Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações

por J. M. Gil

(Conclusão)

56 — Arranjos com elementos repetidos.

A mesma operação executada apenas p vezes, com $p<n$, dá origem a conjuntos ordenados de p elementos, eventualmente com elementos repetidos, quando muito p vezes. Chamamos a cada um destes conjuntos *arranjos completos* dos n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, p a p.

57 — Representaremos o número destes arranjos por $\alpha_{n\,|\,p}$. É

$$\alpha_{n\,|\,p} = n \times n \times \cdots \times n \quad \text{ao todo } p \text{ factores} \\ = n^p .$$

58 — Propriedades de $\alpha_{n\,|\,p}$.

a) É imediato que

$$\alpha_{n\,|\,p} \cdot \alpha_{n\,|\,n-p} = \Pi_n .$$

b) Fórmulas de recorrência nos índices

1) $\alpha_{n\,|\,p} = n \cdot n^{p-1} = n \cdot \alpha_{n\,|\,p-1}$

2) $\alpha_{n\,|\,p} = n^p \cdot \dfrac{(n-1)^p}{(n-1)^p} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^p \alpha_{n-1\,|\,p}$

3) $$\alpha_{n\,|\,p} = n \cdot \frac{n^{p-1}}{(n-1)^{p-1}} \cdot (n-1)^{p-1} = \\ = n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1}$$

4) $$\alpha_{n\,|\,p} = n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1}$$

$$= [(n-1)+1] \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1}$$
$$= (n-1) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1} + \\ + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p} + \\ + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1\,|\,p-1}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} (\alpha_{n-1\,|\,p} + \alpha_{n-1\,|\,p-1})$$

59 — Combinações com elementos repetidos.

Numeremos $p+r+1$ lugares consecutivos da seguinte maneira

$$|1|\,|2|\,|3|\cdots|p|\,|e|\,|f|\,|1|\,|2|\cdots|r-1| .$$

Escolhamos agora r destes lugares. Podemos tomá-los todos consecutivos ou constituir um certo número de blocos de lugares consecutivos. Preenchamos os lugares de cada bloco, com elementos a_l, sendo l igual ao número do primeiro lugar da esquerda do bloco. Obtemos assim agrupamentos de r elementos de entre

$$a_1, a_2, \cdots, a_p, a_e, a_f$$

podendo cada elemento ser repetido, até r vezes, em algum agrupamento.

60 — Estes conjuntos chamam-se *combinações completas* dos $p+2$ elementos $a_1, a_2, \cdots, a_p, a_e, a_f$, tomados r a r.

61 — Representaremos o número das combinações completas dos $p+2$ elementos, r a r, por $\Gamma_{p+2|r}$.

Este número é também o das possíveis escolhas de r lugares entre $p+2+r-1 = p+r+1$. Assim

$$\Gamma_{p+2|r} = \binom{p+r+1}{r}$$

e, fazendo $p+2=n$, vem

$$\Gamma_{n|r} = \binom{n+r-1}{r}$$

sem qualquer restricção dos valores relativos de n e r.

62 — Propriedades de $\Gamma_{n|p}$.

a) É

$$P_{p+q+1|p,q,1} = P_{p+q+1|p,q} =$$
$$= (q+1)\binom{p+q+1}{q+1} = (q+1)\,\Gamma_{p+1|q+1}$$

e, para $p+1=n$ e $q+1=r$

$$\Gamma_{n|r} = \frac{1}{r}\cdot P_{n+r-1|n-1,r-1}$$

b) Fórmulas de recorrência nos índices

1) $$\Gamma_{n|r} = \frac{1}{r}P_{n+r-1|n-1,r-1,1}$$
$$= \frac{1}{r}\cdot(n+r-1)\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{r}\,\Gamma_{n|r-1}$$

2) $$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{r}\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$= \frac{n+r-1}{r}\cdot\frac{r}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\,\Gamma_{n-1|r}$$

3) $$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\cdot\frac{n+r-2}{r}\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$= \frac{(n+r-1)(n+r-2)}{(n-1)r}\,\Gamma_{n-1|r-1}$$

4) $$\Gamma_{n|r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-2}{r}$$
$$+\binom{n+r-2}{r-1} = \Gamma_{n-1|r} + \Gamma_{n|r-1}$$

5) $$\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{n|s} = \sum_{s=0}^{k}\binom{n+s-1}{s} = \binom{n}{k} =$$
$$= \Gamma_{n+1|k} \text{ ou } \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{n|s} = \Gamma_{n+1|k}.$$

c) $$\Gamma_{p+1|r} = \binom{p+r}{r} = \binom{p+r}{p} = \Gamma_{r+1|p}$$

e para $p+1=n$

$$\Gamma_{n|r} = \Gamma_{r+1|n-1}.$$

d) $$\Gamma_{n|r} = \Gamma_{r+1|n-1} = \frac{n+r-1}{r}\,\Gamma_{r|n-1}$$
$$= \frac{n+r-1}{r}\cdot\frac{n}{n+r-1}\,\Gamma_{r|n}$$
$$= \frac{n}{r}\,\Gamma_{r|n}.$$

63 — Ocupação livre de caixas diferentes.

