MOVIMENTO MATEMÁTICO

BRASIL E ARGENTINA

O Dr. Alfredo Pereira Gomes realizou, em Julho de 1960, na Sociedade Brasileira para o Progresso das Ciências, uma conferência intitulada: «Formas Reais das Álgebras de Lie Semi-simples».

— O Dr. Hugo Batista Ribeiro, em Julho de 1960, foi contratado pela Universidade do Recife onde realizou o curso: «Teoria dos Grupos Abelianos: noções, métodos e resultados fundamentais dessa teoria e desenvolvimentos análogos para a Álgebra Universal».

— Na Universidade do Recife realizaram-se os seguintes seminários:

1) «Teoria dos Modelos» pelo Prof. Hugo Ribeiro: Cálculo de predicados, álgebra universal, problemas.

2) Tópicos sobre Álgebra Universal» pelo Prof. José C. Morgado.

— A Escola de Engenharia da Universidade do Recife publicou a seguinte apostila de curso:

M. Zaluar Nunes, «Diferenças, Interpolação, Derivação e Integração Numéricas».

Na semana de 20 a 25 de Julho de 1959 celebrou-se na Faculdade de Ciências Exactas y Naturais de Buenos Aires, por iniciativa do Centro de Cooperação Científica da UNESCO para a América Latina e daquela Faculdade, o terceiro simpósio sobre o tema «Alguns problemas matemáticos que se estão estudando na América Latina».

Este terceiro simpósio foi continuação de outros dois que ao mesmo assunto se dedicaram. O primeiro teve lugar em 1951 em Punta del Este, Uruguay e o segundo em Vilavicencio e Mendoza, em 1954, na Argentina, com assistência de matemáticos da Argentina, Bolívia, Brasil, Colombia, Cuba, México, Peru e Uruguay.

Dai nasceram cursos de aperfeiçoamento o primeiro dos quais se realizou em Mendoza em Fevereiro e Março de 1955; o segundo no México em Janeiro e Fevereiro de 1956; o terceiro em La Plata, Argentina, em 1957 e o quarto em Bogotá, Colombia, em 1959.

Toda esta actividade na América Latina tem sido grandemente influenciada pelo trabalho do Dr. António Monteiro ao qual o Director do Centro de Cooperação da UNESCO, Dr. Juan Ibañez Gomez se referiu, no discurso inaugural do 3.° Simpósio, nos seguintes termos:

«Para el mejor logro de los fines propuestos con este tipo de actividades nuestro Centro encargó al Dr. António Monteiro para visitar algunos países latino-americanos y recoger datos sobre sus respectivos ambientes matemáticos, sus problemas y sus necessidades. Su viage dejó valiosa información concretada en un minucioso informe que constituye valioso instrumento de trabajo».

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência ordinário — 29-6-1960.

I

5320 — 1) Diga quantos zeros tem $f(x)=12x^3+9x^2-18x+8$ no intervalo $(-2,1)$, sabendo que a sucessão de Fourier de $f(x)$ apresenta os seguintes sinais:

	-2	-1	0	1
f	$-$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$+$	$+$
f'''	$+$	$+$	$+$	$+$

Justifique convenientemente a resposta.

2) Defina integral de $\varphi(x)$ em (a, b) e indique algumas propriedades fundamentais. Utilize o cálculo integral para achar a área limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e a recta $y = 2x$.

R: 1) *A sucessão de* Fourier *perde uma variação entre* -2 *e* -1 *e portanto* $f(x)$ *tem um zero em* $(-2, -1)$. *Entre* 0 *e* 1 *a sucessão perde duas variações e portanto* $f(x)$ *pode ter duas ou zero raízes.*

Como em $(0, 1)$ *a primeira função cuja sucessão de* Fourier *perde uma variação é* $f'(x) = 18(2x^2 + x - 1)$, *calcule-se o zero dessa função em* $(0, 1)$: $x' = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$. *Ora* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4} > 0$ *e, como* $f(0) > 0$, $f(x)$ *não tem zeros em* $(0, 1)$. *Em* $(-2, 1)$ *existe portanto apenas um zero de* $f(x)$.

