ANO XXI — N.º 81 **GAZETA DE MATEMÁTICA** OUT./DEZ. — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Sobre a determinação analítica das direcções principais das secções planas de uma quádrica

por **F. R. Dias Agudo**

Neste artigo vamos indicar como a teoria dos vectores próprios e valores próprios de uma matriz permite determinar, de forma simples e elegante, as direcções principais das secções planas de uma quádrica. Seguimos, nas suas linhas gerais, a exposição de Grotemeyer em *Analytische Geometrie* (1), mas desenvolveremos alguns pontos não completamente esclarecidos neste livro.

1. Notações.

a) $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \{x \;\; y \;\; z\}$ é uma matriz coluna que representará ou o ponto de coordenadas cartesianas x, y, z num sistema triortogonal de referência $OXYZ$, ou o vector de posição $\overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$.

b) $P = P_0 + \rho\, U$ é a equação paramétrica (em forma matricial) da recta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vector $U = \{h \;\; k \;\; l\}$.

Se U é unitário, tem-se $h^2 + k^2 + l^2 = 1$, h, k, l são então os cosenos directores da recta, e a distância orientada de P_0 a P é dada por ρ.

Se U não for unitário, as distâncias de $P_1(\rho_1)$ e $P_2(\rho_2)$ a P_0 são proporcionais a ρ_1 e ρ_2.

c) $P = P_0 + \lambda\, U + \mu\, V$ é a equação do plano que passa por P_0 e é paralelo aos vectores U e V. Tem-se $(P - P_0) \mid U \times V = 0$, pelo que a equação do plano se pode escrever $W^{\mathrm{T}}(P - P_0) = 0$, onde W é o vector coluna com as coordenadas do produto externo $U \times V$ (vector normal ao plano) e W^{T} representa o vector linha transposto de W.

Uma equação da forma $W^{\mathrm{T}} P + d = 0$ representa, pois, um plano perpendicular ao vector W.

2. Equação geral de uma quádrica. Planos diametrais.

A forma mais geral da equação de uma quádrica (em coordenadas cartesianas) é

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x\,z + 2\,a_{14}\,x \,+& \\
+\; a_{22}\,y^2 + 2\,a_{23}\,y\,z + 2\,a_{24}\,y \,+& \\
+\; a_{33}\,z^2 + 2\,a_{34}\,z \,+& \\
+\; a_{44} = 0,&
\end{aligned}
$$

(1) Ver Bibliografia.

expressão a que pode dar-se a forma matricial

$$(2)\qquad [x\ y\ z\ 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

com $a_{ij} = a_{ji}$.

A matriz simétrica $A = [a_{ij}]$ é a matriz da quádrica. Fragmentando-a em

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \Lambda \\ \Lambda^{\mathrm{T}} & a_{44} \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{A}$ submatriz de 3.ª ordem, e

$\Lambda = \{a_{14}\ \ a_{24}\ \ a_{34}\} = [a_{41}\ \ a_{42}\ \ a_{43}]^{\mathrm{T}}$,

e pondo $\{x\ \ y\ \ z\ \ 1\} = \{P\ \ 1\}$, a equação (2) toma a forma

$$(3)\qquad [P^{\mathrm{T}}\ 1]\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \Lambda \\ \Lambda^{\mathrm{T}} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = 0 .$$

Efectuando a multiplicação por blocos vem

$$(4)\qquad P^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P + 2\Lambda^{\mathrm{T}} P + a_{44} = 0 ,$$

que é apenas outra forma de escrever a equação (1).

Se quisermos determinar os pontos em que uma recta $r \equiv P = P_0 + \rho U$ encontra a quádrica, não temos mais que substituir P por $P_0 + \rho U$ na equação (4), e determinar as raízes da seguinte equação do 2.º grau em ρ, que assim se obtém:

$$(5)\qquad \rho^2 U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U + 2\rho(P_0^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U + \Lambda^{\mathrm{T}} U) + \\ + P_0^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P_0 + 2\Lambda^{\mathrm{T}} P_0 + a_{44} = 0 .$$

Se forem $P_1(\rho_1)$ e $P_2(\rho_2)$ os pontos comuns à recta e à superfície, o ponto P_0 será o ponto médio da corda $\overline{P_1 P_2}$ se $\rho_1 + \rho_2 = 0$, i. e.,

$$P_0^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U + \Lambda^{\mathrm{T}} U = 0$$

ou, o que é o mesmo, $U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P_0 + U^{\mathrm{T}} \Lambda = 0$.

