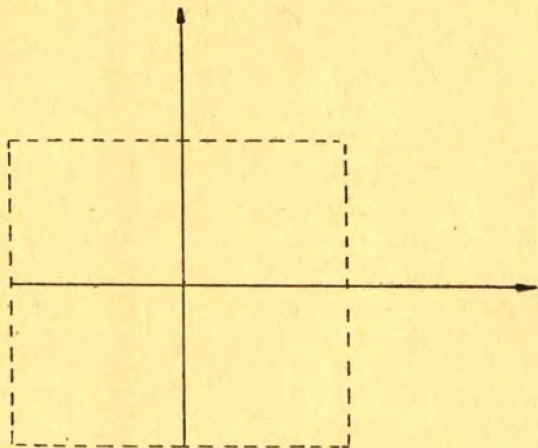


Fig. 14

$$\begin{cases} \text{se } x > 0 & \begin{cases} x_2 = x - 1 \\ y_2 = y \end{cases} \\ \text{se } x < 0 & \begin{cases} x_2 = x + 1 \\ y_2 = -y \end{cases} \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{aligned} &\text{se } x > 0 \begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ y_2 = y_1 \end{cases} \\ \text{e se } x < 0 &\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases} \end{aligned}$$

e estas funções, bem como suas inversas, são analíticas, com o que  $M$  é uma variedade analítica real bidimensional.

VII) Trataremos agora do espaço projectivo a 2 dimensões  $P_2$ , definido como o espaço quociente  $P_2 = R_3^* / \Delta$ , onde

$$R_3^* = R^3 - \{0\}$$

(espaço  $R^3$  privado da origem) e  $\Delta$  é a relação de equivalência seguinte: «se  $x, y \in R_3^*$ ,  $x$  é equivalente a  $y$  (módulo  $\Delta$ ) se existe um número real  $\lambda$  tal que  $y = \lambda x$ ».

Geometricamente, as classes de equivalência (módulo  $\Delta$ ) são retas de  $R^3$ , passando pela origem, mas destituídas deste ponto. Ora, estas retas são caracterizadas pelos

seus cossenos directores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ou por números proporcionais a estes, seus parâmetros directores  $x_1, x_2, x_3$ . Este sistema de parâmetros directores de uma reta se pode identificar ao sistema de coordenadas homogêneas de um ponto do plano (observe-se que  $x_1, x_2$  e  $x_3$  não podem ser simultaneamente nulos pois a origem foi suprimida) e as retas do plano coordenado  $x_1 O x_2$  para  $x_3 = 0$  se identificam aos pontos do infinito do plano. Somos conduzidos por esta construção ao plano projectivo conhecido. Os abertos de  $P_2$ , na topologia quociente, são as imagens, pela aplicação canônica, de superfícies cônicas  $S$ , de vértice na origem e circunscrevendo abertos  $U$  de  $R_3^*$  (ver figura 15).

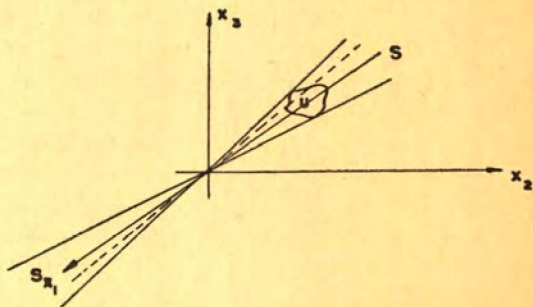


Fig. 15

Consideremos os abertos  $U, V$  e  $W$  de  $R_3^*$ , definidos por:

$$U = \{x \in R_3^*; x_1 \neq 0\}, \quad V = \{x \in R_3^*; x_2 \neq 0\}, \\ W = \{x \in R_3^*; x_3 \neq 0\}$$

e sejam  $\Phi(U), \Phi(V)$  e  $\Phi(W)$  as imagens de  $U, V$  e  $W$  pela aplicação canônica  $\Phi: R_3^* \rightarrow P_2$ . Estes três conjuntos formam uma cobertura de  $P_2$  e um atlas é obtido se pusermos:

$$\text{para } \Phi(U) \begin{cases} X_1 = \frac{x_2}{x_1} \\ Y_1 = \frac{x_3}{x_1} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \text{para } \Phi(V) & \begin{cases} X_2 = \frac{x_1}{x_2} \\ Y_2 = \frac{x_3}{x_2} \end{cases}, \\ \text{para } \Phi(W) & \begin{cases} X_3 = \frac{x_1}{x_3} \\ Y_3 = \frac{x_2}{x_3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Observemos que as funções  $X_1 = \frac{1}{X_2}$  e  $Y_1 = \frac{Y_2}{X_2}$  são analíticas para os pontos de  $\Phi(U) \cap \Phi(V)$ . Conclusão análoga obteríamos por consideração dos demais pares de cartas e  $P_2$  é, pois, uma variedade analítica bidimensional.

