Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações

por J. M. Gil

(Continuação)

3)
$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p} \cdot P_{n\,|\,p-1,\,n-p}$$
$$= \frac{1}{p} \cdot (n-p+1)\, P_{n\,|\,p-1,\,n-p+1}$$
$$= \frac{n-p+1}{p} \binom{n}{p-1}$$

Claramente para passar dum subconjunto de $p-1$ elementos para um de p elementos é preciso juntar um dos $n-p+1$ elementos restantes. Dois subconjuntos de $p-1$ elementos que difiram apenas num elemento dão, por este processo, dois subconjuntos de de p elementos iguais. Cada subconjunto de $p-1$ elementos dá origem à repetição dum subconjunto de p elementos p vezes. O número de subconjuntos de p elementos é assim $\dfrac{n-p+1}{p}\dbinom{n}{p-1}$

4)
$$\binom{n}{p} = P_{n-1\,|\,p-1,\,n-p} + P_{n-p\,|\,n-p-1}\, P_{n-1\,|\,p,\,n-p}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + (n-p)\, P_{n-1\,|\,p,\,n-p}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + P_{n-1\,|\,p,\,n-p-1}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

O número de subconjuntos de p elementos é a soma dos números de subconjuntos sem o elemento x e com este elemento.

5)
$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{n-p} P_{n-p\,|\,(n-p)-j}\, P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q}$$

com $n = p + q$.

Também

$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{q} P_{q\,|\,q-j}\, P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q}$$
$$= \sum_{j=0}^{q} P_{q\,|\,q-j} \cdot \frac{1}{q(q-1)\cdot(q-j+1)} P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{q} \frac{P_{q\,|\,q-j}}{P_{q\,|\,q-j}} \cdot P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q-j}$$
$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{q} \binom{n-1-j}{q-j}$$

6) Também

$$\binom{n}{p} = P_{n-p\,|\,n-p-1} \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q}$$

com $n = p + q$. Ou

$$\binom{n}{p} = P_{q\,|\,q-1} \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q}$$
$$= \sum_{j=0}^{p} P_{q\,|\,q-1} \cdot \frac{1}{q} P_{n-1-j\,|\,p-q,\,q-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-q} \binom{n-1-j}{q-1}$$
$$= \sum_{x=q-1}^{n-1} \binom{x}{q-1}$$

7) De $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$

vem para $n=2k+1$ e $p=2j+1$

$$\binom{2k+1}{2j+1}=\binom{2k}{2j}+\binom{2k}{2j+1}$$

e

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2j+1}=\sum_{j=0}^{k-1}\left[\binom{2k}{2j}+\binom{2k}{2j+1}\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}$$

Para $p=2j$, vem anàlogamente

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j}=\sum_{j=0}^{k}\left[\binom{2k}{2j-1}+\binom{2k}{2j}\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$$
$$=\binom{n-1}{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}$$

Subtraindo membro a membro, obtem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2j+1}-\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j}=-1$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}=-1$$

para n ímpar.

Para $n=2k$, temos anàlogamente

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}+1$$

e

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}$$

Ainda

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}-\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}=1$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}=1$$

para n par.

Então

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}=(-1)^n$$

31 — O número $P_{n|p,q,r}$ exprime-se fàcilmente em termos de combinações. Cada permutação de n elementos, dos quais p são iguais, outros q iguais e ainda mais r iguais, pode obter-se por escolhas sucessivas de p, q e r elementos no conjunto dos n elementos, supostos todos diferentes, $C=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$.

Estas escolhas sucessivas podem fazer-se respectivamente de $\binom{n}{p}$, $\binom{n-p}{q}$ e $\binom{n-p-q}{r}$ maneiras diferentes. Crescem ainda $n-p-q-r$ elementos que podem ser permutados. Assim

$$P_{n|p,q,r}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}\binom{n-p-q}{r}P_{n-q-q-r}$$

32 — Particularmente, para $n=p+q+r$ é $P_{n-p-q-r}=P_0=1$ e $\binom{n-p-q}{r}=$ $=\binom{r}{r}=1$, consequentemente

$$P_{n|p,q,r}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{p}=\binom{n}{p}\binom{q+r}{q}$$

e expressões análogas que se obtêm por permutação dos índices p, q e r.

