Produtos Infinitos

por Graciano Neves de Oliveira

§ 1 — Consideremos o produto infinito

$$\prod_{0}^{\infty} \omega_n \tag{1. 1}$$

em que supomos $\omega_n > 0$. Seja

$$P_m = \prod_{0}^{m-1} \omega_n$$

teremos

$$\log\ P_m = \sum_{0}^{m-1} \log \omega_n .$$

Passando aqui aos limites para $m = \infty$ conclui-se que:

I. Se o produto (1. 1) é convergente e diferente de zero é convergente a série

$$\sum_{0}^{\infty} \log \omega_n \tag{1. 2}$$

e representando por P e S respectivamente os valores do produto infinito e da série tem-se

$$\log P = S .$$

Inversamente se a série (1. 2) é convergente é também convergente e diferente de zero o produto (1. 1).

II. Se o produto infinito é nulo ter-se-á

$$\sum_{0}^{\infty} \log \omega_n = -\infty$$

e inversamente.

III. Se o produto (1. 1) é divergente, diverge também a série (1. 2).

IV. Se a série (1. 2) diverge o prodruto (1. 1) é divergente ou nulo.

§ 2 — A consideração da série (1. 2) em correspondência com o produto (1. 1) permite tirar fàcilmente de propriedades conhecidas das séries outras para produtos infinitos. Assim como a condição necessária e suficiente de convergência da série (1. 2) é que seja

$$\left| \sum_{m}^{m+p} \log \omega_n \right| < \varepsilon$$

para $m > m_1(\varepsilon)$ segue-se que

I. A condição necessária é suficiente para que o produto (1. 1) convirja para um número superior a zero é que seja

$$1 - \delta < \omega_m \cdots \omega_{m+p} < 1 + \delta \tag{2. 1}$$

para $m > m_1(\delta)$.

II. Desta condição segue-se imediatamente, fazendo $p \to +\infty$, que em produto infinito convergente e não nulo o resto de ordem m, $Q_m = \omega_m \cdots \omega_{m+p} \cdots$ tende para a unidade, quando m tende para o infinito.

III. Produto infinito em que seja $\omega_n < 1$ é sempre convergente.

De facto neste caso teremos $\log \omega_n < 0$ e portanto a série (1. 2) é convergente ou divergente para $-\infty$, isto é, (1. 1) é convergente, significativo ou nulo. Se for significativo dá-se o caso da série (1. 2) convergir. Portanto $\log \omega_n$ tende para zero ou seja ω_n tende para a unidade. Quer dizer, na hipótese posta o produto só pode ser significativo se ω_n tender para 1.

IV. Em qualquer produto infinito convergente e não nulo ω_n tende para a unidade.

É o que imediatamente se concluiu da igualdade (2. 1), fazendo $p=0$.

§ 3 — Seguem-se agora alguns critérios de convergência para produtos infinitos de factor geral superior à unidade.

I. Se existe um número $k>1$ tal que $\omega_{n+1}^k < \omega_n$, a partir de certa ordem, então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

De facto de $\omega_{n+1}^k < \omega_n$ tira-se

$$\frac{\log \omega_{n+1}}{\log \omega_n} < \frac{1}{k} < 1$$

e pelo critério d'Alembert convergirá a série (1. 2) e portanto o produto (1. 1).

II. Se existem os números $a>1$ e $k<1$ tais que $\omega_n < a^{(k^n)}$, a partir de certa ordem, então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

Teremos

$$\log \omega_n < k^n \log a$$

e o segundo membro é termo geral duma série convergente pelo que $\sum \log \omega_n$ converge, ficando pois estabelecida a proposição.

III. Se existirem números positivos

$$\alpha\,, k_0\,, k_1\,, \cdots k_n \cdots$$

que façam, a partir de certa ordem,

$$\omega_{n+1}^{\alpha + k_{n+1}} < \omega_n^{k_n}$$

então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

De facto daquela condição vem

$$\frac{\log \omega_{n+1}}{\log \omega_n} < \frac{k_n}{\alpha + k_{n+1}}$$

e o teorema de Kummer sobre séries permite afirmar a convergência de $\sum \log \omega_n$. Converge pois o produto para um valor diferente de zero.