2) *A área pedida é* $A = \int_0^1 \sqrt{4x}\, dx - \int_0^1 2x\, dx =$

$$= 2\left|\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - [x^2]_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

II

5321 — Nas funções de duas variáveis a existência de derivadas parciais finitas num ponto implica a continuidade da função nesse ponto? Justifique a resposta.

Defina função diferenciável em $P(a, b)$ e demonstre que, para tal função, é $\lim\limits_{M=P} \dfrac{f(M) - f(P)}{\overline{MP}} = f'_x(a, b)\,\xi + f'_y(a, b)\,\eta$ sobre todo o arco emergente de P na direcção r de cosenos directores ξ e η.

Deduza as condições necessárias à existência de um extremo de $f(x, y)$ em $P(a, b)$.

Extremar a função $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

R: *A condição necessária para que um ponto seja extremante de* $\varphi = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$ *é que satisfaça ao sistema* $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$. *Como o único ponto que satisfaz é* $P(2, -3)$, *bastará agora analisar o sinal de* $s^2 - rt$. *Como* $s = \varphi''_{xy} = 0$, $r = \varphi''_{x^2} = 2$ *e* $t = \varphi''_{y^2} = 2$, *nesse ponto é* $s^2 - rt < 0$ *e portanto há um extremo em* P; *dado que* $r > 0$, *trata-se de um mínimo.*

III

5322 — Enuncie a extensão do teorema de Laplace e diga como se pode dar a forma de determinante ao produto de dois determinantes.

Considere o sistema $AX = B$ em que $A\,(n \times n)$ é regular. Mostre que B é uma composição linear dos vectores independentes $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (colunas de A) e aproveite o resultado para provar que num espaço a n dimensões não há mais de n vectores independentes.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 4-7-1960.

I

5323 — Resolva os seguintes problemas:

1) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

2) Extremar a função $x^3 + y^3 - 3axy$.

R: 1) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a_0}{x+1} + \dfrac{S_0}{x^2+1}$ *onde* a_0 *é uma constante e* S_0 *é um polinómio do 1.º grau.*

$a_0 = \left[\dfrac{1}{x^2+1}\right]_{x=-1} = \dfrac{1}{2}$ *e portanto* $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{S_0}{x^2+1}$ *ou* $\dfrac{S_0}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} - \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{1-x}{2(x^2+1)}$. *Logo*

$$P\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} P\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} P\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4} P\frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,log\,|x+1| + \frac{1}{2}\,arctg\, x - \frac{1}{4}\,log\,(1+x^2)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\,log\, 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\,log\, 2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,log\, 2.$$

2) *Os possíveis pontos extremos são as soluções do sistema* $\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0 \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$ *que dá* $P(0, 0)$ *e* $Q(a, a)$.

Como $s = -3a$, $r = 6x$ *e* $t = 6y$ *virá* $s^2 - rt > 0$ *para* $P(0, 0)$ *o que significa que este ponto não é extremo. Para* $Q(a, a)$ *vem* $s^2 - rt < 0$ *e, se* $a > 0$, *virá* $r > 0$ *e* $Q(a, a)$ *será um mínimo; se* $a < 0$ *é* $r < 0$ *e* $Q(a, a)$ *será um máximo.*

II

5324 — 1) Escreva a expressão da derivada m-ésima de $f(x, y)$ com $x = a + ht$ e $y = b + kt$ e deduza a fórmula de Taylor para $f(x, y)$ em $P(a, b)$.

2) Enuncie o teorema de existência das funções implícitas e diga em que condições a função implícita é diferenciável.

Determine λ por forma que a função implícita $y=\varphi(x)$ definida por $x^2+xy+\lambda x+\lambda^2=0$, tenha em $x=1$ uma tangente paralela ao eixo dos xx.

R: 2) *Como* $x=1$ *terá de satisfazer à equação dada terá de ser* $1+y+\lambda+\lambda^2=0$. *Por outro lado* $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y+\lambda}{x}$ *e, para que a tangente seja paralela ao eixo dos* xx, *deverá ser* $2+y+\lambda=0$. *O sistema* $\begin{cases}1+y+\lambda+\lambda^2=0\\ 2+y+\lambda=0\end{cases}$ *tem as soluções* $\begin{cases}\lambda=1\\ y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=-1\\ y=-1\end{cases}$ *e portanto para a função implícita definida na vizinhança de* $(1,-3)$ *é* $\lambda=1$ *e para a função definida na vizinhança de* $(1,-1)$ *é* $\lambda=-1$.