Fixando U e variando P_0, a expressão $P = P_0 + \rho U$ passa a representar uma família de rectas paralelas a U; e a condição anterior mostra que os pontos médios de todas as cordas da quádrica com a direcção considerada pertencem ao plano

$$(6)\qquad U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P + U^{\mathrm{T}} \Lambda = 0$$

ou seja

$$(6')\qquad (\mathcal{A} U)^{\mathrm{T}} P + U^{\mathrm{T}} \Lambda = 0 .$$

Este plano [perpendicular ao vector $\mathcal{A} U$ como se viu no § 1, *c*)] recebe o nome de *plano diametral conjugado* com a direcção de U.

A dedução feita exige $U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U \neq 0$ para que ambas as raizes de (5) sejam finitas; se for $U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U = 0$ podemos continuar a chamar plano diametral conjugado com a direcção U ao plano de equação (6), mas trata-se então de uma definição puramente analítica, sem o significado geométrico correspondente ao caso $U^{\mathrm{T}} \mathcal{A} U \neq 0$.

3. Direcções principais e planos principais.

Um plano diametral diz-se *principal* (ou de *simetria*) quando é perpendicular à direcção com que é conjugado; e esta direcção também se diz então uma *direcção principal* da quádrica.

Daqui e de (6') resulta que para que U nos dê uma direcção principal da quádrica (4) deve ter a direcção do vector $\mathcal{A} U$, i. e.

$$\mathcal{A} U = \lambda U ;$$

e U será então um vector próprio da matriz $\mathcal{A}$, e λ o correspondente valor próprio ou raiz característica. A equação do plano principal correspondente pode escrever-se $\lambda U^{\mathrm{T}} P + U^{\mathrm{T}} \Lambda = 0$.

Deve observar-se que a dedução da equação (6) exige $\mathcal{A} U \neq O$. Se for $\mathcal{A} U = O$ o plano torna-se impróprio (se $U^{\mathrm{T}} \Lambda \neq 0$) ou indeterminado (se $U^{\mathrm{T}} \Lambda = 0$); mas convém designar por direcção principal toda a direcção que satisfaça $\mathfrak{A} U = \lambda U$ mesmo com $\lambda = 0$.

E podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 1. *As direcções principais da quádrica de matriz* $A = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \Lambda \\ \Lambda^T & a_{44} \end{bmatrix}$ *são dadas pelos vectores próprios da submatriz* $\mathfrak{A}$.

Se for $\mathfrak{A} U = \lambda U$, *o plano principal correspondente à direcção* U *tem por equação* $\lambda U^T P + U^T \Lambda = 0$; *e se for* $\lambda = 0$ *o plano é impróprio ou indeterminado.*

Da teoria dos valores próprios e vectores próprios de uma transformação linear (e de uma matriz), com a qual supomos o leitor familiarizado, resulta agora este outro

TEOREMA 2. *Toda a quádrica tem pelo menos um plano principal a distância finita. Se as três raízes características* λ_i *de* $\mathfrak{A}$ *são distintas, a quádrica tem três direcções principais, perpendiculares duas a duas. Se* $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, *à raiz* λ_3 *corresponde uma direcção principal, e à raiz dupla correspondem infinitas direcções principais, todas perpendiculares àquela; e se a raiz dupla é diferente de zero, a quádrica é de revolução em torno de um eixo com a direcção correspondente a* λ_3.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, $\mathfrak{A}$ *é matriz escalar, e qualquer direcção do espaço é direcção principal; a superfície é uma esfera.*

4. Direcções principais das secções planas de uma quádrica.

Estudemos agora a secção feita na quádrica de equação (4) pelo plano

$$(7) \qquad \pi \equiv U^T P + d = 0$$

onde U, que podemos supor de módulo igual a 1, é vector normal ao plano.