Em particular, fazendo $k_n = n$ tem-se que o produto converge se se verificar

$$\omega_{n+1}^{\alpha+n+1} < \omega_n^n$$

o que aliás também se conclui, aplicando o critério I.

§ 4 – Neste parágrafo e seguintes não suporemos já, salvo indicação em contrário, que $\omega_n > 1$.

Vamos provar que se a sucessão

$$\omega_0\,, \frac{1}{\omega_1}\,, \omega_2\,, \frac{1}{\omega_3}\,, \cdots$$

tende monotònicamente para a unidade $\prod \omega_n$ é convergente e significativo.

De facto nesta hipótese $\sum \log \omega_n$ é alternada decrescente de termo geral evanescente pelo que converge. Convergirá pois $\prod \omega_n$ que será diferente de zero.

§ 5 — Do teorema de Catalan [1] pode tirar-se a seguinte condição necessária de convergência para o produto $\prod \omega_n$:

Se $\prod \omega_n$ é convergente, diferente de zero, se $\omega_n > 1$ e se ω_n decresce, quando n cresce então

$$\lim \omega_n^n = 1\,.$$

De facto a série $\sum \log \omega_n$ verificará a hipótese do teorema de Catalan e portanto

[1] Cuja demonstração se pode ver em Vicente Gonçalves, *Lições de Cálculo e Geometria*, pág. 10.

$$\lim n \log \omega_n = 0$$

donde

$$\lim \omega_n^n = 1\,.$$

§ 6 — Suponhamos que $\prod \omega_n$ verifica a hipótese de convergência do § 3. I. Seja

$$Q_m = \omega_m \cdot \omega_{m+1} \cdots$$

pondo $\frac{1}{k} = h$ teremos

$$0 < \log Q_m = \log \omega_m + \log \omega_{m+1} + \log \omega_{m+2} + \\ + \cdots < \log \omega_m + h \log \omega_m + h^2 \log \omega_m + \cdots = \\ = \frac{1}{1-h} \log \omega_m = \log \omega_m^{\frac{1}{1-h}}$$

donde

$$1 < Q_m < \omega_m^{\frac{1}{1-h}}\,.$$

§ 7 — Se agora $\prod \omega_n$ satisfaz a hipótese do § 3. II. teremos

$$\log Q_m < (k^m + k^{m+1} + \cdots) \log a = \\ = \frac{k^m}{1-k} \log a = \log a^{\frac{k^m}{1-k}}$$

donde

$$1 < Q_m < a^{\frac{k^m}{1-k}}\,.$$

§ 8 — Consideremos um produto que cumpra a hipótese de § 4. Designemos o seu valor por P.

Teremos

$$\log P = \log \omega_0 + \cdots + \log \omega_n + \cdots$$

Como em série alternada decrescente de termo geral evanescente o erro que se comete, quando tomamos S_m (soma dos primeiros m termos) pela soma da série é em valor absoluto inferior ao módulo do primeiro termo desprezado temos

$$|\log P - \log P_m| < |\log \omega_m|$$

ou

$$(8.1) \qquad \left|\log \frac{P}{P_m}\right| < |\log \omega_m|$$

ou ainda designando por Q_m o resto de ordem m

$$|\log Q_m| < |\log \omega_m|$$

donde

$$-|\log \omega_m| < \log Q_m < |\log \omega_m|$$

supondo $\omega_m > 1$ teremos

$$\log \frac{1}{\omega_m} < \log Q_m < \log \omega_m$$

donde

$$\frac{1}{\omega_m} < Q_m < \omega_m$$

se tivéssemos suposto $\omega_m < 1$ chegar-se-ia a

$$\omega_m < Q_m < \frac{1}{\omega_m}\,.$$

Quer dizer o resto de ordem m está sempre entre os números ω_m e $\frac{1}{\omega_m}$.

§ 9 — Seja $\omega_n = 1 + u_n$. Suporemos $|u_n| < 1$, podendo no entanto u_n ser positivo ou não. Como se sabe diz-se que $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente se $\prod (1 + |u_n|)$ convergir.