III

5325 — 1) Diga em que consiste o problema da interpolação. Dados os pares de valores (x_0, u_0), (x_1, u_1), $\cdots (x_n, u_n)$, mostre que o produto das raízes do polinómio interpolador é $(-1)^n \frac{u_0-x_0\delta u_0+x_0x_1\delta^2u_0-\cdots+(-1)^n x_0x_1\cdots x_{n-1}\delta^n u_0}{\delta^n u_0}$, em que $\delta^i u_0$ $(i=1,\cdots n)$ é a diferença dividida i-ésima de u_0.

2) Demonstre que é nula a soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada menor de m determinadas filas paralelas pelo complemento do menor homólogo de m outras filas paralelas às primeiras.

Utilizar os determinantes para discutir o sistema:

$$kx+y+z=1$$
$$x+ky+z=k$$
$$x+y+kz=k^2.$$

R: 2) *Se* $(k-1)^2(k+2)\neq 0$ *o sistema é possível determinado e tem a solução* $x=-\frac{k+1}{k+2}$, $y=\frac{1}{k+2}$, $z=\frac{(k+1)^2}{k+2}$; *Se* $k=1$ *o sistema é indeterminado (grau de indeterminação 2); se* $k=-2$ *o sistema é impossível.*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Prova Prática (1.ª chamada) — 15-7-1960.

I

5326—1) Determine k por forma que $f(x)=e^{kx^2+x}$ tenha um extremo para $x=1$. Indique a natureza desse extremo.

2) Calcule $\lim_{x=0}\left[\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right]$.

3) Calcule $P\,x\cdot \operatorname{tg}^2 x$.

R: 1) *Como* $f'(x)=e^{kx^2+x}(2kx+1)$, *para que* $f'(1)=0$ *terá de ser* $2k+1=0$ *ou* $k=-\frac{1}{2}$. *Dado que* $f''(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+x}[(1-x)^2-1]$, *vem* $f''(1)<0$ *e trata-se de um ponto maximizante.*

2)
$$\lim_{x=0}\left[\frac{2}{sen^2 x}-\frac{1}{1-cos\,x}\right]=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{2(1-cos\,x)-sen^2 x}{sen^2 x\,(1-cos\,x)}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{2\,sen\,x-2\,sen\,x\,cos\,x}{2\,sen\,x\,cos\,x\,(1-cos\,x)+sen^3 x}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{2-2\,cos\,x}{2\,cos\,x\,(1-cos\,x)+sen^2 x}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{2\,sen\,x}{-2\,sen\,x+4\,cos\,x\,sen\,x+2\,sen\,x\,cos\,x}=$$
$$=\lim_{x=0}\frac{2}{6\,cos\,x-2}=\frac{1}{2}$$

3) $P\,x\cdot tg^2 x=P\,x\,(sec^2 x-1)=P\,x\,sec^2 x-P\,x=$
$$=x\,tg\,x-P\,tg\,x-\frac{x^2}{2}=x\,tg\,x+log\,|\,cos\,x\,|-\frac{x^2}{2}.$$

II

5327 — 1) Desenvolva pela fórmula de Taylor até aos termos de segunda ordem a função x^y no ponto $(1,2)$.

2) Supondo $z=f(x,y)$ homogénea e admitindo que $f(x,y)=0$ define uma função implícita $y=\varphi(x)$ na vizinhança de $P(a,b)$, mostre que $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a=\frac{b}{a}$ e que a equação do plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ em $P(a,b)$ é $f'_x(a,b)X+f'_y(a,b)Y=0$.