Por uma conveniente transformação ortogonal de coordenadas, pode levar-se o plano secante a ser o plano $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$; e nesse novo sistema de referência os pontos comuns ao plano e à quádrica são soluções de um sistema da forma

$$\begin{cases} \hat{a}_{11} \hat{x}^2 + 2\,\hat{a}_{12} \hat{x} \hat{y} + 2\,\hat{a}_{13} \hat{x} \hat{z} + 2\,\hat{a}_{14} \hat{x} + \cdots = 0 \text{ (1)} \\ \hat{z} = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} b_{11} \hat{x}^2 + 2\,b_{12} \hat{x} \hat{y} + 2\,b_{13} \hat{x} + b_{22} \hat{y}^2 + 2\,b_{23} \hat{y} + b_{33} = 0 \\ \hat{z} = 0\,. \end{cases}$$

A primeira destas equações (que representa a cónica secção, considerada como linha do plano $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$) é análoga à de uma quádrica (com uma variável a menos), e pode assumir a forma

$$P^T \mathfrak{B} P + 2\,\Gamma^T P + b_{33} = 0$$

com $P = \{x\ y\}$, $\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ e $\Gamma = \{b_{13}\ b_{23}\}$.

Tal como no teorema 2, pode afirmar-se que *se as duas raízes características de* $\mathfrak{B}$ *são distintas, a cónica tem duas direcções principais* (2) *perpendiculares entre si; e se as duas raízes são iguais, qualquer direcção do plano da cónica é direcção principal, sendo a curva uma circunferência.*

É nosso propósito, no entanto, determinar as direcções principais da secção sem recorrer à transformação de coordenadas anteriormente referida.

Tome-se, para isso, um vector V que seja paralelo a π, i. e.,

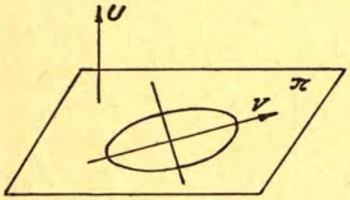
$$(8) \qquad V^T U = 0 = U^T V.$$

---

(1) [Equação análoga a (1)].

(2) Definição análoga à que foi dada para as quádricas.

V dar-nos-á uma direcção principal da cónica (secção feita por π na quádrica) se



for perpendicular à direcção conjugada, e, portanto, à intersecção de π com o plano diametral da quádrica conjugado com V.

Este plano, definido por $V^T \mathcal{A} P + V^T \Lambda = 0$ (como se viu no § 2), é normal ao vector $\mathcal{A} V$, de modo que a sua intersecção com π tem a direcção do produto externo $(\mathcal{A} V) \times U$.

Deve ter-se, pois, $V \perp (\mathcal{A} V) \times U$, e os três vectores $\mathcal{A} V$, V e U são linearmente dependentes.

Como U e V são independentes, a condição a que deve sujeitar-se V traduz-se por

$$\mathcal{A} V = \mu V + \nu U$$

ou seja

$$(9) \qquad (\mathcal{A} - \mu I) V = \nu U.$$

O problema ficará, pois, resolvido quando obtivermos os vectores V que satisfaçam as condições

$$(10) \qquad \begin{cases} U^T V = 0 \\ (\mathcal{A} - \mu I) V = \nu U \end{cases}$$

com alguns valores reais de μ e ν.

Se este sistema tiver uma solução, W, com $\nu = 0$ (e μ igual a um certo valor λ_1), o vector W satisfaz $\mathcal{A} W = \lambda_1 W$, e dá-nos, não só uma direcção principal da secção que estamos a estudar, como também uma direcção principal da própria quádrica, correspondente à raiz característica λ_1 da matriz $\mathcal{A}$.

