Soma aproximada de séries

por M. A. Fernandes Costa (1)

1. Cálculo da soma exacta de uma série.

O cálculo exacto da soma S de uma série convergente $\sum_0^\infty u_m$ faz-se por métodos analíticos que se reduzem, directa ou indirectamente, à definição

$$S = \lim S_n\,, \quad \text{com} \quad S_n = \sum_0^{n-1} u_m\,.$$

Podem ver-se alguns casos correntes em artigo anterior nesta revista [1].

Quando, porém, aqueles métodos não sejam eficazes há que recorrer a processos numéricos aproximados.

2. Cálculo aproximado de S.

Sendo $S = S_n + R_n$, com $S_n = \sum_0^{n-1} u_m$, $R_n = \sum_n^\infty u_m$, quando se tome S_n como valor aproximado de S comete-se um *erro sistemático* igual a R_n.

Pode obter-se um limite excedente de tal erro considerando uma *série majorante* de $\sum u_m$, ou seja uma série convergente $\sum \bar{u}_m$ cujos termos obedeçam à condição

$$|u_m| \leq \bar{u}_m$$

e que seja fàcilmente somável. Tem-se então

$$|R_n| \leq \bar{R}_n = \sum_n^\infty \bar{u}_m\,.$$

(1) Bolseiro do I. A. C. junto do Seminário de Cálculo Numérico e Máquinas Matemáticas.

Assim, pretendendo-se S com um erro absoluto inferior a 10^{-k}, tomar-se-á um número n de termos que garanta

$$\bar{R}_n < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}\,,$$

tendo depois o cuidado, no cálculo efectivo de S_n, de não cometer erro superior a $\frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$.

EXEMPLO

Número de termos a tomar para obter $\sum_1^\infty 1/m^2$ com um erro inferior a 10^{-5}.

Fàcilmente se obtém uma boa majorante notando que

$$u_m = \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) = \bar{u}_m$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right); \end{aligned}$$

tem-se portanto

$$\bar{R}_{n+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad \text{se} \quad n \geq 2000\,.$$

Em [1, § 2] descrevem-se algumas técnicas para a obtenção de majorantes.

3. Cálculo de S_n.

Regra geral, convirá calcular os sucessivos u_m determinando prèviamente as razões

$$\rho_m = u_m / u_{m-1}$$

e utilizando a relação

$$u_m = \rho_m \cdot u_{m-1} \,.$$

Este processo, particularmente útil no caso de séries de potências, simplifica e sistematiza os cálculos, prestando-se ainda à introdução de verificações intermédias.

EXEMPLO

Calcular com seis decimais exactas (6 D)

$$I_0(x_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m\,!)^2} \left(\frac{x_p^2}{4}\right)^m$$

onde $x_p = p\,\frac{\pi}{8}$, para $p = 21$.

Utilizando uma majorante geométrica [1] fàcilmente se obtém a limitação

$$R_n < \frac{\left(\frac{1}{n\,!}\right)^2 \left(\frac{x_p^2}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{x_p^2}{4}} \,.$$

Deduz-se daqui que, para assegurar 6 D, basta tomar 16 termos quando $p = 21$.

Obter-se-ão então em primeiro lugar as razões

$$\rho_m = \frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{1}{m^2}\,\frac{x_p^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \times 17{,}00192135 \quad (m = 1\,,2\,,\cdots,15)$$

e, a partir deles, os termos sucessivos pela relação

$$u_m = \rho_m \cdot u_{m-1} \,,$$

com $u_0 = 1$.

Uma boa verificação dos ρ_m é dada pela identidade

$$\sum_1^{15} \rho_m = \frac{x_p^2}{4} \sum_1^{15} \frac{1}{m^2}$$

onde se substituirá $\sum_1^{15} \frac{1}{m^2}$ pelo seu valor, obtido independentemente com suficiente número de decimais.