R: 1) *Sendo* $\varphi(x,y)=x^y$ *vem:*

$\varphi'_x=y\,x^{y-1}$ $\varphi''_{x^2}=y\,(y-1)\,x^{y-2}$ $\varphi''_{x\,y}=x^{y-1}+x^{y-1}\,log\,x$
$\varphi'_y=x^y\,log\,x$ $\varphi''_{y^2}=x^y\,log^2 x$

A fórmula de Taylor *é*

$$\varphi(x,y)=\varphi(1,2)+(x-1)\,\varphi'_x(1,2)+(y-2)\,\varphi'_y(1,2)+$$
$$+\frac{1}{2!}[\varphi'_x(1,2)\,(x-1)+\varphi_y(1,2)]^{(2)}+\cdots=$$
$$=1+2\,(x-1)+\frac{1}{2!}[2\,(x-1)^2+2\,(x-1)\,(y-1)]+\cdots$$

2) *Como a função é homogénea, o teorema de* Euler *ensina que* $a f'_x(a,b) + b f'_y(a,b) = \alpha f(a,b)$.

Em virtude de ser $f(a,b) = 0$ *vem a* $f'_x(a,b) + b f'_y(a,b) = 0$ *ou* $-\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)} = \dfrac{b}{a}$ *e como* $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_a = -\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$ *está provado o primeiro resultado.*

O plano tangente a $z = f(x,y)$ *em* $P(a,b)$ *é* $f'_x(a,b)(X-a) + f'_y(a,b)(Y-b) = 0$ ou $f'_x(a,b)X + f'_y(a,b)Y = a f'_x(a,b) + b f'_y(a,b) = 0$.

III

5328 — 1) Dada a tabela

x	u
0	a
1	2
3	4
4	b

determine a e b por forma que o polinómio interpolador seja do 3.º grau, com o coeficiente do termo de maior grau igual a 1 e tenha raízes de soma nula. Escreva o polinómio.

2) Mostre que a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ é três. Exprima a quarta coluna como composição linear das três primeiras.

R: 1) *Construindo a tabela das diferenças divididas vem*

x	u	δu	$\delta^2 u$	$\delta^3 u$
0	a			
		$2-a$		
1	2		$\frac{a-1}{3}$	
		1		$\frac{b-a-4}{12}$
3	4		$\frac{b-5}{3}$	
		$b-4$		
4	b			

O polinómio interpolador (Newton) *é*

$$f(x) = a + (2-a)x + \frac{a-1}{3}x(x-1) + \frac{b-a-4}{12}x(x-1)(x-3)$$

e, de acordo com o enunciado, terá de ser:

$$\begin{cases} \dfrac{b-a-4}{12} = 1 \\ \dfrac{a-1}{3} - 4\,\dfrac{b-a-4}{12} = 0 \end{cases}$$ *sistema cuja solução é*

$$\begin{cases} b = 29 \\ a = 13 \end{cases}$$

O polinómio é $f(x) = 13 - 11x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-3) = x^3 - 12x + 13$.

2) *Como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *a característica da matriz é* 3.

Resolvendo o sistema

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pela regra de Cramer, *obtém-se* $x_1 = -31$, $x_2 = 19$, $x_3 = -8$ *e por conseguinte*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -31 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 19 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Prova Prática (2.ª chamada) — 18-7-1960.

I

5329 — 1) Estude a função $f(x) = x + \dfrac{1}{1-x}$.

2) Calcule $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.

R: 1) *O domínio é* $(-\infty, 1)\,(1, +\infty)$ *e as intersecções com os eixos são os pontos* $(0,1)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

A função é sempre crescente pois $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$. Como $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ *a concavidade está voltada para cima em* $(-\infty, 1)$ *e para baixo em* $(1, +\infty)$.

A curva admite as assintotas $X = 1$ e $Y = X$.

2) *Para calcular o integral proposto é necessário decompor a fracção racional em elementos simples. Ora*

$$\frac{2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{a_0 + a_1(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{S_0}{x^2+x+1}$$

e para calcular a_0 *e* a_1 *basta ordenar o numerador e o denominador da fracção auxiliar* $R_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$ *segundo as potências crescentes de* $t = x - 1$ *e efectuar a divisão, levando o cociente até ao grau* 1:

$R_1(x) = \dfrac{2+2t}{3+3t+\cdots}$ *e o cociente é* $\dfrac{2}{3}$, *isto é,*

$a_0 = \frac{2}{3}$ e $a_1 = 0$; S_0 *obtém-se fàcilmente notando que*

$$\frac{S_0}{x^2+x+1} = \frac{2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}, \text{ isto é, } S_0 = -\frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$\int \frac{2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3(x-1)} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = -\frac{2}{3(x-1)} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

II

5330 — Extreme a função $x^3 - 2xy + y^2$ e indique em que pontos da parábola $y = x^2$ a sua derivada se anula na direcção da tangente.