Para as possíveis soluções do sistema, com μ distinto de qualquer dos valores próprios de $\mathcal{A}$, tem-se

$$V = \nu (\mathcal{A} - \mu I)^{-1} U = \frac{\nu}{|\mathcal{A} - \mu I|} \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U,$$

ou

$$(11) \qquad V = \rho \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U$$

com $\rho = \dfrac{\nu}{|\mathcal{A} - \mu I|}$, devendo μ ser raiz da equação do 2.º grau

$$(12) \qquad U^T \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U = 0$$

para que se verifique a primeira condição de (10).

Podemos, pois, enunciar:

Teorema 3. *Considere-se a secção feita na quádrica* $P^T \mathcal{A} P + 2 \Lambda^T P + a_{44} = 0$ *pelo plano de equação* $U^T P + d = 0$.

Se o plano contém alguma direcção principal da quádrica, esta é também direcção principal da secção. Caso contrário, as direcções principais da secção são dadas por

$$W_i = \rho_i \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu_i I) U$$

onde $\mu_i \ (i = 1, 2)$ *é raiz da equação do 2.º grau*

$$U^T \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U = 0$$

e os factores ρ_i *podem ser escolhidos de modo que os vectores* W_i *fiquem com módulo igual a* 1.

Exemplos:

1) Determinar as direcções principais da secção feita no elipsóide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ pelo plano $\sqrt{5} x + 3\sqrt{3} z = 0$.

A quádrica está reduzida às direcções principais[1] e a matriz $\mathcal{A}$ vem a ser

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] Quer dizer, a equação está referida a um sistema em que os eixos coordenados se dirigem segundo três direcções principais da quádrica.

Um vector normal ao plano secante é $|\sqrt{5}\ \ 0\ \ 3\sqrt{3}|$ ou, tomando o respectivo versor, $U=\left\{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}\ \ 0\ \ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

Das três direcções principais da quádrica, $|1\ \ 0\ \ 0|$, $|0\ \ 1\ \ 0|$ e $|0\ \ 0\ \ 1|$, a segunda (correspondente à raiz característica $1/4$) pertence ao plano secante (o vector $|0\ \ 1\ \ 0|$ é perpendicular a U), e é, portanto, direcção principal da secção.

Para investigar a existência de possíveis direcções principais da cónica que não sejam direcções principais da quádrica, há que formar a equação (12):

$$\sqrt{5}\ 0\ 3\sqrt{3}\begin{bmatrix}(\frac{1}{4}-\mu)(1-\mu) & 0 & 0\\ 0 & (\frac{1}{9}-\mu)(1-\mu) & 0\\ 0 & 0 & (\frac{1}{9}-\mu)(\frac{1}{4}-\mu)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\ 0\\ 3\sqrt{3}\end{bmatrix}=0$$

ou seja $(\frac{1}{4}-\mu)(\frac{1}{4}-\mu)=0$.

A equação não tem raízes que não sejam valores próprios de $\mathcal{A}$ e a expressão (11) não é aplicável.

Mas nós sabemos que a secção tem pelo menos outra direcção principal além da que já encontrámos.

Voltemos então ao sistema (10) e procuremos soluções com $\mu=1/4$ mas com $\nu\neq 0$. Obtém-se

$$\begin{cases}[\sqrt{5}\ \ 0\ \ 3\sqrt{3}]\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=0\\[2ex] \begin{bmatrix}-\frac{5}{36} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\ 0\\ 3\sqrt{3}\end{bmatrix}\end{cases}$$

i. e.,

$$\begin{cases}\sqrt{5}\,v_1+3\sqrt{3}\,v_3=0\\ -\frac{5}{36}\,v_1=\nu\sqrt{5}\\ \frac{3}{4}\,v_3=3\nu\sqrt{3}\end{cases}$$

donde $v_1=-\frac{36}{5}\nu\sqrt{5}$, v_2 qualquer, $v_3==4\nu\sqrt{3}$.

O sistema tem, pois, infinitas soluções (qualquer que seja o valor de ν) que definem infinitas direcções principais. A secção é circular.

2) Determinar as direcções principais da secção feita na quádrica $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ pelo plano $y+z=0$.

Tem-se $\mathcal{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}$ e $U=\left|0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right|$.

