MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 19-1-1961.

5346 — Considere os seguintes conjuntos de números complexos:

$$C_1 = \{z : z^6 - 2z^3 + 1 = 0\}$$
$$C_2 = \{z : z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0\}$$

Como são constituídos os conjuntos

$$C_1 \cup C_2, \quad C_1 \cap C_2 \quad \text{e} \quad C_2 - C_1 ?$$

5347 — Determine as raízes de índice 4 de um complexo sabendo que uma delas é $3 + 4i$.

Designando por $[A\ B\ C\ D]$ o quadrado de vértices nas imagens das raízes, seja $[A'\ B'\ C'\ D']$ o quadrado que resulta do primeiro por uma rotação de $+\dfrac{\pi}{4}$ em torno da origem.

Diga qual o complexo cujas raízes de índice 4 são representadas por A', B', C', D'.

5348 — Mostre que $(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$ é um infinitésimo com x de parte principal $\dfrac{1}{2}x$ e aproveite o resultado para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + 2x)^5}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x}.$$

5349 — Sabendo que $\dfrac{1}{n+1} < \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$

a) — Verifique que a sucessão

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

é decrescente e

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

é crescente.

b) — Mostre que as duas sucessões convergem para o mesmo limite, compreendido entre 0 e 1.

F. R. Dias Agudo

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — Janeiro 1961.

Ponto 1

5350 — 1 *a*) Intervalo de convergência da série

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+1)^n}{n(n+3)}$$

1 *b*) Natureza nos extremos e soma no extremo inferior.

2 *a*) Calcular

$$\lim_{n} 3n^2 \left[\log (n+2) - \log n - \frac{2}{n}\right].$$

2 *b*) Prove que sucessão limitada de t. g. u_n tem algum sublimite u'. Se u_n decresce, caracterize u' relativamente ao conjunto $\{u_n\}$; justifique.

3) Discuta a natureza das séries dos termos de sinal constante em série convergente.

4 *a*) Se $f(x)$ é contínua entre 0 e $\alpha > 0$ e $f(+\infty) = \infty$, prove que este limite é qualificado.

4 *b*) Calcule a soma da série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

e prove que é descontínua de ambos os lados da origem.

Ponto 2

5351 — 1 *a*) Calcule o raio de convergência R da série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n+1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n+2)^2} x^n$$

1 *b*) Natureza para $x = R$.

1 *c*) Natureza para $x = -R$.

2) Defina convergência uniforme de uma sucessão. Estude deste ponto de vista

$$u_n(x) = \frac{n}{x^2 + n}.$$

3) Discuta (justificando) a natureza de

$$\prod_{1}^{\infty} [1 + (-1)^n a_n] \text{ com } a_n \downarrow 0 .$$

4) Prove que função contínua em conjunto limitado e fechado

a) é limitado

b) tem valores máximo e mínimo.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — Fevereiro de 1961.

5352 — 1) Estudar e resolver o sistema de equações lineares (nas incógnitas: x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \\ y + 2z - 3t = 0 . \end{cases}$$

Achar as soluções que satisfazem também à equação $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1 = 0$.

2) Mostrar que, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores linearmente independentes, e $\vec{w}$ um vector que *não é* combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então os três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente independentes.

3—*a*) Determine a equação cartesiana de um plano que passe pelo eixo dos xx (de um certo referencial orto-normal) e faça 60º com o plano coordenado XOY desse mesmo referencial.

b) Calcular os cosenos directores do eixo do plano obtido.

c) Escrever equações cartesianas de uma recta do plano obtido, que seja paralela ao plano XOY, e diste dele 4 unidades.

4—*a*) Exprimir o *máximo divisor comum* dos polinómios $A = X^4 + X + 1$ e $B = X^3 - 1$ como combinação linear de A e B, recorrendo ao algoritmo de Euclides.

b) Decompor em factores primos sobre R o polinómio de $R[X]$, $f = (X^4 - 81)(X^3 - 27)(X^3 + 2X - 3)$. Justificar.

5) Seja L o conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais a e b. Definindo entre esses pares uma *adição* pela regra: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ — e uma *multiplição* pela regra: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, averiguar se L fica ou não dotado de uma *estrutura de corpo*.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — 1.º exame de frequência — 2.ª chamada — Fevereiro de 1961.

5353 — 1) Calcular a e C de modo que o sistema de equações lineares (nas incógnitas: x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + y + 4t = 3 \\ y - z + 3t = a \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \\ 3x - y + 4z = 5 \end{cases}$$

seja *duplamente indeterminado*.