O quadro final de cálculo é o seguinte:

m	ρ_m	u_m
0		1,00000000
1	17.00192134	17,00192134
2	4,25048033	72,26633222
3	1.88910237	136,51849946
4	1,06262088	145,06729881
5	0,68007685	98,65691161
6	0,47227559	46,59325113
7	0,34697798	16,16683215
8	0,26565502	4,29480011
9	0.20990026	0,45229310
10	0,17001921	0,07689851
11	0,14051174	0,01080514
12	0,11806889	0,00127578
13	0,10060308	0,00012834
14	0,08674449	0,00001113
15	0,07556409	0,00000084
		538,107260

Caso se pretendesse o valor de $I_0(x_p)$ para sucessivos valores de p, por exemplo para $p = 1\,,3\,,5\,,\cdots,21$, o labor exigido pelo emprego de um simples calculador de secretária seria já considerável.

Julga-se interessante expor o procedimento mecanográfico que se seguiu para resolver este mesmo problema, utilizando as seguintes máquinas de cartões perfurados: uma calculadora de programação externa, uma tabuladora e uma reprodutora [1].

---

(1) Uma calculadora de programação externa é uma máquina que se leva a cumprir determinado «programa» de cálculo mediante um painel de ligações. Uma máquina desse tipo dispõe de diversas memórias e de um ou mais acumuladores; as opera-

Sequência das operações:

a. Prepararam-se na reprodutora grupos G_p de 15 cartões detalhe $D_{p,m}$, contendo m e m^2 $(m = 1, 2, \cdots, 15)$. Os cartões de cada grupo foram assinalados por p $(p = 1, 3, \cdots, 21)$.

b. Fez-se preceder cada grupo G_p de um cartão mestre M_p, contendo:

$$p\,,\ p^2 \ \text{e} \ K = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 0{,}0385531\,0963\,.$$

Sobre cada M_p calculou-se $\frac{1}{4} x_p^2 = K p^2$; e, para cada cartão $D_{p,m}$ de G_p, calculou-se

$$\rho_m = \left(\frac{x_p^2}{4}\right) : m^2\,,$$

perfurando ρ_m no próprio $D_{p,m}$.

Os valores de ρ_m foram, assim, obtidos por uma primeira passagem na calculadora.

c. Substituidos os M_p por $D_{p,0}$ contendo $u_0 = 1$, voltaram a introduzir-se os cartões na calculadora para obter os u_m pela relação $u_m = \rho_m \cdot u_{m-1}$, perfurando o valor de cada u_m sobre $D_{p,m}$.

Nota — Embora fosse dispensável, para os primeiros valores de p, levar m até 15, adoptou-se procedimento uniforme a fim de evitar manipulação dos cartões.

d. Calcularam-se na tabuladora as somas

$$I_0(x_p) = \sum_{m=0}^{15} u_m(x_p)\,.$$

ções programadas repetem-se, em princípio, sobre os sucessivos cartões, sendo porém admissíveis certas alternativas denunciáveis por códigos intencionalmente perfurados nos cartões. Os resultados podem ser perfurados cartão a cartão ou apenas em certos cartões para o efeito introduzidos na localização própria.

A tabuladora é uma máquina que pode comparar-se a uma somadora com maior capacidade de acumulação e impressão, mas cuja maleabilidade é infinitamente superior graças a certos dispositivos de selecção.

A reprodutora serve para reproduzir a informação contida em determinado grupo de cartões sobre outro ou outros grupos de cartões segundo um critério de correspondência prefixado.

3. Séries lentamente convergentes.

Relativamente a séries de convergência lenta, torna-se por vezes eficaz a sua transformação em novas séries de igual soma mas de convergência acelerada.

3. 1. Transformação de Kummer.

Consiste em subtrair da série dada uma outra série de soma conhecida mas cujos termos tenham construção semelhante.

Sendo $S = \sum a_n$ uma série lentamente convergente, e $C = \sum c_n$ uma série de soma conhecida, com

$$\lim a_n / c_n = \gamma \neq 0\,,$$

tem-se

$$S = \sum_0^\infty a_n = \gamma\, C + \sum_0^\infty \left(1 - \gamma \frac{c_n}{a_n}\right) a_n\,.$$

EXEMPLO

Volte a considerar-se a série $S = \sum 1/n^2$, que já no exemplo do § 2 se reconheceu ser lentamente convergente. Tem-se aqui $a_n = 1/n^2$ e, tomando $c_n = 1/n(n+1)$, vem $\gamma = 1$, $\sum c_n = 1$, donde

$$S = 1 + \sum \frac{1}{n^2(n+1)}\,.$$

Repetindo a transformação com

$$a_n = \frac{1}{n^2(n+1)} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

vem $\gamma = 1$, $\sum c_n = \frac{1}{4}$ e

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{4} + \sum \frac{2}{n^2(n+1)(n+2)} .$$

Prosseguindo desta maneira, acha-se

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + $$
$$+ \sum_1^\infty \frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} .$$

A série do segundo membro, mesmo com p moderado, converge com rapidez apreciável.