A quádrica é um elipsóide de revolução em torno de OZ, e são direcções principais a direcção deste eixo (correspondente à raiz característica $1/4$) e todas as direcções perpendiculares (correspondentes à raiz dupla 1). Destas, a direcção definida por $|1\ \ 0\ \ 0|$ (a do eixo OX portanto) pertence ao plano secante e é direcção principal da secção.

A equação (12) pode escrever-se

$$[0\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}(1-\mu)(\frac{1}{4}-\mu) & 0 & 0\\ 0 & (1-\mu)(\frac{1}{4}-\mu) & 0\\ 0 & 0 & (1-\mu)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=0$$

donde $(1-\mu)(\frac{5}{4}-2\mu)=0$, e as raízes são $\mu_1=1$, $\mu_2=\frac{5}{8}$.

A primeira é raiz característica de $\mathcal{A}$; para a segunda a expressão (11) dá $|0\ \ 1\ \ -1|$ (à parte um factor arbitrário) e, portanto,

$\{0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ (se quisermos um vector de módulo 1) para definir uma direcção principal da secção.

As direcções principais da cónica são, pois $\{1 \quad 0 \quad 0\}$ e $\{0 \quad 1 \quad -1\}$ (perpendiculares entre si e ambas perpendiculares a U).

5. Considerações finais.

Como se disse no início do § 4, a secção feita numa quádrica por um plano ou é uma circunferência (e então todas as direcções do plano secante são direcções principais da secção) ou tem apenas duas direcções principais, perpendiculares entre si. Os exemplos anteriores ilustram qualquer dos casos.

Há, pois, toda a vantagem em conhecer a priori se a secção é ou não circular porque no primeiro caso a determinação das direcções principais é trivial, e, no segundo, logo que se tenha obtido uma, W_1, a outra será dada pelo produto externo $W_2 = U \times W_1$.

Se se trata de um ou outro caso resultará da discussão que vamos fazer da equação (12).

Suponha-se que as equações

$$(4) \qquad P^{T} \mathcal{A} P + 2 \Lambda^{T} P + a_{44} = 0$$

e

$$(7) \qquad U^{T} P + d = 0,$$

da quádrica e do plano secante, estão referidas a um sistema triortogonal $OXYZ$, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, e efectue-se uma rotação de eixos definida por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = t_{11}\,\mathbf{e}_1 + t_{21}\,\mathbf{e}_2 + t_{31}\,\mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = t_{12}\,\mathbf{e}_1 + t_{22}\,\mathbf{e}_2 + t_{32}\,\mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 = t_{13}\,\mathbf{e}_1 + t_{23}\,\mathbf{e}_2 + t_{33}\,\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

ou, simbòlicamente, $[\hat{\mathbf{e}}_1 \; \hat{\mathbf{e}}_2 \; \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, T$, com $T = [t_{ij}]$ matriz ortogonal ($T^{T} T = I = T T^{T}$).

O vector $\overrightarrow{OP}$ que no sistema $OXYZ$ tem uma expressão cartesiana $x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, P$ (ver § 1), será definido por $\hat{x}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{y}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{z}\,\hat{\mathbf{e}}_3 = [\hat{\mathbf{e}}_1 \; \hat{\mathbf{e}}_2 \; \hat{\mathbf{e}}_3]\, \hat{P}$ no sistema $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ que resultou do primeiro pela rotação considerada.

E da igualdade

$$x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = \hat{x}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{y}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{z}\,\hat{\mathbf{e}}_3$$

i. e., $\quad [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, P = [\hat{\mathbf{e}}_1 \; \hat{\mathbf{e}}_2 \; \hat{\mathbf{e}}_3]\, \hat{P}$

vem $\quad [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, P = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, T\hat{P}$

e, portanto, $\quad P = T\hat{P}$.

Obtém-se assim a relação entre as coordenadas de um mesmo ponto em dois sistemas de referência triortogonais com a mesma origem e cujos versores estão ligados por $[\hat{\mathbf{e}}_1 \; \hat{\mathbf{e}}_2 \; \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; \mathbf{e}_3]\, T$.