Seja

$$W_n = \begin{cases} \omega_n & \text{se } \omega_n > 1 \\ \frac{1}{\omega_n} & \text{se } \omega_n < 1 \end{cases}.$$

I. Se $\prod W_n$ converge o produto infinito $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente.

Designemos por P' o valor de $\prod W_n$ e seja

$$P'_m = W_0 \cdot W_1 \cdots W_{m-1}$$

e

$$P''_m = (1 + |u_0|) \cdot (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_{m-1}|)\,.$$

Sendo $u_n > 0$ será $1 + u_n = \omega_n > 1$ e portanto

(9. 1) $$1 + |u_n| = W_n .$$

Suponhamos agora $u_n < 0$. De

$$(1 - u_n)(1 + u_n) = 1 - u_n^2 < 1$$

vem

$$1 - u_n < \frac{1}{1 + u_n}$$

como $1 - u_n = 1 + |u_n|$ e $\dfrac{1}{1 + u_n} = W_n$

vem

(9. 2) $$1 + |u_n| < W_n$$

por (9. 1) e (9. 2) podemos escrever

$$P''_m \leq P'_m$$

e como P'_m nunca decresce, quando m cresce

$$P''_m \leq P'$$

como P''_m também nunca decresce, quando m cresce existirá o limite de P'_m e o produto considerado será absolutamente convergente.

§ 10 — Se $\prod_0^m W_n \leq A$ então elevando os sucessivos factores de $\prod \omega_n$ a números positivos e decrescentes para zero $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ obtém-se um novo produto infinito convergente e não nulo ainda que $\prod \omega_n$ seja divergente.

De $\prod_0^m W_n \leq A$ vem $\sum_0^m \log W_n \leq \log A$ e como

$$\left| \sum_0^m \log \omega_n \right| \leq \sum_0^m |\log \omega_n| = \sum_0^m \log W_n$$

podemos escrever

$$\left| \sum_0^m \log \omega_n \right| \leq \log A .$$

Por um teorema de ABEL(¹) a série

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \log \omega_n = \sum_0^\infty \log \omega_n^{\varepsilon_n}$$

converge e sendo S a sua soma tem-se

(10. 1) $$|S| \leq \varepsilon_0 \log A = \log A^{\varepsilon_0}$$

segue-se pois que converge o produto $\prod \omega_n^{\varepsilon_n}$. Representando por P o seu valor, atendendo a que é $S = \log P$ e a (10. 1) temos

$$|\log P| \leq \log A^{\varepsilon_0}$$

donde

$$\log A^{-\varepsilon_0} \leq \log P \leq \log A^{\varepsilon_0}$$

ou

$$A^{-\varepsilon_0} \leq P \leq A^{\varepsilon_0}.$$

§ 11 — Como se sabe demonstra-se que

I. Produto infinito absolutamente convergente é convergente.

II. O valor dum produto absolutamente convergente é independente da ordem dos termos.

III. Produto infinito absolutamente convergente em que seja $|u_n| < 1$ é sempre diferente de zero.

§ 12 — Se $\prod (1 + u_n)$ é absolutamente convergente também será convergente o produto $\prod W_n$.

Efectivamente pelas proposições I e III do § 11 o produto $\prod \omega_n$ será convergente e diferente de zero logo a série

(12. 1) $$\sum \log \omega_n$$

(¹) Cuja demonstração se pode ver em G. TOLSTOW, Fourierreihen, pág. 89.

será também convergente. Em virtude da convergência absoluta do produto $\prod \omega_n$ podemos alterar a ordem dos seus termos sem que o seu valor se modifique. Segue-se daí que a soma da série (12. 1) não depende da ordem dos termos, pois a sua soma em qualquer caso tem de ser o logaritmo do valor do produto $\prod \omega_n$. Logo esta série deverá convergir absolutamente, visto que no caso contrário (teorema de RIEMANN) a sua soma dependeria da ordem dos termos.

Converge pois

$$\sum |\log \omega_n|$$

e como

$$|\log \omega_n| = \log W_n$$

convergirá $\sum \log W_n$ e portanto $\prod W_n$.

Combinando esta proposição com a proposição I do § 9:

É condição necessária e suficiente de convergência absoluta dum produto infinito, que convirja o produto que dele se obtém, conservando os factores superiores à unidade e invertendo os inferiores.

§ 13 — Pode agora provar-se fàcilmente que se $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente também $\prod \frac{1}{\omega_n}$ será absolutamente convergente (supõe-se $\omega_n > 0$).