33 — Para $r=1$, é $n=p+q+1$ e

$$P_{n|p,q,1} = P_{n|p,q} = \binom{n}{p}\binom{q+1}{q} = \\ = (q+1)\binom{n}{p}$$

e também as que se obtém permutando as posições de p, q e 1. Por exemplo

$$P_{n|1,p,q} = P_{n|p,q} = \binom{n}{1}\binom{p+q}{p} = \\ = n\binom{n-1}{p}.$$

34 — Permutações circulares de n objectos, não todos distintos

Seja $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_r$ a soma directa de r conjuntos C_i de p_i elementos iguais a_i com $i = 1, 2, \cdots r$ e $p_1 + p_2 + + \cdots + p_r = n$.

As permutações lineares dos n elementos de C repartem-se por duas categorias. Permutações aperiódicas, em que não há algum bloco de elementos repetido um certo número de vezes dentro da permutação; as permutações periódicas, em que se verifica a repetição dum bloco de elementos.

Chamaremos *período de permutação* precisamente ao menor bloco repetido nela.

35 — O número de elementos do período duma permutação periódica de n elementos é um divisor de n; e os números de elementos $a_1, a_2, \cdots, a_r$, no período, são directamente proporcionais aos números $p_1, p_2, \cdots, p_r$.

Para um período de δ elementos será $x_i = \frac{p_i}{n} \cdot \delta$ o número de elementos a_i presentes.

36 — Um divisor δ de n dará origem a um período, se os números x_i forem todos inteiros. Ora é

$$x = \frac{p_i}{n} \cdot \delta = \frac{p_i}{\frac{n}{\delta}} = \frac{p_i}{d} \text{ com } d = \frac{n}{\delta}.$$

Nas condições indicadas terá de ser d um divisor de $h =$ m. d. c. $(p_1, p_2, \cdots p_r)$. Cada divisor d de h dá origem à repetição de elementos do conjunto em blocos de $\delta = n/d$ elementos.

37 — Cada permutação linear aperiódica tem n permutações circulares; e cada permutação linear de período com δ elementos tem apenas δ permutações circulares.

38 — Subtraindo de $P_{n|p_1, p_2, \ldots, p_r}$ o número das permutações periódicas, obtém-se o número das que são permutações aperiódicas dos n elementos.

Designaremos por $\Pi_{n|p_1, p_2, \ldots, p_r}$ o número de permutações lineares periódicas dos n elementos e por $\Pi_{c(n)}$ o número de permutações circulares periódicas.

Então, o número de permutações circulares, $P_{c(n)}$, é

$$P_{c(n)} = \frac{1}{n}\left(P_{n|p_1, p_2, \ldots, p_r} - \Pi_{n|p_1, p_2, \ldots, p_r}\right) + \\ + \Pi_{c(n)}.$$

39 — Suponhamos que um período de δ elementos provém do divisor $d \neq 1$ de h. É

$$\delta = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{d} = \frac{p_1}{d} + \frac{p_2}{d} + \\ + \cdots + \frac{p_r}{d}.$$

As permutações lineares, em que este período se encontra repetido d vezes, são tantas quantas as maneiras distintas de escrever o período de δ elementos com p_i/d elementos a_i, isto é,

$$P_{n/d\,|\,p_1/d,\,\ldots,\,p_r/d}\,.$$

O somatório $P_{n/d\,|\,p_1/d,\,p_2/d,\,\ldots,\,p_r/d}$ estendido a todos os divisores de h contém todas as permutações lineares periódicas, mas algumas multiplicadas. Com efeito, se $d\,|\,h$ e d'/h, os blocos de $\delta = n/d$ e $\delta' = n/d'$ elementos são tais que, com $d = p\cdot d'$, é $p\cdot\delta = p\cdot\frac{n}{d} = p\cdot\frac{n}{p\,d'} = \frac{n}{d'} = \delta'$; o que indica que o período da permutação de blocos de δ' elementos é possìvelmente de δ elementos.

Somos assim levados a considerar apenas os divisores primos de h, com $h = \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu$, porque qualquer outro será múltiplo de algum destes.

Esta consideração não exclui totalmente a multiplicação da contagem, porque as permutações, com períodos de, por exemplo, $n/\alpha_1\,\alpha_2$ elementos, aparecerão contadas como de período com n/α_1 e n/α_2 elementos.

40 — Com correcção da contagem, temos para o caso considerado

$$P_{c\,(n)} = \frac{1}{n}\Big(P_{n\,|\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} - \sum_{i=1}^{\nu} P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\,p_2/\alpha_i,\,\ldots,\,p_r/\alpha_i} + C\Big) + \sum_{i=1}^{\nu} P_{c\,(n/\alpha_i)} - E\,.$$

41 — A permutação $P_{n/\alpha_i\alpha_j\,|\,\ldots}$ é contada duas vezes: uma como periódica de período com n/α_i elementos, e outra como de período com n/α_j elementos. A correcção a fazer é de 1.