Por meio desta transformação de coordenadas as equações (4) e (7) dão lugar a

$$\hat{P}^{T} T^{T} \mathcal{A}\, T \hat{P} + 2 \Lambda^{T} T \hat{P} + a_{44} = 0$$

e

$$U^{T} T \hat{P} + d = 0,$$

ou seja,

$$(\hat{4}) \qquad \hat{P}^{T} \hat{\mathcal{A}} \hat{P} + 2 \hat{\Lambda}^{T} \hat{P} + a_{44} = 0$$

e

$$(\hat{7}) \qquad \hat{U}^{T} \hat{P} + d = 0,$$

com

$$\hat{\mathcal{A}} = T^{T} \mathcal{A}\, T = T^{-1} \mathcal{A}\, T, \quad \hat{\Lambda} = T^{T} \Lambda = T^{-1} \Lambda$$

e

$$\hat{U} = T^{T} U = T^{-1} U.$$

Se além de rotação também houver translação, as relações entre $\hat{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}$, $\hat{U}$ e U continuam a ser as que obtivemos anteriormente. E as igualdades

$$\widehat{U}^{\mathrm{T}}\operatorname{adj}(\widehat{\mathcal{A}}-\mu I)\widehat{U}=U^{\mathrm{T}}T\operatorname{adj}(T^{-1}\mathcal{A}T-\mu I)T^{-1}U$$
$$=U^{\mathrm{T}}T\operatorname{adj}[T^{-1}(\mathcal{A}-\mu I)T]T^{-1}U=$$
$$=U^{\mathrm{T}}TT^{-1}\operatorname{adj}(\mathcal{A}-\mu I)TT^{-1}U \quad =$$
$$=U^{\mathrm{T}}\operatorname{adj}(\mathcal{A}-\mu I)U$$

mostram que *a equação (12) é invariante perante uma transformação ortogonal de coordenadas.*

Escolha-se um sistema de referência em que o plano secante π seja o plano $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$. O vector U dá lugar a $\widehat{U}=\{0 \;\; 0 \;\; 1\}$, a equação (12) toma a forma

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_{11}-\mu & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22}-\mu \end{vmatrix}=0,$$

e uma primeira conclusão importante a tirar é que as raízes de (12) são reais por serem valores próprios da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix},$$

submatriz de $\widehat{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}$.

O sistema de equações

$$\begin{cases} \widehat{P}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathcal{A}}\,\widehat{P}+2\,\widehat{\Lambda}^{\mathrm{T}}\,\widehat{P}+\hat{a}_{44}=0 \\ \widehat{U}^{\mathrm{T}}\,\widehat{P}+\hat{d}=0, \end{cases}$$

que caracteriza a secção plana no referencial $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, é equivalente a

$$\begin{cases} [\hat{x} \;\; \hat{y} \;\; 0]\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots=0 \\ \hat{z}=0 \end{cases}$$

e a cónica secção (considerada curva do plano $\hat{z}=0$) tem por equação

$$[\hat{x} \;\; \hat{y}]\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}+(\text{termos de grau} < 2)=0.$$

A matriz $\mathcal{B}$ que figura no início do § 4 é, portanto, $\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$, e outra conclusão importante a tirar é que *os valores próprios de $\mathcal{B}$ são precisamente as raízes da equação (12)*. E daqui resulta agora que *a secção plana feita na quádrica de equação (4) pelo plano (7) é circular se e só se a equação (12) tiver as duas raízes iguais e não nulas* (¹).

Mas a equação $\begin{vmatrix} \hat{a}_{11}-\mu & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22}-\mu \end{vmatrix}=0$

ou

$$\mu^2-(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})\mu+\hat{a}_{11}\,\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}^2=0,$$

só tem raízes iguais se

$$(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})^2-4\,\hat{a}_{11}\,\hat{a}_{22}+4\,\hat{a}_{12}^2$$
$$=(\hat{a}_{11}-\hat{a}_{22})^2+4\,\hat{a}_{12}^2=0,$$

o que implica $\hat{a}_{11}=\hat{a}_{22}(=\mu_1$, valor comum das raízes) e $\hat{a}_{12}=0$.

