a) Qual o significado de $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ e qual o comprimento de cada vector $\mathbf{u}_i$?

b) Mostre que o volume do paralelipípedo de arestas $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$ (supostos não complanares) é dado por

$$V=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}$$

c) Multiplicando, segundo regra conveniente, o determinante anterior por si mesmo, mostre que

$$V^2=\begin{vmatrix}1 & \cos(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}) & \cos(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3})\\ \cos(\widehat{\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1}) & 1 & \cos(\widehat{\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3})\\ \cos(\widehat{\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_1}) & \cos(\widehat{\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2}) & 1\end{vmatrix}$$

d) Se considerar agora um sistema de referência $O'X'Y'Z'$ não necessàriamente triortogonal, permite o resultado anterior atribuir algum significado geométrico importante ao determinante da matriz

$$\Omega=\begin{bmatrix}1 & \cos(\widehat{X',Y'}) & \cos(\widehat{X',Z'})\\ \cos(\widehat{Y',X'}) & 1 & \cos(\widehat{Y',Z'})\\ \cos(\widehat{Z',X'}) & \cos(\widehat{Z',Y'}) & 1\end{bmatrix}?$$

Enunciados do Dr. Dias Agudo

EXAMES DE ADMISSÃO E ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Exames de Admissão em 1959/60.

Prova escrita de Aritmetica e Álgebra

5341 — «Função exponencial de base $a, (a>1)$ e expoente real; função inversa».

Prova escrita de Geometria e Trigonometria

5342 — «Áreas; unidade de área; figuras equivalentes».

Prova prática de Aritmética e Álgebra

5343 — 1) Determine um número inteiro que admite seis divisores dos quais apenas dois são primos e tal que a soma de todos os seus divisores é 42;

5344 — 2) Estabeleça as relações a que devem satisfazer os coeficientes do polinómio x^4+px^2+qx+r para que admita uma raiz tripla.

Prova prática de Geometria e Trigonometria

5345 — 1) Um triângulo $[ABC]$ verifica as condições $\hat{A}<\hat{B}<\hat{C}$; conhecem-se, dele, o ângulo A, a altura $\overline{AH}$ e a mediana $\overline{AM}$. Supondo $A\hat{M}B=\alpha$ resolva as duas questões seguintes:

a) Exprima $\operatorname{cotg}\alpha$ em função de $\operatorname{cotg} A$ e $\operatorname{cotg} B$;

b) Mostre que é possível calcular $\hat{B}$ e $\hat{C}$ a partir dos dados.

2) Dado o triângulo $[A\,B\,C]$ tome-se o ponto M sobre $\overline{B\,C}$ e o ponto P sobre o prolongamento de $\overline{C\,A}$ de modo que se cumpra a condição $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{A\,P}}{\overline{C\,A}}=k$, em que $k>0$;

a) Prove que $\dfrac{\overline{A\,D}}{\overline{A\,B}}=k^2$ sendo D o ponto de encontro de $\overline{A\,B}$ com $\overline{P\,M}$.

b) Determine k de modo que seja área do triang. $[A\,P\,D]$ + área do triâng. $[D\,B\,M]=\dfrac{1}{2}$ área do triâng. $[ABC]$.