2) Mostrar que três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são *linearmente dependentes* sempre que uma das seguintes condições se verifique: *a*) um deles seja nulo; *b*) dois deles sejam iguais.

3—*a*) Calcular a distância do ponto $A(1 - 1, 2)$ à recta r de equações paramétricas $x = 1 - 2\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 4$. $(\lambda \in R)$. Supõe-se orto-normal o referencial adoptado).

b) Escrever depois a equação da esfera, tangente ao plano XOY, cujo centro é a intersecção da recta r com o plano XOZ.

4) Decompor em elementos simples de $C(X)$ a fracção racional $\dfrac{-12X^2 + 4}{(X^2 + 1)^3}$.

5—*a*) Seja L o conjunto dos vectores cujas duas primeiras componentes x_1 e x_2 satisfazem à equação $5x_1 - x_2 = 1$. Averiguar se L tem a estrutura de *espaço vectorial sobre R* (em relação às operações: *adição* e *multiplicação por um número real*, definidas para vectores quaisquer).

b) Resolver o mesmo problema para o conjunto M dos vectores cujas duas primeiras componentes x_1 e x_2 obedecem à condição $x_1 - 3x_2 = 0$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — Exercício de revisão — Março de 1961.

5354 — 1) Seja λ um número real, e C o conjunto das somas $\lambda + \varepsilon$, onde ε designa um número positivo arbitrário.

a) Mostrar que C é limitado inferiormente, mas não é limitado;

b) Calcular $\inf C$, justificando a resposta.

2) Classificar as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-1}$ (usando critérios de comparação);

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$, com $\begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{2}{5 \times 3^n} \\ a_{2n} = \dfrac{1}{4 \times 3^n} \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$

(recorrendo ao critério de D'Alembert).

3) Definindo *soma* de duas sucessões reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante a regra: $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$, e *produto* (de uma sucessão real $\{a_n\}$) *por um número real* λ, mediante a regra: $\lambda\{a_n\}=\{\lambda\, a_n\}$, averiguar se o conjunto $\mathcal{F}$ das sucessões reais *fundamentais* (ou de Cauchy) fica dotado da *estrutura de espaço vectorial sobre* R.

4) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \cdots, \{c_n\}$ sucessões reais em número finito; chamando *envolvente superior* dessas sucessões à sucessão real $\{s_n\}$, cujo termo de ordem n se calcula pela igualdade: $s_n = \mathrm{Max}\cdot(a_n, b_n, \cdots, c_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ — averiguar se a envolvente superior de sucessões reais *convergentes* (em número finito) é ainda uma sucessão convergente, indicando (no caso afirmativo) o respectivo limite.

5) Mostre que, se é convergente a série de termos reais $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, onde $r \neq 0$, também converge a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$, para todo o número real x tal que $|x| < |r|$.

Indicação: Notar que é convergente, e portanto *limitada* a sucessão real $\{a_n r^n\}$.

NOTA — Na elaboração dos precedentes enunciados, teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto: em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira (1200, no corrente ano lectivo) *as* duas *aulas práticas por semana prescritas por lei, sendo* uma *apenas dada em cada turma. (E mesmo assim, cada turma comporta por vezes 60 alunos).*

A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª prova prática de informação — 8-2-1961.

I

5355 — Determine o parâmetro $\alpha > 0$ por forma que a recta $y = x + 1$ seja tangente à circunferência *c*) $x^2 + y^2 - 2x - 2\alpha y + \alpha^2 - 1 = 0$.

Considere uma translacção do sistema de eixos coordenados $x0y$ para um sistema $x'0'y'$ de modo que $0'$ seja o centro da circunferência *c*). Escreva, no novo sistema, a equação da elipse de centro em $0'$, de excentricidade $1/2$ e cujo semi-eixo maior é o raio de *c*) e está sobre $0'x'$.

Qual a equação da elipse no primitivo sistema de eixos coordenados?

R: *A circunferência tem o centro no ponto* $(1, \alpha)$ *e raio igual a* $\sqrt{2}$. *Para que* $y = x + 1$ *seja tangente a* c) *é necessário que a distância do centro de* c) *à recta seja igual a* $\sqrt{2}$. *Então,* $\sqrt{2} = \dfrac{|\alpha - 1 - 1|}{\sqrt{2}}$, *donde* $|\alpha - 2| = 2$ *e* $\alpha = 4$ *ou* $\alpha = 0$. *Como se pede* $\alpha > 0$, *a solução é* $\alpha = 4$.