R: *Os pontos de estacionaridade obtêm-se resolvendo o sistema* $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$. *São eles* $P_1(0,0)$ e $P_2\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. *Como* $r = 6x$, $s = -2$ *e* $t = 2$, *vem* $s^2 - rt = 4 - 12x$. *No ponto* $P_1(0,0)$ *vem* $s^2 - rt > 0$ *e portanto não há extremo; em* $P_2\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ *vem* $s^2 - rt < 0$ *e* $r > 0$ *e portanto trata-se de um mínimo.*

Notando que os cosenos directores da tangente à parábola são $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ *e* $\eta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$, *a derivada dirigida da função segundo a direcção da tangente é* $\frac{3x^2-2y}{\sqrt{1+4x^2}} + \frac{(-2x+2y)\,2x}{\sqrt{1+4x^2}}$, *tomando o valor* $\frac{3x^2-2x^2}{\sqrt{1+4x^2}} + \frac{(-2x+2x^2)\,2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ *nos pontos da parábola. A derivada será nula quando* $x^2 + 2x(2x^2 - 2x) = 0$, *isto é, nos pontos* $A(0,0)$ *e* $B\left(\frac{3}{4},\frac{9}{16}\right)$.

III

5331 — 1) Determine α e β por forma que o polinómio

$$x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta$$

tenha uma raíz tripla.

2) Discuta o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 0 \\ 3x + ay + z &= b \end{aligned}$$

e interprete geomètricamente o resultado.

R: 1)
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta \\ \varphi'(x) &= 3x^2 + 2\alpha x + 2 \\ \varphi''(x) &= 6x + 2\alpha. \end{aligned}$$

A raiz tripla é raiz de $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *e* $\varphi''(x)$. *Assim, como o zero de* $\varphi''(x)$ *é* $-\frac{\alpha}{3}$, *substituindo-o em* $\varphi'(x)$ *obtém-se* $\alpha = \pm\sqrt{6}$. *Fazendo agora em* $\varphi(x)$ $x = -\frac{\alpha}{3}$ *e* $\alpha = \pm\sqrt{6}$ *e igualando a zero, obtém-se* $\beta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

2) *Constituindo o determinante* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$ *vê-se que o sistema é possível determinado se* $a \neq 1$ *(com qualquer* b*) o que indica que os 3 planos representados pelas equações lineares são concorrentes, num ponto.*

Se $a = 1$, *o determinante principal é* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *e a possibilidade do sistema depende do valor do característico* $\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b - 2$: *se* $b \neq 2$ o *sistema é impossível (o terceiro plano é paralelo à recta definida pelos dois primeiros); se* $b = 2$ *o sistema é possível indeterminado de grau* 1 *(o terceiro plano passa pela recta definida pelos dois primeiros).*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Outubro — 10/10/1960.

I

5332 — 1) Estude a função $f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x<0) \\ \dfrac{x^2}{x+1} \ (x>0) \end{cases}$.

2) Ache o desenvolvimento em série de MAC LAURIN de $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$, indicando o intervalo onde é válido o desenvolvimento.

3) Calcule $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,dx$.

R: 1) *O domínio é, evidentemente,* $]-\infty, +\infty[$ *e existe uma descontinuidade na origem. Como para* $x<0, f(x) = x+1$ *(recta) basta fazer o estudo para* $x>0$. *Calculando a derivada, obtem-se* $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}\ (x>0)$ *que é sempre positiva para* $x>0$; $f'_d(0) = 0$ e $f'_e(0) = -\infty$. *A função é pois sempre crescente e não tem extremos. Como* $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0\ (x>0)$, *a concavidade está sempre voltada para cima. Fácilmente se verifica que existe uma assintota oblíqua* $Y = X - 1$ *pois* $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ e $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.

2) *Como* $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + \cdots\ (|x|<1)$ e $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\ (|x|<1)$, *multiplicando os dois desenvolvimentos em série, obtem-se*

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n + \cdots,$$

também válido para $|x|<1$.