Consideremos p elementos indistinguíveis $a\,a$ a distribuir por n caixas diferentes, sem limitação do número de elementos que podem ficar em cada caixa. Estatìsticamente elementos de BOSE ou bosões.

A distribuição dos $a\,a$ equivale à formação de blocos de $a\,a$, cada um deles constituído pelos elementos que ficam em cada caixa.

Precisamos dum processo de fraccionar o bloco inicial dos p elementos $a\,a$, supostos alinhados em, quando muito, n blocos. Basta-nos intercalar $n-1$ elementos iguais $b\,b$. Estes $n-1$ elementos $b\,b$ separam, quando muito, n blocos; precisamente n blocos, quando cada b é elemento de separação dos $a\,a$. Quando a separação é feita por blocos de $b\,b$ o número de blocos separados é inferior a n. Quer dizer: cada permutação dos elementos

$$\underset{p\,a\,a}{a\,,a\,,\cdots,a}\,,\underset{n-1\;b\,b}{b\,,b\,,\cdots,b}$$

corresponde a uma distribuição dos elementos $a\,a$ pelas caixas. Tantas distribuições possíveis quantas as permutações, isto é,

$$D_{p\,|\,n}=\binom{n+p-1}{p}=\Gamma_{n\,|\,p}$$

com $D_{p\,|\,n}$ número de distribuições possíveis de p elementos por n caixas.

64 — Ocupação restringida de caixas diferentes.

Suponhamos que os p elementos indistinguíveis tem de ser distribuídos por n caixas diferentes, deixando, quando muito, um em cada caixa. Estatìsticamente estes elementos chamam-se fermiõe, ou elementos de FERMI.

65 — Para fazer a distribuição, basta escolher as p caixas, que ficarão ocupadas; as restantes $n-p$ ficarão vazias. São possíveis tantas distribuições quantas as escolhas possíveis de p caixas de entre as n. Assim

$$D_{p\,|\,n,1}=\binom{n}{p}$$

é o número das distribuições possíveis de p fermiões por n caixas diferentes.

66 — Estudemos o caso geral da ocupação de caixas diferentes restringida a um número máximo, m, de elementos por caixa.

Representaremos por $D_{i\,|\,n,m}$ o número de distribuições possíveis de i elementos por n caixas, cada caixa com o maximo de m elementos.

Não é possível distribuir pelas n caixas mais do que $n\cdot m$ elementos. Assim $D_{i\,|\,n,m}=0$ para $i>n\cdot m$.

Seja $D_{n,m}$ o número das distribuições possíveis de objectos indistinguíveis pelas n caixas, cada uma com o máximo de m objectos. É

$$D_{n,m}=\sum_{i=0}^{m\cdot n}D_{i\,|\,n,m}$$

considerando as caixas vazias como uma distribuição de zero objectos.

67 — Os valores de $D_{i\,|\,n,m}$ podem obter-se fàcilmente por uma multiplicação de polinómios.

Representemos as caixas por $x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n$ e ponhamos em índices superiores o número de elementos que nelas podem ser colocados, assim

$$\begin{matrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ x_2^0 & x_2^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{matrix}$$

Consideremos o caso das distribuições pèlas duas caixas x_1 e x_2. As distribuições possíveis correspondem aos pares $x_1\,x_2$ que se podem formar com as duas primeiras linhas do quadro. Os pares cuja soma dos índices superiores é a mesma correspondem à distribuição do mesmo número de elementos, precisamente igual a essa soma.