3. 2. Transformação de Euler.

Pondo $a_n = E^n a_0$, com $E = 1 + \Delta$, acha-se

$$\sum_0^\infty (-)^n a_n = \sum (-)^n E^n a_0 = \frac{1}{1+E} a_0 =$$
$$= \frac{1}{2+\Delta} a_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right)^{-1} a_0$$

e, daqui,

$$\sum_0^\infty (-)^n a_n = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{(-)^n}{2^n} \Delta^n a_0 .$$

Para séries de potências, use-se antes a transformação

$$\sum_0^\infty (-x)^n a_0 = \sum_0^\infty \frac{(-x)^n}{(1+x)^n} \Delta^n a_0 .$$

Note-se que a transformada de Euler não é necessàriamente de convergência mais rápida do que a série original. Servem de exemplo:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_0^\infty (-)^n \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{3}{8}\right)^n .$$

São condições suficientes para que a série transformada convirja mais ràpidamente do que a original:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad (-)^k \Delta^k a_n > 0 .$$

Com efeito tem-se, por um lado,

$$|R_n| = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots$$
$$= -\Delta a_n - \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+4} - \cdots$$

e, por ser $-\Delta a_{p+1} < -\Delta a_p$ (pois $\Delta^2 a_p > 0$),

$$|R_n| > \frac{1}{2}(-\Delta a_n - \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} - \cdots)$$
$$= \frac{1}{2} a_n \geq \frac{1}{2} a_0 r^n .$$

Por outro lado, quanto ao resto da série transformada, tem-se

$$|R'_n| = (-)^n \left(\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} - \frac{\Delta^{n+1} a_0}{2^{n+2}} - \cdots\right)$$
$$= \frac{|\Delta^n a_0|}{2^{n+1}} + \frac{|\Delta^{n+1} a_0|}{2^{n+2}} + \cdots$$

Mas a sucessão $|\Delta^p a_0|$ é decrescente, porquanto

$$|\Delta^{p+1} a_0| - |\Delta^p a_0| = (-)^{p+1}(\Delta^p a_1 - \Delta^p a_0) -$$
$$-(-)^p \Delta^p a_0 = (-)^{p+1} \Delta^p a_1 =$$
$$= -(-)^p \Delta^p a_1 < 0 .$$

Então,

$$|R'_n| < \frac{|\Delta^n a_0|}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{|\Delta^n a_0|}{2^n} < \frac{a_0}{2^n} ,$$

pois $|\Delta^n a_0| < |\Delta^{n-1} a_0| < \cdots < a_0$.

Daqui vem

$$\left|\frac{R'_n}{R^n}\right| \leq \frac{\dfrac{a_0}{2^n}}{\dfrac{1}{2} a_0 r^n} = \frac{2}{(2r)^n} .$$

A convergência torna-se tanto mais acelerada quanto maior for r.

EXEMPLO

Para se obter directamente a soma da série alternada

$$\sum_{0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{n+1}$$

com um erro inferior a $1/10^3$ seriam necessários mais do que 1000 termos. Recorrendo à transformação de EULER, o problema simplifica-se, porém, extraordinàriamente.

Neste caso é simples obter a expressão teórica da transformação, porquanto (1)

$$a_n = \frac{1}{n+1} = n^{[-1]}$$

e, como

$$\Delta\, n^{[-1]} = -\, n^{[-2]}\,,$$

logo se acha, por indução,

$$\Delta^k a_n = \Delta^k n^{[-1]} = (-)^k k!\, n^{[-(k+1)]} = \\ = \frac{(-)^k k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}.$$

Tem-se então

$$\Delta^k a_0 = \Delta^k 0^{[-1]} = \frac{(-)^k}{k+1}$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,2^n} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}.$$

Acelerar-se-ia a convergência fazendo

$$\sum_{0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{0}^{n-1}(-)^k \frac{1}{k+1} + \\ + \sum_{n}^{\infty}(-)^k \frac{1}{k+1} = \\ = S_n + (-)^n \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-)^k}{2^k}\Delta^k a_n\,.$$