VIII) Afastemo-nos dos exemplos geométricos e consideremos o conjunto  $M(n, R)$  das matrizes quadradas de ordem  $n$  sobre  $R$ . Há uma correspondência biunívoca entre  $M(n, R)$  e  $R^{n^2}$  dada explicitamente por  $\alpha_{ij} \leftrightarrow x_{i+(j-1)n}$ , que faz corresponder à matriz  $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  o ponto de  $R^{n^2}$  cujas coordenadas são  $(x_1, x_2, \dots, x_{n^2})$ . Introduce-se uma topologia em  $M(n, R)$  exigindo que esta correspondência seja um homeomorfismo, o que equivale, por exemplo, a definir a distância de  $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  a  $(\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$   $\sqrt{\sum_{i,j} (\alpha_{ij} - \beta_{ij})^2}$ . Nestas condições,  $M(n, R)$  é, de facto, uma variedade analítica real de dimensão  $n^2$ .

IX) Estudemos agora uma aplicação do corolário da pg. 5. Para isso, consideremos a superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  em  $R^3$  e definamos dois atlas analíticos sobre ela para em seguida concluir que estes dois atlas definem a mesma estrutura de variedade analítica. A topologia da superfície esférica será sempre a topologia induzida pela de  $R^3$ .

Seja  $P(u, v)$  um ponto genérico da superfície esférica onde  $u$  e  $v$  são parâmetros

representando respectivamente a longitude e a latitude do ponto  $P$ , contadas a partir de  $P_0$  (ver figura 16). As equações paramétricas da superfície esférica são pois:

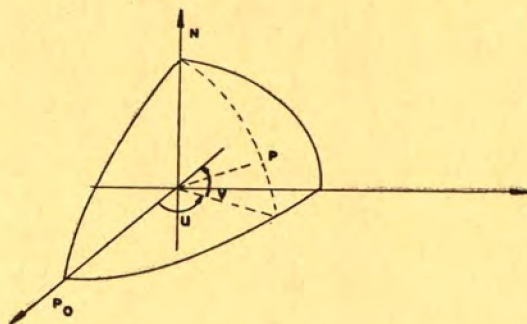


Fig. 16

$$\begin{cases} x = \cos v \cos u \\ y = \cos v \sin u \\ z = \sin v \end{cases}, \text{ com } \begin{cases} -\pi/2 \leq v \leq \pi/2 \\ 0 \leq u < 2\pi \end{cases}$$

onde os polos norte e sul têm por coordenadas respectivamente  $N(0, \pi/2)$  e  $S(0, -\pi/2)$ . Esta restrição garante a biunivocidade da correspondência entre pontos da superfície esférica e pares de valores de  $u$  e  $v$ .

Definamos um primeiro atlas composto das duas cartas  $(\alpha_1, U_1)$  e  $(\alpha_2, U_2)$ .  $U_1$  é o que resta da superfície esférica quando dela se retira um semi-meridiano fechado (com os extremos) passando por  $P_0$  e cujos extremos são os polos norte e sul; este aberto pode ser transformado homeomorficamente num aberto do plano  $(u, v)$  como mostra a figura 17 e nesta carta as coordenadas dos pontos de  $U_1$  serão dadas por:

$$u_1 = u \text{ e } v_1 = v.$$

Seja  $U_2$  o que resta da superfície esférica quando dela se retira um semi-círculo equatorial fechado de extremos  $P_1(\pi/2, 0)$  e  $P_2(3\pi/2, 0)$ . Nestas condições,  $U_2$  se pode transformar homeomorficamente num