Os pares $x_1 x_2$ podem ebter-se fàcilmente, considerando as expressões

$$x_1^0 + x_1^1 + x_1^2 + \cdots + x_1^m$$

e

$$x_2^0 + x_2^1 + x_2^2 + \cdots + x_2^m$$

como polinómios e multiplicando-os. Assim

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m)(x_2^0 + x_2^1 + \cdots + x_2^m) =$$

$$= x_1^0 x_2^0 + \left| \begin{array}{l} x_1^1 x_2^0 + \\ x_1^0 x_2^1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x_1^2 x_2^0 + \cdots + \\ x_1^1 x_2^1 \\ x_1^0 x_2^2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x_1^m x_2^0 + \\ \cdots \\ x_1^0 x_2^m \end{array} \right.$$

$$+ \left| \begin{array}{l} x_1^m x_2^1 + \cdots + x_1^m x_2^m = S_{0\,|\,x_1 x_2} + \\ \cdots \\ x_1^1 x_2^m \end{array} \right.$$

$$+ S_{1\,|\,x_1 x_2} + \cdots + S_{m\,|\,x_1 x_2} + S_{m+1\,|\,x_1 x_2} + \\ + \cdots + S_{2m\,|\,x_1 x_2}$$

com $S_{i\,|\,x_1 x_2} = \sum x_1^\alpha x_2^\beta$ e o somatório estendido a todos os pares ordenados de inteiros (α, β), tais que $\alpha + \beta = i$. Claro que é $D_{i\,|\,2, m}$ o número de parcelas de $S_{i\,|\,x_1 x_2}$.

É ainda

$$D_{i\,|\,2, m} = \sum_{j=0}^{m} D_{i-j\,|\,1, m}$$

com $D_{p\,|\,1, m} = 1$ para $p \overline{\leq} m$ e $D_{p\,|\,1, m} = 0$ para $p > m$.

68 = Façamos o produto dos n factores seguintes

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m)(x_2^0 + x_2^1 + \cdots + x_2^m) \cdots \\ \cdots (x_n^0 + x_n^1 + \cdots + x_n^m) = S_{0\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} + \\ + S_{1\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} + \cdots + S_{nm\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n}$$

então

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m) \cdots (x_n^0 + x_n^1 + \cdots + x_n^m) \\ (x_{n+1}^0 + x_{n+1}^1 + \cdots + x_{n+1}^m) = S_{0\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 + \\ + S_{1\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 + \cdots + S_{nm\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = S_{0\,|\,x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} + S_{1\,|\,x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} + \cdots + \\ + S_{(n+1)m\,|\,x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}$$

com

$$S_{i\,|\,x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} = \sum_{j=0}^{m} S_{i-j\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^j$$

e

$$S_{p\,|\,x_1 x_2 \ldots x_n} = 0 \text{ para } p > nm .$$

Consequentemente

$$(1) \qquad D_{i\,|\,n+1, m} = \sum_{j=0}^{m} D_{i-j\,|\,n, m}$$

para qualquer $n \geqslant 1$.

69 — Claro que é ainda

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^n = \sum_{i=0}^{mn} D_{i\,|\,n, m} x^i$$

em vez de efectuar as sucessivas multiplicações para obter os coeficientes $D_{i\,|\,n, m}$, podemos calcular estes por recorrência. Pois é, por aplicação sucessiva de (1)

$$D_{i\,|\,n, m} = \sum_{j_1=0}^{m} \sum_{j_2=0}^{m} \sum_{j_3=0}^{m} \cdots \\ \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{m} D_{i-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1}\,|\,1, m}$$

e

$$D_{i-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1}\,|\,1, m} = 1$$

porque são os coeficientes de $x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m$ ou de $1 + x + x^2 + \cdots + x^m$. Então

	$D_{0\,|\,1,m}$	$D_{1\,|\,1,m} \cdots D_{m\,|\,1,m}$	$D_{m+1\,|\,1,m} \cdots D_{2m\,|\,1,m}$
	1	1 ··· ← 1	0 ······· 0
$n=2$	1	2 3 □ ···········	2 1
$n=3$	1	3 6 ················	

O elemento de cada linha é a soma de $m+1$ elementos da linha superior, contados para a esquerda do elemento colocado por cima dele, e incluindo aquele.

70 — Desenvolvimento da potência $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$.

É

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2 = x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + \cdots + x_k\,x_k + \left|\begin{array}{l} x_1\,x_2 + \cdots + \\ x_2\,x_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1\,x_k + \\ x_k\,x_1 \end{array}$$

$$+ \left|\begin{array}{l} x_2\,x_3 + \cdots + \\ x_3\,x_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_2\,x_k + \cdots + \\ x_k\,x_2 \end{array} \left|\begin{array}{l} x^{k-1}\,x_k \\ x_k\,x_{k-1} \end{array}\right.$$

$$= \sum P_{2\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros positivos $p_1, p_2, \cdots, p_k$, tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k = 2$.

71 — Ponhamos

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com $p_1+p_2+\cdots+p_k = n$.