3) $\dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{x^2+1}$ *e então* $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,dx = \Big[\log(x^2-1) + \operatorname{arctg} x\Big]_2^3 = \log\frac{8}{3} + \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$.

II

5333 — 1) Extreme a função $\varphi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey$, discutindo os casos $AC - B^2 = 0$ e $AC - B^2 \neq 0$.

2) As relações $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ permitem definir r e θ em função de x e de y. Verifique que $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \dfrac{\partial r}{\partial x}$.

R: 1) $\varphi'_x(x,y) = 2Ax + 2By + 2D$
$\varphi'_y(x,y) = 2Bx + 2Cy + 2E$.

Os pontos de estacionaridade são dados pela resolução do sistema $\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0 \end{cases}$ *que é possível determinado quando* $AC - B^2 \neq 0$. *Como* $s = 2B$, $r = 2A$ *e* $t = 2C$, *vem* $s^2 - rt = 4(B^2 - AC)$ *e então se* $B^2 - AC > 0$ *não há extremo; se* $B^2 - AC < 0$ *há extremo: máximo se* $A<0$ *e mínimo se* $A>0$.

No caso de $AC - B^2 = 0$, *o sistema é impossível se* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{C} \neq \dfrac{D}{E}$, *não existindo extremo; se* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{C} = \dfrac{D}{E}$ *o sistema e indeterminado e a linha* $Ax + By + D = 0$ *é uma possível linha de extremos. Notando que, neste último caso,* $A\varphi(x,y) = (Ax + By + D)^2 - D^2$ *seja* (x_0, y_0) *um ponto que satisfaz a* $Ax+By+D=0$; *como* $A[\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0,y_0)] = (Ak + Bk)^2$, *a linha* $Ax+By+D=0$ *será uma linha de mínimos com* $A>0$ *e uma linha de máximos com* $A<0$.

2) *Como* $x^2 + y^2 = r^2$, *vem* $r = \sqrt{x^2+y^2}$. *Então* $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *e, como* $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *está provado o que se queria.*

III

5334 — 1) Dado o polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d$, que relação deve existir entre os coeficientes a, b, c e d para que uma das raízes seja igual à soma das outras duas?

Satisfeita esta condição, ache as raízes do polinómio.

2) Para que valores de α o vector $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ é composição linear dos vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\alpha\end{bmatrix}$? Escreva a composição para esses valores de α.

R: 1) *Designando por* x_1, x_2 *e* x_3 *as três raízes, tem-se* $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$. *Este sistema dá* $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ *e então* $a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^3 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + d = 0$ *ou* $b^3 - 4abc + 8a^2d = 0$, *que é a condição procurada. Se esta condição é satisfeita, o polinómio dado é divisível por* $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ *e então* $ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(ax^2 + \dfrac{b}{2}x + c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ *o que mostra que* x_2 *e* x_3 *são as raízes do trinómio do segundo grau* $ax^2 + \dfrac{b}{2}x + c - \dfrac{b^2}{4a}$.

2) *O problema equivale a saber para que valores de* α *é possível o sistema*

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Ora o sistema é possível determinado quando $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&\alpha\end{vmatrix} \neq 0$, *o que acontece com* $\alpha \neq 0$. *Com* $\alpha = 0$, *tome-se o determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$. *Como o característico* $\Delta' = \begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix} \neq 0$, *o sistema será impossível.*

Portanto o sistema só é possível (determinado) com $\alpha \neq 0$. *Resolvendo-o pela regra de* CRAMER *vem*

$$x_1 = \frac{\alpha+1}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{\alpha+1}{\alpha}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{1}{\alpha},$$

o que permite escrever a composição.

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. – MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Epoca de milicianos — 12-12-1960.

I

5335 – Considere a função $f(x) = \dfrac{k^2x+1}{x^2+1}$ $(k \neq 0)$ e resolva os seguintes problemas:

1) Ache o domínio de $f(x)$ e mostre que a função é sempre contínua nesse domínio, inclusivamente para $x = +\infty$ e $x = -\infty$.