As fórmulas de translação são $x = x' + 1$ *e* $y = y' + 4$. *A equação da elipse no sistema* $x'0'y'$ *obtém-se fàcilmente pois* $a = \sqrt{2}$ *e* $c = a\,e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *donde* $b^2 = a^2 - c^2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. *A equação é* $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{2\,y'^2}{3} = 1$.

No sistema $x0y$ *a equação da elipse é* $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{2\,(y-4)^2}{3} = 1$.

II

5356 — 1) Sendo a, b, k, números reais, mostre que, com $a > b$ e $k > 0$, se tem $a\,k > b\,k$.

2) Determine os módulos e os argumentos principais das raízes da equação $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$.

R: 1) *Sendo* $a > b$, *considerem-se entre* b *e* a *os números racionais* r *e* $s > r$, *e determinem-se depois* k_1 *e* k_2 *por forma que*

$$1 < \frac{k_2}{k_1} < \frac{s}{r} \quad ou \quad s\,k_1 > r\,k_2 .$$

Como $r = b_2, s = a_1$, *vem* $a_1 k_1 > b_2 k_2$ *e portanto* $a\,k > b\,k$.

2) *Fazendo* $x^3 = y$ *vem* $y^2 - 2y + 1 = 0$, *equa-*

ção que tem uma raiz dupla $y=1$. *Então* $x=\sqrt[3]{y}=$ $=\sqrt[3]{1}$.

$$x_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

todas raízes duplas.

III

5357 — 1) Sendo $B\subset A$, prove a relação.

$$A\cup(B\cap C)=A.$$

2) Dado o conjunto $A=\left\{\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right), \left]\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right],\right.$ $\left.\left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$ indique, justificando todas as respostas:

a) pontos interiores, pontos exteriores, pontos de acumulação e pontos fronteiros de A;

b) limites de Weierstrass de A; Tem o conjunto elemento mínimo? E elemento máximo?

c) O conjunto A é aberto? É fechado?

R: 1) *Se*

$$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow\begin{cases} x\in A \\ ou \\ x\in B\cap C \ .\because\ se\ x\in B\cap C\Rightarrow x\in B \\ e\ como\ B\subset A\Rightarrow x\in A.\end{cases}$$

Em qualquer dos casos pois,

$$Se\ x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A.$$

Recìprocamente,

$$Se\ x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C).$$

2 a) *Pontos interiores: todos os pontos de*

$$\left]\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right[.$$

Pontos exteriores:

$$R-\left\{\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right),\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right],\left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right\}.$$

Pontos de acumulação:

$$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right],\ 1,\ 2.$$

Pontos fronteiros:

$$\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right),\frac{1}{3},\frac{3}{4},\left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

b) $l=\frac{1}{3}$ *e* $L=\frac{9}{4}$. *Não tem elemento mínimo e tem elemento máximo* $\frac{9}{4}$.

c) *O conjunto não é aberto porque não é só constituído por pontos interiores. Também não é fechado porque não contém todos os seus pontos próprios de acumulação* $\left(falta\ \frac{1}{3}\right)$.

IV

1) Mostre que $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n^{2\alpha}-(n^2-1)^\alpha}{n^{2(\alpha-1)}}=\alpha$.

2) Estude a série $\sum\dfrac{x^n}{n^\beta}$.

R: 1) $$\lim_{n=\infty}\frac{n^{2\alpha}-(n^2-1)^\alpha}{n^{2(\alpha-1)}}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{n^{2\alpha}\left[1-\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^\alpha\right]}{n^{2\alpha}\cdot n^{-2}}=$$

$$=\lim n^2\left[1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^\alpha\right]=\lim_{n=\infty}n^2\tau\,\alpha\frac{1}{n^2}=\alpha.$$

2) $$\lim_{n=\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\beta}}{\dfrac{|x|^n}{n^\beta}}=|x|\lim_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta=|x|.$$

Se $|x|<1$ *a série é absolutamente convergente. É divergente quando* $|x|>1$. *O comportamento da série para* $|x|=1$ *estuda-se do seguinte modo:*

$$|x|=1\begin{cases} x=1\Rightarrow\sum\dfrac{1}{n^\beta}\begin{cases}absolutamente\ convergente\\ com\ \beta>1;\\ divergente\ com\ \beta\leqslant 1;\end{cases}\\ x=-1\Rightarrow\sum\dfrac{(-1)^n}{n^\beta}\begin{cases}absolutamente\ convergente\\ com\ \beta>1;\\ simplesmente\ convergente\\ com\ 0<\beta\leqslant 1;\\ divergente\ com\ \beta\leqslant 0.\end{cases}\end{cases}$$