A permutação $P_{n/\alpha_i\alpha_j\alpha_l\,|\,\ldots}$ é contada como de período com $n/\alpha_i,\,n/\alpha_j,\,n/\alpha_l$ elementos e também de período com $n/\alpha_i\alpha_j$, $n/\alpha_i\alpha_l$ e $n/\alpha_j\alpha_l$. A correcção a fazer seria de 2 correspondente à contagem nos períodos de n/α_j e n/α_l elementos, por exemplo, e há que completar a correcção com a exclusão da contagem correspondente aos factores produtos de dois números primos, porque já foram contados como de período n/α_i e n/α_j e n/α_l elementos. Então $C = 2 - \binom{3}{2}$.

Dum modo geral, temos, para $P_{n/\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\,|\,\ldots}$ uma correcção

$$\begin{aligned} C &= (s-1) - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} + \cdots + (-1)^s\binom{s}{s-1} \\ &= -1 + \binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \cdots + (-1)^s\binom{s}{s-1} \\ &= (-1)^s \end{aligned}$$

42 — Temos assim

$$\begin{aligned} P_{c\,(n)} = {} & \frac{1}{n}\,P_{n\,|\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_r} - \\ & - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{n}\,P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\,\ldots,\,p_r/\alpha_i} + \\ & + \sum_{l=2}^{\nu}\frac{(-1)^l}{n}\,P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\,\ldots,\,p_r/\omega(l)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu} P_{c\,(n/\alpha_i)} - \sum_{l=2}^{\nu}(-1)^l\,P_{c\,(n/\omega(l))} \end{aligned}$$

onde $\omega(l)$ é cada uma das combinações, l a l, de $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu$. Anàlogamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} P_{c\,(n/\alpha_i)} = {} & \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\alpha_i}{n}\,P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\,\ldots,\,p_r|\alpha_i} - \\ & - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\alpha_i}{n}\,P_{n/\alpha_i\alpha_j\,|\,p_1/\alpha_i\alpha_j,\,\ldots,\,p_r/\alpha_i\alpha_j} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=3}^{\nu}\frac{(-1)^{l+1}}{n}\,P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\,\ldots,\,p_r/\omega(l)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} P_{c\,(n/\alpha_i\alpha_j)} - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=2}^{\nu}(-1)^{l+1}\,P_{c\,(n/\alpha_i\omega(l)} \end{aligned}$$

. . . .

$$\sum_{\omega(s)} P_{c\,[n/\omega(s)]} = \sum_{\omega(s)} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\,|\,p_1/\omega(s),\dots,p_r/\omega(s)} -$$

$$- \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\alpha_j\,|\,p_1/\omega(s)\alpha_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} \frac{(-1)^{l-s-2}\omega(s)}{n} P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\dots,p_r/\omega(l)} +$$

$$+ \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} P_{c\,[\omega(s)\alpha_j]} - \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} (-1)^{l-s-2} P_{c[n/\omega(s)\omega(l)]}$$

. . . .

$$P_{c\,[n/\omega(\nu)]} = \frac{\omega(\nu)}{n} P_{n/\omega(\nu)\,|\,p_1/\omega(\nu),\dots,p_r/\omega(\nu)}$$

Ou mais condensamente

$$\sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} P_{c\,[n/\omega(s)]} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\,|\,p_1/\omega(s)\alpha_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} -$$

$$- \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\alpha_j\,|\,p_1/\omega(s)\sigma_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} \frac{(-1)^{l-s-2}\omega(s)}{n} P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\dots,p_r/\omega(l)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} P_{c\,[n/\omega(s)\alpha_j]} -$$

$$- \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} (-1)^{l-s-2} P_{c\,[n/\omega(l)\omega(s)]}$$

Somando ordenadamente com $P_{c\,(n)}$ e atendendo a que as permutações circulares dos segundos membros se podem ordenar segundo

$$(-1)^s \left[-1 + \binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + (-1)^s \binom{s}{s-1} \right] P_{c\,[n/\omega(s)]} =$$

$$= (-1)^s (-1)^s P_{c\,[n/\omega(s)]} = P_{c\,[n/\omega(s)]}$$

e se reduzem a $\sum_{s=1}^{\nu} P_{c\,[n/\omega(s)]}$, obtemos

$$P_{c\,(n)} = \frac{1}{n} P_{n\,|\,p_1,p_2,\dots,p_r} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\sum_{i=0}^{s} (-1)^{s+i} \sigma_i}{n} P_{n/\omega(s)\,|\,p_1/\omega(s)\dots}$$

com $\sigma_0 = 1$ e σ_i funções simétricas elementares dos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$.