Na prática corrente não há necessidade de deduzir a expressão da transformada, estabelecendo-se logo o quadro de diferenças:

n	$10^4/(n+1)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	10000	-5000	3533	-2899
1	5000	-1467	634	-301
2	3333	-833	333	-166
3	2500	-500	167	-72
4	2000	-333	95	-36
5	1667	-238	59	
6	1429	-179		
7	1260			

Observe-se como, se tomarmos a soma dos quatro primeiros termos e aplicarmos a transformação à série resto, bastam as diferenças de a_4 até à 3.ª ordem (sublinhadas) para se obter S com erro inferior a $1/10^3$:

$$10^4 S = 5833 + \frac{1}{2}\Big[2000 + \frac{1}{2}(333) + \\ + \frac{1}{4}(95) + \frac{1}{8}(36) + \cdots\Big] \approx \\ \approx 5833 + 1000 + 83 + 12 + 2\,,$$

donde

$$S = 0{,}693\cdots$$

Uma boa verificação seria a que consiste no recálculo de S considerando por exemplo $S = S_5 + R_5$ e aplicando depois a transformação a R_5.

4. Uso da fórmula de Euler-Maclaurin.

Sabe-se que [2, pag. 161]

$$\sum_{0}^{n} f_k = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \\ + \frac{1}{12}(f'_n - f'_0) - \frac{1}{720}(f'''_n - f'''_0) + \cdots$$

Se $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(m)}(x) = 0$, tem-se então

(1) $n^{[-r]}$ representa o polinómio factorial recíproco $1/(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$. Veja-se, por exemplo, [2, pág. 47].

$$\sum_0^\infty f_k = \int_0^\infty f(x)\,dx + \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} f_0' + \\ + \frac{1}{720} f_0''' - \frac{1}{30240} f_0^{\mathrm{v}} + \cdots$$

EXEMPLO

Para a série que serviu de exemplo no § 2 tem-se

$$R_7 = \sum_0^\infty \frac{1}{(m+8)^2}.$$

Como $f(x) = 1/(8+x)^2$, é aqui

$$f'(0) = -\frac{2}{8^3},\ f'''(0) = -\frac{24}{8^5},$$

$$f^{\mathrm{v}}(0) = -\frac{720}{8^7}, \cdots \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{8},$$

e portanto

$$R_7 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{64} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{8^3} - \frac{1}{720}\,\frac{24}{8^5} + \cdots$$
$$= 0{,}125 + 0{,}0078125 + 0{,}0003255$$
$$- 0{,}0000010 + \cdots = 0{,}1331370,$$
$$S = S_7 + R_7 = 1{,}9956349 + 0{,}1331370$$
$$= 2{,}128772.$$

Verificar-se-á recalculando S a partir de $S_{10} + R_{10}$, por exemplo.

5. Outros métodos.

Caso $y = \sum a_j x^j$ convirja lentamente para $x = x'$, pode procurar-se uma equação diferencial (linear) que y satisfaça e obter, por métodos numéricos, o valor $y(x')$ da sua solução particular que obedeça às condições iniciais

$$y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1,\ y''(0) = 2a_2, \cdots$$

Por exemplo,

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

é a solução de

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = 1$$

para a qual $y(0) = 0$.

Outros métodos de cálculo de soma de séries encontram-se nas referências [3] a [6].

REFERÊNCIAS

[1] Gaz. Matemática, n.º 11, págs. 4-7.
[2] K. S. Hunz, «Numerical Analysis», McGraw, 1957.
[3] Proc. Camb. Phil. Soc., **46** (1950), p. 436.
[4] Phil. Mag., **22** (1936), p. 754; **40** (1949), p. 188.
[5] Jour. Math. Physics, **28** (1950), p. 272.
[6] Nat. Bur. Stand. Jour. Res., **46** (1951), p. 56.

Um adendo a «uma demonstração por indução finita»

por Ruy Madsen Barbosa

Lemos no n.º 53, um interessante artigo do senhor H. Silva Lobo, onde prova pela indução finita as fórmulas:

1) $$\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}$$

e

2) $$\sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{n}{p} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

Acreditando fornecer um adendo positivo ao trabalho citado, ouso acrescentar a de-