2) Mostre que $f(x)$ não pode ser sempre crescente ou decrescente. Determine então os intervalos de monotonia, os extremos interiores e fronteiros, considerando os valores $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ integrados no contradomínio de $f(x)$. Qual é o mínimo absoluto e o máximo absoluto?

3) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{k^2x+1}{x^2+1}\,dx$.

R: 1) *O domínio é* $]-\infty, +\infty[$ *e a função é sempre contínua neste intervalo pois é cociente de funções contínuas (polinómios) sempre definido em* $]-\infty, +\infty[$. *Como* $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$, *a função é contínua para* $x = \infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{-k^2x^2 - 2x + k^2}{(x^2+1)^2}$ *e, como o trinómio* $-k^2x^2 - 2x + k^2$ *tem o binómio discriminante* $\Delta = 4 + 4k^4 > 0$, *é evidente que ele não tem sempre o mesmo sinal em* $]-\infty, +\infty[$ *e por isso* $f'(x)$, *cujo sinal é o do trinómio, não tem sinal constante em* $]-\infty, +\infty[$. *Assim* $f(x)$ *não é sempre crescente ou decrescente.*

Como $f'(x) > 0$ *quando* $k^2x^2 + 2x - k^2 < 0$, $f(x)$ *é crescente em* $\left[\dfrac{-1-\sqrt{1+k^4}}{k^2}, \dfrac{-1+\sqrt{1+k^4}}{k^2}\right]$; $f'(x) \leq 0$ *quando* $k^2x^2 + 2x - k^2 > 0$, *isto é, para todos os valores de* x *situados em qualquer dos intervalos* $\left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{1+k^4}}{k^2}\right]$ *e* $\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+k^4}}{k^2}, +\infty\right[$ $f(x)$ *é decrescente.*

É evidente que $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+k^4}}{k_2}$ *é minimizante e* $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+k^4}}{k^2}$ *é maximizante. Os extremos interiores são pois o mínimo* $P\left(\dfrac{-1-\sqrt{1+k^4}}{k^2}, a\right)$ $(a<0)$ *e o máximo* $Q\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+k^4}}{k^2}, b\right)$ $(b>0)$.

Os extremos fronteiros são um máximo para $x = -\infty$ *e um mínimo para* $x = +\infty$ *e é evidente que os extremos absolutos são* P *e* Q.

3) $$\int_0^1 \frac{k^2 x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{k^2}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 + \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{k^2}{2}\log 2 + \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}.$$

II

5336 — 1) Mostre que a função $\varphi(x, y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ é homogénea e verifique a identidade de Euler.

2) Que superfície é representada no espaço pela equação $x^2 + y^2 = r^2$? Ache a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(r, 0, 0)$ e mostre que há uma infinidade de pontos comuns ao plano tangente e à superfície.

R: 1) *A função é homogénea pois* $\varphi(tx, ty) = t^{-1}\varphi(x, y)$ *e o grau de homogeneidade é* -1.

Como $\varphi'_x(x, y) = \dfrac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$ *e* $\varphi'_y(x, y) = \dfrac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, *vem* $x\varphi'_x + y\varphi'_y =$

$$= -\frac{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2+y^2)(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = -1 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2},$$ *que é o teorema de* Euler.

2) *Trata-se de uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo dos* zz.

A equação do plano tangente é

$$f'_x(r, 0, 0)\,(X - r) + f'_y(r, 0, 0)\,(Y - 0) = 0$$

ou

$$2r(X - r) = 0$$

ou ainda $X = r$.

É evidente que este plano, paralelo a $y0z$, *passa por todos os pontos* $Q(r, 0, z)$ *pertencentes à superfície cilíndrica e que se dispõem segundo a geratriz* $\begin{cases} X = r \\ Y = 0 \end{cases}$.

III

5337 — Estude, por meio de determinantes, o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ 2x - y + z - u &= 1 \\ x + y - z - u &= 0 \\ x - y + z + \alpha u &= \beta \end{aligned}$$

e apresente a sua solução no caso em que for possível determinado.

R: *O sistema será possível determinado quando*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$

o que sucede com $\alpha \neq -\dfrac{1}{3}$.