Ou

$$P_{c\,(n)} = \sum_{d} \frac{\Phi(d)}{n} P_{n/d\,|\,p_1/d,\,p_2/d,\,\dots,\,p_r/d}$$

com Φ a função de Euler, e o somatório estendido a todos os divisores d de h.

43 — Totalidade de dicotomias de C.

Qualquer dicotomia definida em $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ consiste numa classificação de cada elemento em elemento b ou elemento c

$$a_1 = \begin{cases} b \\ c \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} b \\ c \end{cases} \quad \cdots \quad a_n = \begin{cases} b \\ c \end{cases}$$

Cada dicotomia dá origem a um elemento do produto cartesiano destes n conjuntos. O número de dicotomias é igual ao número de elementos do produto cartesiano de n conjuntos de dois elementos

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n \quad (n \text{ factores})$$

44 — Número de subconjuntos de C.

Cada dicotomia determina um subconjunto de C — o dos elementos classificados de b, por exemplo —, com desprezo do complementar — o dos elementos classificados de c. Consequentemente é

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

o número de subconjuntos de C: soma dos números dos que não têm elementos, só têm um elemento, dois elementos, etc., n elementos.

45 — Também

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!\,p!}$$

Donde

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!\,p!} = \frac{2^n}{n!}.$$

46 — Consideremos a bipartição

$$E_1 = \{x \mid x = a_j\} \qquad j = 1, 2, \cdots, r$$
$$E_2 = \{x \mid x = a_l\} \qquad l = r+1, r+2, \cdots, n$$

de $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Façamos i elementos a_j iguais a b e os restantes iguais a a. Este resultado pode obter-se de $\binom{r}{i}$ maneiras diferentes. Façamos $p-i$ elementos a_l iguais a b, por alguma das $\binom{q}{p-i}$ maneiras possíveis, com $q = n - r$, e os restantes iguais a a.

Nestas condições, a reunião dum E_1 com um E_2 dá uma permutação de C, com p elementos iguais a b e $n-p$ iguais a a. Os pares $(E_1 E_2)$ possíveis são em número $\binom{r}{i}\binom{q}{p-i}$ igual ao número de permutações de C, com p elementos iguais a b, dos quais i pertencem a E_1, e $n-p$ iguais a a. Fazendo variar i desde zero até p, obteremos todas as permutações de C

$$P_{n\,|\,p,\,n-p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{r}{i} \binom{q}{p-i}$$

ou numèricamente

$$\binom{n}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{r}{i} \binom{q}{p-i}$$

com $n = r + q$.

Esta igualdade é conhecida por *convolução de Vandermonde.*

47 — Particularmente, para $r = q = p$, vem

$$\binom{2p}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{p}{p-i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{p}{i} = $$
$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2.$$

48 — Por outro lado

$$\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i}^2 = \sum_{i=1}^{p} \left[\binom{p}{i} + \binom{p}{i-1}\right]^2 +$$
$$+ \binom{p+1}{0}^2 + \binom{p+1}{p+1}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i}^2 + \binom{p}{0}^2 + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i-1}^2 +$$
$$+ \binom{p}{p}^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i}\binom{p}{i-1}$$
$$= 2 \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \frac{p-i-1}{i} \binom{p}{i-1}^2$$

consequentemente

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{p-i-1}{i} \binom{p}{i-1}^2 = \frac{1}{2}\binom{2p+2}{p+1} - \binom{2p}{p}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2p+2}{p+1} \binom{2p+1}{p} - \binom{2p}{p}$$
$$= \binom{2p+1}{p} - \binom{2p}{p} = \binom{2p}{p-1}.$$

49 — Também

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} + \frac{2}{n!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \frac{1}{n!}\binom{2n}{n}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} = \frac{1}{n!}\left[\binom{2n}{n} - 2\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot\frac{(2n)! - 2(n!)^2}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{2^n \prod_{j=0}^{n-1}(2n-1-2j) - 2n!}{(n!)^2}$$

e ainda

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} =$$

$$= \frac{2^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1}(2n-1-2j) - n!}{(n!)^2}$$

50 — Aplicações de S em T

Uma função biunívoca, definida em S e de valores num subconjunto próprio de T, diz-se uma *aplicação de S em T*.

Se S é aplicável em T, então o número de elementos de S é igual ou menor do que o número de elementos de T. É consequência da univocidade da correspondência entre os elementos do contradomínio da função e os de S.

51 — Número de aplicação de S em T

Sejam S de p elementos e T de n elementos, com $p \leqq n$.