Quanto à convergência uniforme da série, pode garantir-se que (para qualquer valor de β*) a série é uniformemente convergente em qualquer intervalo*

$[-r, r]$ $(r < 1)$. *Mas pode-se ir mais além, aplicando o teorema de* ABEL:

Com $\beta > 1$, *a série converge em* $x = 1$ *e* $x = -1$ *e então é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$. *Com* $0 < \beta \leqslant 1$, *a série converge em* $x = -1$ *e então e uniformemente convergente em qualquer intervalo* $[-1, r]$ $(r < 1)$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência ordinário — 21-2-1961.

I

5358 — 1) Defina as médias aritmética, geométrica e harmónica e apresente as relações que as ligam. Mostre que o conceito geral de média abrange, como casos particulares, aquelas médias (dispensa-se a demonstração no caso da média geométrica).

2) Deduza a fórmula de MOIVRE e utilize-a para achar os valores de n que tornam real o complexo $(1+i)^n$.

3) Defina as operações lógicas sobre conjuntos e demonstre que $U-(A \cup B) = (U-A) \cap (U-B)$, onde U é o conjunto universal.

R: 2) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Para que $(1+i)^n$ *saia real é preciso que*

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} = 0$$

ou $\frac{n\pi}{4} = k\pi$, *donde* $n = 4k$ (k *inteiro positivo, negativo ou nulo*).

3) *Se* $x \in U - (A \cup B) \Rightarrow x \in U$ *e* $x \notin A \cup B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \in U \text{ e } x \notin A \Rightarrow x \in U - A \\ x \in U \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in U - B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (U - A) \cap (U - B).$$

Reciprocamente,

$$\text{Se } x \in (U-A) \cap (U-B) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \in U - A \\ e \\ x \in U - B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x \in U \text{ e } x \notin A \\ e \\ x \in U \text{ e } x \notin B \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in U \text{ e}$$

$$x \notin A \cup B \Rightarrow x \in U - (A \cup B).$$

II

5359 — 1) Deduza as fórmulas $\log(1+u) = \eta u$ ($\eta \to 1$ quando $u \to 0$) e $(1+v)^\alpha = 1 + \alpha \tau v$ ($\tau \to 1$ quando $v \to 0$).

Indique os pontos de acumulação do conjunto $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots\}$ com $u_n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n$ e

$$v_n = \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{\beta n^{-2/3}} \quad (\beta > 0).$$

Em que caso a sucessão $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots$ tem limite? Porquê?

2) Defina convergência absoluta de uma série e demonstre que $\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) x^n$ ($a_n > a_{n+1}$ e $a_n \to a$ (finito)) é absolutamente convergente em $[-1, 1]$. Calcule a soma da série quando $x = 1$ e mostre que, para $x = -1$, vem $|R_n| \leqslant a_n - a_{n+1}$.

Prove que a série é uniformemente convergente em $[-1, 1]$.

Considere a função $g(x) = \sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) x^n$ e estude a sua continuidade em $[-1, 1]$.

3) Defina a função $\Gamma(x)$ e prove que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

R: 1) *Os pontos de acumulação do conjunto são* $e^{-\alpha}$ *e* $\frac{1}{3\beta}$, *limites de* u_n *e* v_n, *respectivamente. A sucessão* $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots$ *tem limite quando* $e^{-\alpha} = \frac{1}{3\beta}$ *ou* $\alpha = \log 3\beta$.

2) *A série* $\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) x^n$ *é uma série de potências visìvelmente convergente para* $x = 1$ *(série de* MENGOLI *com* $a_n \to a$ *finito) e* $x = -1$. *Ainda mais, é absolutamente convergente para esses valores de* x. *Aplicando uma propriedade bem conhecida das séries de potências,* $\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) x^n$ *converge absolutamente em qualquer ponto mais próprio da origem: converge pois absolutamente em* $[-1, 1]$.

Para $x = 1$ *a soma da série é* $a_0 - a$ *e para* $x = -1$, *se a série é alternada decrescente, vem* $|R_n| \leqslant a_n - a_{n+1}$.

Como a série converge para $x = 1$ *e* $x = -1$, *o teorema de* ABEL *permite concluir que ela é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$.

O teorema de ARZELÀ *diz que a condição necessária e suficiente para que* $g(x)$ *seja contínua num ponto de* *continuidade dos termos é que a convergência da série seja quási-uniforme nesse ponto. Ora* g (x) *é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$ *e portanto é uniformemente convergente em cada ponto deste intervalo e, como a convergência uniforme é uma modalidade de convergência quási-uniforme, é evidente que* g (x) *é contínua em* $[-1, 1]$.