Nestas condições

$$\widehat{\mathcal{A}}-\lambda I=\begin{bmatrix} \mu_1-\lambda & 0 & \hat{a}_{13} \\ 0 & \mu_1-\lambda & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

e μ_1 é também valor próprio da matriz $\widehat{\mathcal{A}}$ (e, portanto, de $\mathcal{A}$).

Chega-se assim ao seguinte

TEOREMA 4. *A secção feita na quádrica*

$$P^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\,P+2\,\Lambda^{\mathrm{T}}\,P+a_{44}=0$$

(¹) Com ambas as raízes nulas a secção reduz-se a uma recta; e para que se possa considerar curva de 2.ª ordem junta-se-lhe a recta do infinito do plano secante. É o que acontece, por exemplo, quando se secciona o cilindro parabólico de equação $x^2=2py$ pelos planos $x=c$.

pelo plano $U^{\mathrm{T}} P + d = 0$ *é circular se e só se a equação* $U^{\mathrm{T}} \operatorname{adj}(\mathcal{A} - \mu I)\, U = 0$ *tiver as duas raízes iguais (não nulas). E nestas condições o valor comum das raízes é necessàriamente valor próprio da matriz* $\mathcal{A}$(1).

Designemos agora por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ as raízes características da matriz $\mathcal{A}$, e tomemos para sistema de referência um triedro trirectângulo definido por três direcções principais da quádrica.

$\mathcal{A}$ transforma-se em $\hat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$;

e sejam p, q, r as novas coordenadas do vector perpendicular ao plano secante: $\hat{U} = \{p \;\; q \;\; r\}$.

A equação (12) toma então a forma

$$p^2 \begin{vmatrix} \lambda_2 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \mu \end{vmatrix} + q^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \mu \end{vmatrix} + \\ + r^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

donde se podem tirar as seguintes conclusões (cuja interpretação geométrica deixamos ao cuidado do leitor):

a) Se λ é raiz característica de $\mathcal{A}$ de multiplicidade 3 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$, λ é raiz dupla da equação (12) qualquer que seja U.

b) Se λ é raiz dupla não nula de $\mathcal{A}$ (a quádrica é de revolução) λ é raiz de (12) qualquer que seja U; e é raiz dupla de (12) se e só se U tiver a direcção do eixo de revolução da quádrica.

c) Se λ é raiz simples de $\mathcal{A}, \lambda$ será também raiz da equação (12) se U for perpendicular (e portanto o plano secante paralelo) à direcção principal da quádrica correspondente à raiz característica λ.

Depois destas considerações (sobretudo o teorema 4) já os problemas do § 4 se resolvem com muito maior simplicidade.

1) Para a secção feita no elipsóide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ pelo plano $\sqrt{5}\, x + 3\sqrt{3}\, z = 0$ começaríamos por formar a equação (12) que já sabemos ser $\left(\dfrac{1}{4} - \mu\right)^2 = 0$. Como as raízes são iguais (não nulas), a secção é circular, e o problema da determinação das direcções principais é trivial.

2) Para a secção feita no elipsóide de revolução $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$ pelo plano $y + z = 0$ a equação (12) tem por raízes $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = {}^5/_8$.

A primeira, que é raiz característica da matriz $\mathcal{A}$, conduz à direcção principal definida por $W_1 = \{1 \;\; 0 \;\; 0\}$, e a segunda direcção principal será dada por $W_2 = U \times W_1 = \{0 \; \frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{\sqrt{2}}\} \times \{1 \;\; 0 \;\; 0\} = \{0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

(1) Esta conclusão mostra que não é correcta a afirmação «Falls die Doppelwurzel μ_1 kein Eigenwert der Matrix $\mathcal{A}$ ist, ...» feita por Grotemeyer na obra citada na introdução, pág. 142. E significa que só os planos que contêm uma direcção principal da quádrica podem produzir secções circulares.

BIBLIOGRAFIA

Dias Agudo, F. R., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Lisboa, 1960.

Grotemeyer, K. P., *Analytische Geometrie,* Sammlung Göschen, Band 65/65a, Berlin, 1958.