Para definir uma aplicação de S em T tenho de escolher ordenadamente p elementos de T. As aplicações possíveis são tantas quantas as possíveis escolhas ordenadas de p elementos de T, como vimos, em número

$$A_{n|p} = P_{n|n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

52 — Propriedades de $A_{n|p}$

a) O número de escolhas ordenadas de p elementos, num conjunto de n elementos, é o número de reordenações possíveis nos subconjuntos de p elementos. São $\binom{n}{p}$ subconjuntos de p elementos e cada um deles dá origem a P_p reordenações. A execução das duas operações sucessivas: determinação dum subconjunto de p elementos e reordenação do subconjunto, conduz a $\binom{n}{p} P_p$ resultados possíveis — arranjos dos n elementos, p a p.

Assim

$$A_{n|p} = \binom{n}{p} P_p.$$

b) As relações de recorrência do parágrafo 14 escrevem-se fàcilmente na notação dos arranjos.

1) $A_{n|n-p} = \dfrac{1}{p} A_{n|n-p+1}$ e, fazendo $n-p+1=q$ ou $p=n-q+1$ e $n-p=q-1$,

$$A_{n|q} = p\,A_{n|q-1} = (n-q+1)\,A_{n|q-1}.$$

2) $A_{n|n-p} = n\,A_{n-1|n-1-p}$

e, fazendo $n-p=q$,

$$A_{n\,|\,q}=n\,A_{n-1\,|\,q-1}\,.$$

3) $$A_{n\,|\,n-p}=\frac{n}{p}\,A_{n-1\,|\,n-p}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q}=\frac{n}{n-q}\,A_{n-1\,|\,q}\,.$$

4) $$A_{n\,|\,n-p}=A_{n-1\,|\,n-p}+(n-p)\,A_{n-1\,|\,n-1-p}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q}=A_{n-1\,|\,q}+q\,A_{n-q\,|\,q-1}$$

5) Do parágrafo 15 vem

$$A_{n\,|\,n-p}=\sum_{j=0}^{n-p}A_{n-p\,|\,j}\,A_{(n-1)-j\,|\,(n-p)-j}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q}=\sum_{j=0}^{q}A_{q\,|\,j}\,A_{(n-1)-j\,|\,q-j}$$

E anàlogamente

$$A_{n\,|\,n-p}=A_{n-p\,|\,1}\sum_{i=0}^{p}A_{n-1-i\,|\,n-p-1}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q}=A_{q\,|\,1}\sum_{i=0}^{p}A_{(n-1)-i\,|\,q-1}=q\sum_{i=0}^{p}A_{(n-1)-i\,|\,q-1}\,.$$

c) De $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n$ vem $\sum_{p=0}^{n}n!\binom{n}{p}=$
$=2^n\,n!$

Como

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}\binom{n}{p}p!=\sum_{p=0}^{n}P_{n\,|\,p}\,A_{n\,|\,p}$$

ou

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}\binom{n}{p}p!=\sum_{p=0}^{n}A_{n\,|\,n-p}\,A_{n\,|\,p}\,.$$

Então

$$\sum_{p=0}^{n}A_{n\,|\,n-p}\,A_{n\,|\,p}=2^n\,n!$$

53 — Permutação com elementos repetidos.

Consideremos n conjuntos, C_i, com os mesmos n elementos. Por exemplo, n ordenações dum mesmo conjunto de n elementos,

$$\begin{aligned}C_1&=\{a_1\,,a_2\,,\cdots,a_n\}\\C_2&=\{a_1\,,a_2\,,\cdots,a_n\}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\C_n&=\{a_1\,,a_2\,,\cdots,a_n\}\end{aligned}$$

Formemos todos os conjuntos ordenados que se obtêm tirando um elemento de cada conjunto C_i e colocando os elementos tirados linearmente no lugar correspondente à ordem da tiragem. Estes conjuntos podem ter um mesmo elemento repetido, quando muito, n vezes.

A primeira tiragem dá um dos n elementos do conjunto C_1; a segunda um dos n elementos do conjunto C_2 eventualmente o mesmo da primeira tiragem; e o mesmo acontece nas seguintes.

54 — Chamamos *permutação completa* dos n elementos $a_1,a_2,\cdots,a_n$ a cada um destes conjuntos ordenados de n elementos distintos, ou alguns repetidos, contados, em cada repetição, como novos elementos.

55 — Representaremos por Π_n o número das permutações completas de n elementos. É

$\Pi_n=n\times n\times n\times\cdots\times n$ ao todo n factores
$=n^n$:

(Continua)