Para esses valores de α *tem-se então a solução dada pela regra de* Cramer:

$$x = \frac{2\alpha + 4\beta - 2}{6\alpha + 2}, \quad y = -\frac{2\alpha + 4\beta - 2}{6\alpha + 2}, \quad z = \frac{4 - 6\beta}{6\alpha + 2}, \quad u = \frac{6\beta - 4}{6\alpha + 2}.$$

Quando $\Delta = 0$, *o que sucede com* $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, *encontra-se o determinante principal*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

e o determinante característico

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 6\beta - 4.$$

Pelo teorema de Rouché, *o sistema é impossível quando* $\Delta'_1 \neq 0$, *ou* $\beta \neq \dfrac{2}{3}$ *e é possível (neste caso indeterminado de grau 1) quando* $\Delta'_1 = 0$ *ou* $\beta = \dfrac{2}{3}$.

Resumindo:

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Possível} \begin{cases} \text{Determinado: } \alpha \neq -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta \text{ qualquer} \\ \text{Indeterminado: } \alpha = -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \text{Impossível: } \alpha = -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Solução de Fernando de Jesus

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Biológicas, Geológicas e Professores Adjuntos — Julho de 1960.

Ponto n.º 1

5338 — 1. Determine os extremos da função

$$z = x^4 + 3\,y^2 + x^2\,(2\,y - 1)\,.$$

2. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 5\,y - 3\,z = -13 \\ 3\,x + 6\,y - 4\,z = -11 \\ 3\,x + 2\,y + 4\,z = 13 \\ 2\,x + \;\; y - \;\; z = 2 \end{cases}$$

por condensação da matriz.

3. Numa das clássicas experiências de Mendel com ervilhas obtiveram-se os seguintes resultados:

Forma / Cor	Redondas	Angulosas
Amarelas	315	101
Verdes	108	32

Confirmarão estes números a teoria que prevê ervilhas dos quatro tipos na proporção de 9: 3: 3: 1? Justifique.

4. Defina momentos de uma distribuição e dê uma ideia da sua importância.

Que outros parâmetros conhece?

Calcule a mediana da distribuição cuja densidade de probabilidade é assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Biológicas, Geológicas e Professores Adjuntos — Outubro de 1960.

Ponto n.º 2

5339 — 1. Dada a equação $x^5 - 11\,x^4 + 23\,x^3 + 73\,x^2 - 176\,x + 90 = 0$ verifique que 1 é raiz e indique a respectiva multiplicidade Separe as raízes da equação e calcule um valor aproximado de uma raiz não racional.

2. Dada a seguinte tabela

x	-2	-1	0	1
y	7	4	1	-8

calcule o polinómio interpolador

a) por resolução de um sistema de equações lineares;

b) organizando uma tábua de diferenças e usando uma fórmula de interpolação.

3. De um baralho de 40 cartas tiram-se duas (com reposição). Qual a probabilidade de saída de

a) duas cartas de paus?

b) Pelo menos uma carta de paus?

Qual a probabilidade de saída de duas cartas de paus se a tiragem for feita sem reposição?

4. Propriedades da distribuição normal.

Na análise de uma amostra de uma variável casual verifica-se que 58 % dos dados são inferiores a 75, 38 % estão entre 75 e 80 e os restantes são superiores a 80. Qual a média e o desvio padrão admitindo que a amostra faz parte de uma população normal?

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1960.

5340 — 1. Dada a quádrica de equação

$$4\,x^2 - 4\,x\,y + 4\,x\,z + y^2 - 2\,y\,z + z^2 + 12\,x - 6\,y + 6\,z = 7$$

investigue se tem centro, determine os invariantes, escreva uma equação canónica e classifique a quádrica.

2. Demonstre e interprete geomètricamente o teorema de Lagrange.

Será o teorema aplicável à função $y = \sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-8,\ 8]$? Porquê?

3. Primitive

a) $x \log x$

b) $x^2\,e^x + \dfrac{1}{x^4 + 2\,x^2 + 1}$

c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3\,x + 2}\,.$

4. Considere um sistema triortogonal de referência $O\,X\,Y\,Z$, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e sejam $\mathbf{u}_i = \cos\alpha_i\,\mathbf{e}_1 + \cos\beta_i\,\mathbf{e}_2 + \cos\gamma_i\,\mathbf{e}_3 \quad (i = 1, 2, 3)$ três vectores de origem O.