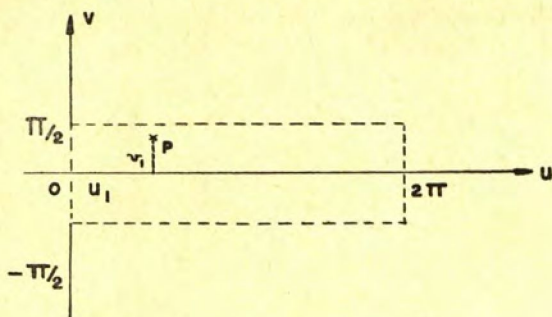


Fig. 17

aberto do plano  $(u, v)$ , conforme figura 18, de tal modo que nesta nova carta as coordenadas dos pontos de  $U_2$  sejam:

$$u_2 = u - \pi \text{ e } v_2 = v.$$

E como  $u_2 = u - \pi$ ,  $v_2 = v$ , e suas inversas, são funções analíticas nos pontos em que são ambas definidas, o atlas considerado é analítico.

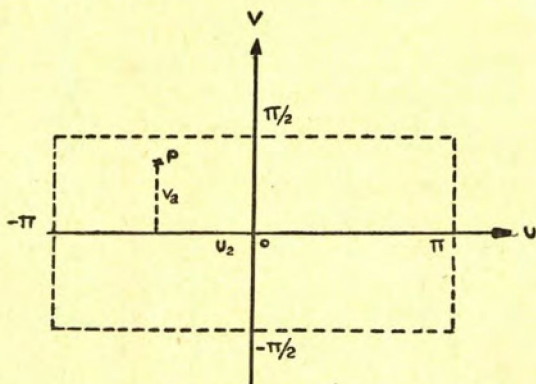


Figura 18

Definamos um outro atlas sobre a superfície esférica, composto das cartas  $(\beta_1, V_1)$  e  $(\beta_2, V_2)$ .

A carta  $(\beta_1, V_1)$  é constituída do aberto  $V_1$ , que se obtém da superfície esférica quando dela se retira o polo sul;  $\beta_1$  é o homeomorfismo projeção estereográfica com centro no polo sul e transforma  $V_1$  em todo o plano (sem os pontos do infinito). Se  $s_1$  e

$t_1$  são as coordenadas do ponto genérico  $P(x, y, z)$  de  $V_1$  nesta carta, teremos, conforme figura 19:

$$\begin{aligned} \frac{x}{s_1} = \frac{y}{t_1} &= \frac{|OP'|}{|OP_1|} = \frac{|PP''|}{|OP_1|} = \\ &= \frac{|P''S|}{|OS|} = 1 + z. \end{aligned}$$

Donde:

$$(1) \quad s_1 = \frac{x}{1+z} \text{ e } t_1 = \frac{y}{1+z}.$$

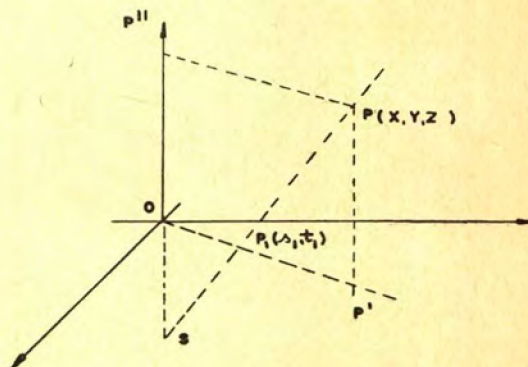


Figura 19

A carta  $(\beta_2, V_2)$  consta do aberto  $V_2$ , obtido pela supressão do polo norte na superfície esférica e do homeomorfismo  $\beta_2$  que é a projeção estereográfica sobre o plano  $XOY$  e com centro no polo norte. Se  $s_2$  e  $t_2$  são as coordenadas de  $P(x, y, z)$ , ponto genérico de  $V_2$ , nesta carta (ver figura 20):

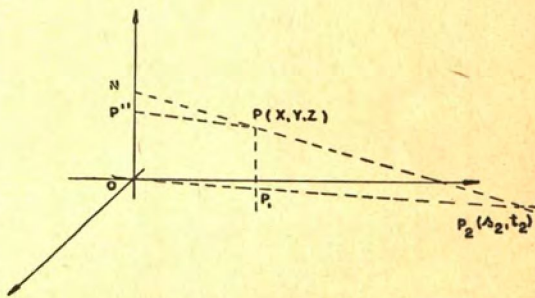


Figura 20

$$\frac{|P' P_2|}{|O P_2|} = \frac{s_2 - x}{s_2} = \frac{t_2 - y}{t_2} = \frac{|P' P|}{|O N|} = z.$$