III

5360 — 1) A função $f(x)$ tem derivada finita em $]a, b[$. Mostre que $f(x)$ é contínua em $]a, b[$ e que assume aí todo o valor compreendido entre os seus limites de Weierstrass l e L.

Supondo que $w(a) = w(b) = 0$, que pode concluir àcerca de $f(a+0)$ e $f(b-0)$? Porquê?

Estude a continuidade e derivabilidade de $h(x) = \begin{cases} x^2 & (x < -1 \text{ e } x > 0) \\ 1 & (x = 0) \\ -x & (-1 \leqslant x < 0) \end{cases}$ e apresente a representação geométrica de $h(x)$.

2) Enuncie e demonstre a regra de primitivação por partes.

3) Seja $\varphi(x)$ regular em $]-\infty, +\infty[$ e $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty)$. Prove que, havendo apenas um ponto daquele intervalo em que $\varphi'(x)$ se anula, um dos extremos de $\varphi(x)$ coincide com $\varphi(-\infty)$ (ou $\varphi(+\infty)$).

R: 1) *A função* h (x) *é descontínua apenas em* x = 0 *pois* $\lim_{x=+0} h(x) = \lim_{x=-0} h(x) = 0 \neq h(0) = 1$.

Quanto à derivabilidade, tem-se $h'(x) = 2x$ $(x < -1$ *e* $x > 0)$; $h'(0) = \pm\infty$ *pois* $h'_d(0) = \lim_{x=+0} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty$ *e* $h'_e(0) = \lim_{x=-0} \frac{-x-1}{x} = +\infty$; $h'(-1)$ *não existe pois* $h'_d(-1) = \lim_{x=-1+0} \frac{-x-1}{x+1} = -1$ *e* $h'_e(-1) = $

$$= \lim_{x=-1+0} \frac{x^2-1}{x+1} = -2.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 10-3-1961.

I

5361 — 1) Defina raiz índice n do número real $b > 0$ e prove que ele tem uma (e uma só) raiz n positiva.

2) Indique a fórmula de Moivre generalizada e empregue-a para escrever a expressão que dá as raízes índice n da unidade positiva. Fazendo

$$w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},$$

mostre que as raízes índice n da unidade são $1, w_n, w_n^2, \cdots w_n^{n-1}$ e que $1 + w_n + w_n^2 + \cdots + w_n^{n-1} = 0$.

3) Defina produto cartesiano de dois conjuntos A e B. Prove que um intervalo de R^2 pode interpretar-se como produto cartesiano de dois intervalos de R.

II

5362 — 1) Defina limite máximo e limite mínimo de uma sucessão.

Demonstre que é finito ou nulo o número de termos u_n que excede um número superior ao limite máximo.

Sendo $\lim u_n = -\infty$, diga em que condições existe $\lim u_n$.

Prove que se $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to A$ $(y_n > 0)$, então $\sqrt[n]{y_n} \to A$.

Calcule

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n\, e^{-\log n}}}.$$

2) Enuncie o teorema de Kummer e deduza o critério de Raabe.

Se $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{k}{n}$, a série $\sum a_n$ é convergente ou divergente? Porquê?

Diga em que consiste a multiplicação de séries. Que particularidades notabilizam o produto de Cauchy?

3) Prove que produto infinito de termos positivos é convergente ou divergente com a série dos seus termos. Estude a natureza de

$$\prod_1^\infty \left[1 + \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n\right].$$

R: 1) *Como* $\lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)\, e^{-\log(n+1)}} \cdot \frac{n\, e^{-\log n}}{\log n} =$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{e^{\log(n+1)}}{e^{\log n}} = 1, \text{ vem } \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n\, e^{-\log n}}} = 1.$$

2) *De* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{k}{n}$, *tira-se* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}$ *e o critério de* Gauss *permite concluir imediatamente que* $\sum a_n$ *é sempre divergente.*

3) *Considerando a série dos termos* $\sum\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n$,

fàcilmente se vê que é divergente pois $\sqrt[n]{\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n} \to 1+0$. *O produto infinito, que é de termos positivos, diverge também.*

III

5363 – 1) Que se entende por função contínua num conjunto fechado? Enuncie os teoremas de DINI, WEIERSTRASS e CANTOR e demonstre o segundo.

2) Deduza a regra para elasticiar um produto de funções.