É

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1} = $$
$$= \left(\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}\right) \cdot$$
$$\cdot\,(x_1+x_2+\cdots+x_k)\,.$$

Os termos $P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$,

$P_{n\,|\,p_1+1,p_2-1,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1+1}\, x_2^{p_2-1} \cdots x_k^{p_k}, \cdots,$

$P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k-1}\, x_1^{p_1+1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k-1}$

multiplicados respectivamente por $x_1, x_2, \cdots, x_k$ dão o mesmo termo do desenvolvimento de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1}$. Precisamente o de parte literal $x_1^{p_1+1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$. O coeficiente deste termo é assim

$$P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k} + P_{n\,|\,p_1+1,p_2-1,p_3\ldots p_k} + \cdots +$$
$$+ P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k-1} = p_1\, P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} +$$
$$+ p_2\, P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} + \cdots + p_k\, P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} =$$
$$= (p_1+p_2+\cdots+p_k)\, P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} =$$
$$= n \cdot P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} = P_{n+1\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k}\,.$$

Consequentemente, atendendo à permutabilidade dos índices $p\,p$, é

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1} =$$
$$= \sum P_{n+1\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros $p_1, p_2, \cdots, p_k$ tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k = n+1$.

72 — O número de termos do desenvolvimento

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n =$$
$$= \sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação

$$p_1+p_2+\cdots+p_k = n\,.$$

Cada uma destas soluções constitui uma distribuição de n objectos indistinguíveis — as unidades de n — por k caixas diferentes, sem restricção do número de objectos que pode ficar em cada caixa. Ao todo temos $D_{n\,|\,k} = \Gamma_{k\,|\,n}$ distribuições e também $\Gamma_{k\,|\,n}$ termos no desenvolvimento.

73 — Em particular, para $k=2$ é

$$(x_1+x_2)^n = \sum P_{n\,|\,p_1,p_2}\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} =$$

com $p_1+p_2 = n$

$$= \sum_{p_1=0}^{n} \binom{n}{p_1} x_1^{p_1}\, x_2^{n-p_1}$$

e o número de termos do desenvolvimento

$$D_{n\,|\,2}=\Gamma_{2\,|\,n}=\binom{2+n-1}{n}=n+1\,.$$

74 — Um polinómio completo, de grau n, a k variáveis, é a soma de $n+1$ polinómios homogéneos, a k variáveis, de graus $0,1,\cdots,n$. É assim fácil contar o número $N_{n\,|\,k}$ de termos do polinómio

$$N_{n\,|\,k}=\sum_{i=0}^{n}\Gamma_{k\,|\,i}$$

$$=\Gamma_{k+1\,|\,n}=\binom{n+k}{n}.$$

75 — De

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\,x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os valores inteiros e positivos de $p_1,p_2,\cdots,p_k$, tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k=n$ vem que

$$\left(1+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_k}{x_1}\right)^n=$$

$$=\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{p_k}$$

e, fazendo

$$\frac{x_2}{x_1}=y\quad\frac{x_3}{x_1}=y^2\cdots\frac{x^k}{x_1}=y^{k-1}$$

$$(1+y+y^2+\cdots+y^{k-1})^n=$$

$$=\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\;y^{p_2+2p_3+\ldots+(k-1)p_k}$$

76 — Com $p_2+2p_3+\cdots+k\,p_{k+1}=r$ e $p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}=n$ é

$$(1+y+y^2+\cdots+y^k)^n=$$

$$=\sum_{r=0}^{nk}P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_{k+1}}\;y^r\,.$$

Confrontando com o § 69, onde

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^n=\sum_{r=0}^{nk}D_{r\,|\,n,k}\,x^r$$

conclui-se que

$$D_{r\,|\,n,k}=\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_{k+1}}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros positivos $p_1,p_2,\cdots,p_{k+1}$, tais que

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}=n$$

e

$$p_2+2p_3+\cdots+k\,p_{k+1}=r\,.$$

REFERÊNCIAS

B. J. Caraça, *Lições de Álgebra e Análise*, vol. I, 2.ª ed., Lisboa, 1945.

J. E. Freund, *Restricted Occupancy Theory*, A. Mathematical Monthly, 1956, pág. 20.

J. Morgado, *Reticulados*, Junta de Investigação Matemática, 1956.

J. D. Bankier, *Generalizations of Pascal's Triangle*, A. Mathematical Monthly, 1957, pág. 416.

L. E. Clarke e J. Singer, *On Circular Permutations*, A. Mathematical Monthly, 1958, pág. 609.

C. U. P., *Elementary Mathematics of Sets With Applications*, Mathematical Ass. of America, 1958.

J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New-York, J. Wiley and Sons, Inc., 1958.

Report of Comission on Mathematics: Appendices, College Entrance Examination Board, New-York, 1959.

H. Pogorzelski, *Generalization of a Peano Symbol*, A. Mathematical Monthly, 1959, pág. 885.