Segue-se que:

$$(2) \quad s_2 = \frac{x}{1-z} \text{ e } t_2 = \frac{y}{1-z}.$$

As equações (1), (2) e  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  formam um sistema de cinco equações a sete variáveis, do qual podemos extrair relações entre  $s_1, t_1, s_2$  e  $t_2$ , pela eliminação de  $x, y$  e  $z$ . Temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} s_2^2 + t_2^2 &= \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \\ &= \frac{1+z}{1-z} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1} \end{aligned}$$

logo:

$$s_1 = \frac{s_2}{\frac{s_2^2 + t_2^2}{s_2}} \text{ e } t_1 = \frac{t_2}{\frac{s_2^2 + t_2^2}{t_2}}$$

que são funções analíticas dos seus argumentos, exceto para  $s_2 = t_2 = 0$ , que é a projeção estereográfica do polo norte, o qual não pertence a ambos  $V_1$  e  $V_2$ .

Anàlogamente obter-se-ia:

$$s_2 = \frac{s_1}{\frac{s_1^2 + t_1^2}{s_1}} \text{ e } t_2 = \frac{t_1}{\frac{s_1^2 + t_1^2}{t_1}}$$

que são também funções analíticas em todos os pontos que pertencem a  $V_1 \cap V_2$ , pois o único ponto singular corresponde a  $s_1 = t_1 = 0$ , projeção estereográfica do polo sul, que não pertence a  $V_1$ .

Então o segundo atlas é também analítico. Resta-nos verificar que ambos definem a mesma estrutura de variedade analítica. Ora, as funções:

$$s_1 = \frac{\cos v_1 \cos u_1}{1 + \operatorname{sen} v_1}; \quad t_1 = \frac{\cos v_1 \operatorname{sen} u_1}{1 + \operatorname{sen} v_1}$$

$$u_1 = \operatorname{arctg} \frac{t_1}{s_1}; \quad v_1 = \operatorname{arcsen} \frac{1 - (s_1^2 + t_1^2)}{1 + s_1^2 + t_1^2}$$

são analíticas, exceto para o polo sul. Mas, para este ponto, as funções abaixo o são:

$$s_2 = \frac{\cos v_1 \cos u_1}{1 - \operatorname{sen} v_1}; \quad t_2 = \frac{\cos v_1 \operatorname{sen} u_1}{1 - \operatorname{sen} v_1}$$

$$u_1 = \operatorname{arctg} \frac{t_2}{s_2}; \quad v_1 = \operatorname{arcsen} \frac{s_2^2 + t_2^2 - 1}{s_2^2 + t_2^2 + 1}.$$

X) Sobre a parábola cúbica de equação  $y = x^5$  (ver figura 21) com a topologia induzida pela de  $R^2$ , podemos definir dois atlas analíticos, os quais, no entanto, não definem

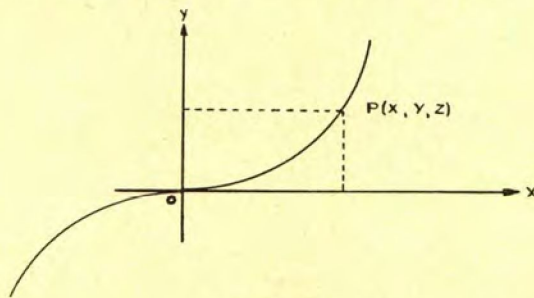


Figura 21

a mesma estrutura de variedade analítica sobre a curva.

Ambos os atlas contêm apenas uma carta, as quais denotaremos por  $(\alpha_1, U)$  para o primeiro e  $(\alpha_2, U)$  para o segundo, sendo  $U$  toda a curva,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  as projeções ortogonais sobre os eixos  $OX$  e  $OY$  respectivamente.

A coordenada de um ponto genérico  $P(x, y)$  da curva será  $X_1 = x$  na primeira carta e  $X_2 = y$  na segunda. De modo que:

$$X_2 = X_1^5 \text{ e } X_1 = X_2^{1/5}$$

e a segunda destas funções tem um ponto singular na origem. Então há duas estruturas distintas de variedade analítica a considerar.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] COHN, P., «LIE Groups», Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 1957.
- [2] CHEVALLEY, C., «Theory of LIE Groups», Princeton University Press, 1946
- [3] HÖNIG, C., «Álgebra Multilinear e Variedades Diferenciáveis», 1.º Colloquium Brasileiro de Matemática, São Paulo, 1957.