3) Prove que duas funções com a mesma derivada finita diferem por uma constante.

Enuncie o teorema de CAUCHY para as funções regulares e mostre que ele inclui o teorema de LAGRANGE.

Enunciados e soluções de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

Academia Militar — CÁLCULO INFINITÉSIMAL — 6.ª cadeira — 3.º exame de frequência — 1960-1961.

5364 – 1 Teorema fundamental do cálculo integral.

2 – *a*) Quando é que se diz que a expressão diferencial

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$

é uma diferencial exacta?

b) Mostre que

$$\left[x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+k\right]dx + y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dy + \\ + z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dz$$

com k constante, é uma diferencial exacta e determine uma das suas funções primitivas.

3 – Calcule

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\;dy$$

sendo D o domínio limitado pela elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4 – Determine o volume da parte da esfera

$$x^2+y^2+z^2=2$$

que é interior ao paraboloide

$$x^2+y^2=z.$$

5 – *a*) Teorema de RIEMANN-GREEN.

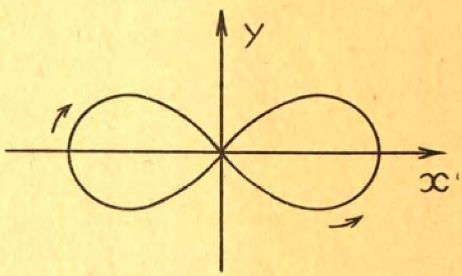
b) Por recurso ao teorema a que se refere a alínea anterior calcule o valor do integral curvilíneo

$$\int_{(C)} x\,y\,dx + x\,y\,dy$$

sendo (C) a lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$$

percorrida no sentido figurado.



Academia Militar – CÁLCULO INFINITESIMAL – Algumas questões saídas nos primeiros exames de frequência da 6.ª cadeira no ano lectivo de 1960-1961.

5365 – 1) Mostre que a função

$$f(x,y,z) = \sqrt{y^4+z^4} - \frac{x^2\,y}{z}$$

é homogénea e verifique com ela o teorema de EULER.

2) Verifique se as funções

$$u = \log(x+y)$$
$$v = x^2+y^2+2\,x\,y+1$$

são ou não funcionalmente dependentes. Caso afirmativo determine a relação que há entre elas.

3 — *a*) Plano tangente e normal a uma superfície num ponto ordinário.

b) Mostre que as equações

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$z = r\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

são equações paramétricas duma superfície cónica de revolução de vértice na origem e semi-abertura α.

4) Determine a menor e a maior distância do ponto $P(1,1,1)$ à superfície

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z.$$

5) A parábola $y^2 = x + 1$ divide o círculo limitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 3$ em duas regiões. Determine a área da região de menor área.

A. César de Freitas

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — 1.º Exame de Frequência — Janeiro de 1961.

I

5366 — *a*) Campos projectivos: sua definição. Prove que um campo projectivo fica determinado pelo seu valor em três pontos não colineares.

b) Prove que se um campo projectivo se anula num ponto, existe uma recta passando por esse ponto tal que o campo se anula em qualquer ponto da recta referida. (Utilize o facto de que todo campo projectivo é campo de momentos).

II

5367 — *a*) Equivalência de sistemas de vectores. Prove que todo sistema de vectores é equivalente a um sistema constituído por um vector e um binário.

b) Considere dois sistemas de vectores, S_1 e S_2, ambos equivalentes a um vector único (um para cada sistema).

Sejam $\overline{R}_1$ e $\overline{R}_2$ os seus vectores soma, e A_1 e A_2 dois pontos quaisquer dos respectivos eixos centrais. Mostre que o momento do sistema $S_1 + S_2$ em relação a um ponto qualquer O se pode escrever com a forma

$$\overline{M}_0 = (\overline{R}_1 + \overline{R}_2) \wedge (O - A_1) + \overline{R}_2 \wedge (A_1 - A_2)$$

Mostre, a partir desta expressão, que o automomento do sistema $S_1 + S_2$ é

$$V = R_2 \wedge (A_1 - A_2) / R_1$$

e conclua daí que a condição necessária e suficiente para que o sistema $S_1 + S_2$ seja equivalente a um vector único é que os dois eixos centrais sejam complanares.