De facto se $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente pelo teorema do § 12 convergirá $\prod W_n$. E agora pelo teorema I do § 9 convergirá $\prod \frac{1}{\omega_n}$ absolutamente, pois que $\prod W_n$ também é o produto que se obtém de $\prod \frac{1}{\omega_n}$ por inversão dos factores inferiores à unidade e conservação dos restantes.

§ 14 — Qualquer produto extraido do produto absolutamente convergente $\prod \omega_n$ é também absolutamente convergente.

Sendo $\prod \omega_n$ absolutamente convergente será convergente a série $\sum \log W_n$ e portanto será absolutamente convergente a série $\sum \log \omega_n$.

Seja $\prod \omega'_n$ um produto extraido do dado. A série $\sum \log \omega'_n$ será uma série extraida de $\sum \log \omega_n$ e por consequência será absolutamente convergente. Convergirá pois $\sum \log W'_n$ com o que fica provada a proposição.

Pondo

$$S = \sum \log \omega_n$$

e

$$S' = \sum \log \omega'_n$$

teremos como se sabe das séries

$$|S'| < \overline{S}$$

em que $\overline{S}$ é a soma da série cujos termos são os módulos dos termos de $\sum \log \omega_n$.

Representando por P' o valor de $\prod \omega'_n$ e por P_1 o valor de $\prod W_n$ teremos

$$S' = \log P'$$

e

$$\overline{S} = \log P_1$$

podemos pois escrever

$$|\log P'| < \log P_1$$

donde

$$\log \frac{1}{P_1} < \log P' < \log P_1$$

e portanto

$$\frac{1}{P_1} < P' < P_1 .$$

§ 15 — Suponhamos $\prod \omega_n$ absolutamente convergente.

Seja

$$P = \prod \omega_n$$

$$P' = \prod W_n$$

e

$$S = \sum \log \omega_n = \log P$$

$$S' = \sum \log W_n = \log P'$$

teremos evidentemente

$$|S| < S'$$

ou

$$|\log P| < \log P'$$

donde

$$\frac{1}{P'} < P < P' .$$

§ 16 — Se $\prod \omega_n$ é simplesmente convergente e diferente de zero, será simplesmente convergente a série $\sum \log \omega_n$, pois senão convergiria $\sum \log W_n$ e o produto seria absolutamente convergente contra a hipótese. Pode pois (teorema de RIEMANN) por alteração conveniente da ordem dos termos fazer $\sum \log \omega_n = \log \left(\prod \omega_n\right)$ assumir qualquer valor prèviamente dado. Logo:

Se um produto é simplesmente convergente e diferente de zero pode dele obter-se, alterando a ordem dos termos outro produto que tenha qualquer valor positivo.

§ 17 — Sabemos que o estudo da convergência dum produto infinito se pode fazer de vários modos por intermédio duma série.

Assim a série

$$(17.\ 1) \qquad \begin{aligned} &P_1 + (P_2 - P_1) + \cdots + \\ &+ (P_n - P_{n-1}) + \cdots \end{aligned}$$

em que é $P_m = \prod_0^{m-1} \omega_n$ é convergente quando e só quando o for $\prod \omega_n$, pois que a soma dos primeiros m termos da série é igual a P_m.

Sabe-se também que $\prod \omega_n$, com $\omega_n = 1 + u_n$, é convergente sempre que o for a série

$$(17.\ 2) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

Dado pois o produto $\prod \omega_n$ poderemos, em certos casos, determinar a sua natureza pelo estudo das séries (17. 1) e (17. 2). Ao contrário do que acontece nestes casos na aplicação prática dos critérios de convergência de produtos infinitos que demos atrás não há que considerar série alguma. Como dissemos o estudo da natureza dum produto infinito pode fazer-se por intermédio duma série. Inversamente o estudo da natureza duma série pode fazer-se também por intermédio dum produto infinito. Assim se provarmos que $\prod \omega_n$ é convergente fica provada a convergência da série (17. 1) e no caso de ser $u_n > 0$ fica assegurada a convergência da série (17. 2) por um teorema conhecido.

Damos agora um exemplo duma série cuja convergência se pode provar por meio de um produto infinito.