III

5368 — Considere num plano $X^1 O X^2$ com a métrica habitual $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ um sistema de coordenadas polares.

a) Calcule as componentes contravariantes do tensor métrico nestas coordenadas.

b) Determine as componentes contravariantes em coordenadas polares do vector grad U em que U é uma função da distância polar y^1.

b) Calcule o laplaceano de U, usando as definições seguintes:

$$\mathrm{grad}\, U = \left(a_i = \frac{\partial U}{\partial y^i}\right)$$

$$\mathrm{div}\,(a) = \sum_{k=1}^{2} \frac{D a^k}{D y^k}$$

$$\mathrm{lap}\, U = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, U).$$

IV

5369 — Considere um invariante U e o sistema de 2.ª ordem $a(i,k) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^i}$.

Determine a sua lei de transformação e diga que conclusão se pode tirar do resultado.

V

5370 — Prove que $\dfrac{D(a^i b_k)}{D x^r} = \dfrac{D a^i}{D x^r} b_k + a^i \dfrac{D b_k}{D x^r}$.

5371 — As coordenadas vectoriais de um sistema de vectores em relação à origem O das coordenadas são

$$\overline{R} = \overline{e}_1 + \alpha\,\overline{e}_2 - \overline{e}_3$$
$$\overline{M}_0 = (\beta - 1)\,\overline{e}_1 - \overline{e}_3$$

Determine um sistema de vectores equivalentes ao primeiro, formado por um vector e um binário cujo momento seja perpendicular ao plano

$$P = A + \lambda(\overline{e}_1 - \overline{e}_3) + \mu(\overline{e}_1 + \overline{e}_3).$$

Analise em particular os casos em que os parâmetros α e β se anulam.

Enviado por António R. S. Neto

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 2.ª chamada — 11-10-1960.

5372 — 1) Dada uma superfície de revolução por uma geratriz torsa e o eixo, determine o cone das normais num paralelo dado.

2) Dada uma superfície regrada por duas directrizes rectilínias, não complanas, e uma recta do infinito (ou plano director) fixe um ponto numa das directrizes próprias. Determine o plano tangente nesse ponto.

3) No espaço projectivo a três dimensões considere os pontos $[\xi_0', \xi_1', \xi_2', \xi_3']$ e $[\xi_0'', \xi_1'', \xi_2'', \xi_3'']$. Escreva as equações da recta que os une. Justifique.

4) Considere três pontos A, B e C de um espaço euclideano a duas dimensões, tais que $\overrightarrow{AB}$, e AC são ortogonais. Verifique o teorema de Pitágoras para esses três pontos.

(Obs: A distância entres dois pontos é o comprimento do vector por eles definido).

F. C. L. — Geometria Descritiva — 2.ª frequência — 1960.

5373 — 1) Dada uma forma bilinear em R_3

$$3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - 2\,x_1\,y_2 + 2\,x_1\,y_3$$

determine a redução da forma quadrática associada e verifique que a forma bilinear é não degenerada.

2) Dado em P_4 (espaço projectivo a 4 dimensões) o subespaço

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$$

determine as equações do subespaço intersecção deste com o hiperplano de coordenadas pluckerianas $\{1, 0, 0, 1, 1\}$, directamente e por dualidade. Verifique as dimensões.

3) Dado um cone pelo seu traço horizontal e vértice, determine um plano tangente comum ao cone e a uma esfera, plano que tenha o ponto de contacto com a esfera sobre uma circunferência dada de nível.

4) Dado um cone pela directriz circular e o vértice (não de revolução), fixe um plano que o corte segundo uma elipse e determine um ponto da secção de tangente paralela ao $\beta_{2,4}$.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 1.ª chamada — 2-7-1960.

5374 — 1) Coloque dois cilindros, de traço horizontal circular, de modo que a sua intersecção seja um arrancamento. Determine os planos limites, um ponto da intersecção e a tangente nesse ponto.

2) Dados dois pontos P e Q determine um plano que passe por P, esteja a uma distância dada de Q e faça um ângulo de 45° com o plano horizontal. Condição de possibilidade.

Sugestão — Observe que o plano pedido é tangente a um cone de concordância *conveniente* de uma esfera, cone de eixo vertical.

3) Prove que um subespaço projectivo de dimensão $n \geqslant 3$, contém com cada três pontos não colineares o plano por eles definido. Como relaciona a parte imprópria do subespaço com a totalidade das partes impróprias dos planos em causa?

4) No espaço R_n, cuja multiplicidade associada tem a métrica euclidiana, determine o hiperplano que passa pelo ponto $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ e é perpendicular à recta $\dfrac{x_1 - a_1}{p_1} = \cdots = \dfrac{x_n - a_n}{p_n}$. Recorda-se que dois subespaços lineares são perpendiculares se e só se os vectores das respectivas submultiplicidades associadas o são.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 2.ª chamada — 5-7-1960.

5375 — 1) Dada uma superfície de revolução, determine um plano tangente à superfície, que passe por um ponto dado Q e tenha o ponto de contacto sobre um meridiano, cuja plano faz um ângulo de 45° com a Linha de Terra.

2) Dado um cone de 2.ª ordem, não circular, fixe um plano, que o corte segundo uma curva com uma assíntota. Determine essa assíntota.

3) A multiplicidade vectorial $\mathfrak{M}$ pode escrever-se como soma $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$ de dois submultiplicidades de intersecção nula (só o vector nulo). Mostre que a

decomposição $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}''$ de um vector qualquer $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$, com $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{W}'$ e $\mathfrak{a}'' \in \mathfrak{M}''$ é unívoca.

4) Mostre que se dois vectores $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são linearmente dependentes então é $P(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^2 = Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b})$. Será verdadeira a inversa?

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 1.ª chamada — 8-10-960.**

5376 — 1) Dada uma superfície de revolução por uma geratriz torsa e o eixo, fixe um paralelo. Determine o cone de concordância ao longo desse paralelo.

2) Dada uma superfície regrada por três directrizes rectilíneas não complanares duas a duas, fixe um ponto numa delas. Determine a normal à superfície nesse ponto.

3) Dados os pontos $[1, 1, 3]$ e $[2, 1, 5]$ de um espaco projectivo a duas dimensões, determine as coordenadas pluckerianas da sua recta união.

4) Sejam $A(a_1, \cdots, a_n)$ e $B(b_1, \cdots, b_n)$ dois pontos dum espaço euclidiano. Suponha que estas coordenadas foram determinadas em relação a um referencial $O_0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \cdots, \mathfrak{n}_n)$ em que $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_n$ formam um sistema de vectores ortonormados.

Escreva e justifique a equação genérica de um hiperplano perpendicular à recta definida por A e B.

(Obs: Dois subespaços dizem-se perpendiculares se as submultiplicidades o são).

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.ª frequência — 1961.**

5377 — 1) Verifique que os vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1 1)$ formam uma base de multiplicidade vectorial a três dimensões, a que pertencem.

Obtenha um sistema equivalente, usando o vector $(1, 2, 1)$.

2) Mostre que a dimensão da soma de duas submultiplicidades de uma mesma multiplicidade vectorial é a soma das dimensões se e só se dois vectores quaisquer, não nulos, um de cada submultiplicidade foram linearmente independentes.

3) Considere um plano definido por um ponto e por uma recta do $\beta_{2,4}$. Determine o ângulo desse plano com um plano de nível dado.

Nota – Resolva, de preferência, sem LT.

4) Considere duas rectas enviezadas, uma das quais de topo. Efectue uma rotação de modo que o segmento que mede a distância entre as rectas dadas, apareça em verdadeira grandeza na sua projecção horizontal.

Faça um relatório esquemático do 3.º e 4.º problemas.

M. Alzira Santos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

139 — Edouard Lucas — **Récréactions Mathématiques** — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 8 N. F. cada volume.

Trata-se de uma reedição, nova tiragem da 2.ª edição, do célebre livro de Eduardo Lucas, *Recreações Matemáticas*. O livro é bem conhecido e o seu elogio está feito. Publicado pela primeira vez em 1891, é esta portanto a 3.ª edição de que agora aparece o 1.º volume, saindo os restantes 2.º, 3.º e 4.º à razão de um por mês. O livro estava esgotado há muito e esta reedição que é uma reprodução fotográfica da anterior, traz, àqueles que se interessam pelos jogos e recreações matemáticas, um livro clássico indispensável por um preço acessível. Este primeiro volume cujo sumário é o seguinte: as travessias, as pontes, os labirintos, as rainhas, o solitário, a numeração, o aneleiro, o jogo do 15, tem ainda um índice bibliográfico, segundo ordem cronológica, dos principais livros, memórias e extractos de correspondências, que foram publicados sobre aritmética de posição e geometria de situação (como lhe chama Lucas).

É um belo e útil livro que não perdeu a sua actualidade e originalidade digno de figurar em qualquer biblioteca matemática e em especial nas das Escolas Técnicas e Liceus.

J. S. P.

140 — Edouard Lucas — **Théorie des Nombres, Tome Premier** — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 25 N. F.

Outro livro reimpresso pela Livraria Blanchard de que só muito excepcionalmente se conseguia exemplar à venda. Esta reedição com prefácio de M. G. Bouligand, é uma reprodução fotográfica da 1.ª edi-