Seja

$$(17.\ 3) \qquad \sum_0^{\infty} \frac{(2n+3)^{\frac{1}{2^n}} - (n+1)^{\frac{1}{2^n}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}}$$

o termo geral pode escrever-se

$$u_n = \frac{(2n+3)^{\frac{1}{2^n}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}} - 1 .$$

Consideremos o produto infinito

$$(17.\ 4) \qquad \prod_0^{\infty} (1 + u_n) = \prod \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

é fácil ver que é $\dfrac{2n+3}{n+1} > 1$ para $n > -1$

e portanto o factor geral do produto (17. 4) é superior à unidade. Por consequência o termo geral da série (17. 3) é positivo.

Podemos escrever sucessivamente:

$$2n < 3n\,, \quad 2n + 3 < 3(n+1)$$

donde

$$\frac{2n+3}{n+1} < 3$$

e daqui

$$\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{1}{2^n}} < 3^{\frac{1}{2^n}}$$

e pela proposição II do § 3 podemos afirmar que o produto (17. 4) converge o mesmo acontecendo pois à série (17. 3).

NOTA — *Todos os teoremas a que nos referimos sem dar a demonstração se podem encontrar em* VICENTE GONÇALVES, *Curso de Álgebra Superior (1944), excepto os teoremas de* CATALAN *e* ABEL *mencionados respectivamente nos §§ 5 e 10.*

MOVIMENTO MATEMÁTICO

«SESIONES DE MATEMÁTICA» DA U. M. A.

Integradas nas comemorações do 150.º aniversário da independência da Argentina, tiveram lugar em Buenos Aires e La Plata, de 22 a 27 de Setembro de 1960, promovidas pela Unión Matemática Argentina, «Sesiones de Matemática» que congregaram um numeroso grupo de cientistas.

Do Brasil foram especialmente convidados, e apresentaram trabalhos: LEOPOLDO NACHBIN e ELON LAGES LIMA (do IMPA), CANDIDO DA SILVA DIAS, MÁRIO SCHONBERG e CHAIM HÖNING (da Universidade de S. Paulo), K. T. CHEN (do ITA), A. PEREIRA GOMES e JOSÉ MORGADO (do I. F. M.).

Entre os matemáticos estrangeiros assinalamos ainda a presença de ANTÓNIO MONTEIRO, CHARLES EHRESMANN, A. ZYGMUND, S. LEFSCHETZ, P. ALEXITS e S. EILENBERG.

FUNDAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

No momento em que transitava pelo Congresso Nacional o Projecto de Lei que cria a Fundação da Universidade de Brasília, a Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência promoveu no Rio de Janeiro, em Outubro de 1960, uma «Mesa redonda» de cientistas afim de discutir e assentar as linhas gerais da organização da futura Universidade, destinada a constituir, no Brasil, novo padrão de trabalho universitário.

Para tratar das questões relativas ao Instituto Central de Matemática da Universidade de Brasília, foram convocados para esta «Mesa Redonda» os Profs. LEOPOLDO NACHBIN (do IMPA) e A. PEREIRA GOMES (do IFM.).

Pròximamente, a «Gazeta de Matemática», publicará um esquema da estrutura da Universidade de Brasília.

NOTICIÁRIO

Em Setembro de 1960 foi criado, na Universidade de S Paulo, o *Instituto de Pesquisas Matemáticas,* com as seguintes finalidades: *a*) promover e estimular o estudo e pesquisas nos domínios da Matemática Pura e Aplicada; *b*) colaborar para a formação de pesquisadores e pessoal docente superior no sector da Matemática.

— Realizar-se-á, em Julho de 1961, o *3.º Colóquio Brasileiro de Matemática*, com a participação de todas as instituições universitárias brasileiras dedicadas às Ciências Matemáticas, e para o qual estão sendo convidados alguns matemáticos estrangeiros interessados no desenvolvimento científico deste país.

— O Conselho Nacional de Pesquisas designou, para exercer as funções de membro do Conselho Orientador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Rio de Janeiro, com mandato de três anos, o Prof. A. PEREIRA GOMES do I. F. M. da Universidade do Recife.

— No I. F. M. da Universidade do Recife, teve início em Outubro de 1960 um seminário de Estatística Matemática sobre «Análise de Variância», dirigido pelo Prof. M. ZALUAR NUNES, com a colaboração do Prof. JOSÉ MORGADO.

M. Z. e P. G.