ANO XXI—N.º 79-80 GAZETA DE MATEMÁTICA ABRIL/SET. — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Telef. 29449 — LISBOA 2

Método de relaxação para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares

por A. César de Freitas

Este artigo destina-se a apresentar os elementos indispensáveis à compreensão e utilização do *método de relaxação* para resolver sistemas de equações algébricas lineares. Esse método, pela facilidade com que pode ser usado e pelo modo como traduz certas situações das aplicações práticas, tem larga aplicação em física e engenharia. Assim, por exemplo, usa-se correntemente na resolução numérica de equações diferenciais ordinárias e com derivadas parciais.

É um método que se adapta particularmente bem ao cálculo com papel e lápis e máquina de calcular vulgar, mas de difícil aplicação com as modernas máquinas calculadoras automáticas, pois a sua eficiência depende em grande parte do discernimento e da experiência do calculador.

A ideia básica do método de relaxação parece ser devida a Gauss, mas a sua popularidade e muitas das suas aplicações são devidas aos trabalhos de Southwell (1) e seus discípulos.

O nome de «relaxação» vem da terminologia de certas questões de engenharia onde Southwell aplicou o método pela primeira vez.

(1) Ver referências [4] e [5] da bibliografia.

1 — Considere-se o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

que supomos admitir uma e uma só solução, isto é, há um só conjunto de valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ que verificam as equações do sistema.

Seja $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ um conjunto (ordenado) de n números. Chamam-se *resíduos* correspondentes a esse conjunto e ao sistema (1), aos valores

$$(2) \quad \begin{cases} r_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n - b_1 \\ r_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n - b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n - b_n \end{cases}$$

Os resíduos serão todos nulos se, e só se, $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \cdots, \xi_n = x_n$ (ou seja, se $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ for a solução do sistema).

Diremos que $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ é uma *solução aproximada do sistema com erro inferior a* $\eta > 0$, se se tiver

$$(3) \qquad |\xi_1 - x_1| < \eta, |\xi_2 - x_2| < \eta, \\ , \cdots, |\xi_n - x_n| < \eta$$

Substituindo em (2) os valores de $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dados por (1) obtem-se

$$(4)\quad \begin{cases} r_1 = a_{11}(\xi_1 - x_1) + a_{12}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{1n}(\xi_n - x_n) \\ r_2 = a_{21}(\xi_1 - x_1) + a_{22}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{2n}(\xi_n - x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n = a_{n1}(\xi_1 - x_1) + a_{n2}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{nn}(\xi_n - x_n) \end{cases}$$

e, se se verificam as relações (3),

$$(5)\quad \begin{cases} |r_1| < (|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|)\,\eta \\ |r_2| < (|a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2n}|)\,\eta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |r_n| < (|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn}|)\,\eta \end{cases}$$

e, portanto, se η é suficientemente pequeno, os resíduos também são números próximos de zero.

Em geral só interessa determinar uma solução aproximada do sistema (1), quer porque o cálculo da solução exacta exigiria trabalhar com valores com um número incomportável de algarismos, quer porque muitas vezes os coeficientes e os termos independentes das equações não são números exactos (ou por resultarem de dados da observação, ou por resultarem de outros cálculos onde houve que fazer arredondamentos).

Interessa-nos observar que em certos sistemas podem obter-se resíduos bastante próximos de zero para valores $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ muito afastados da solução. É o que acontece, por exemplo, com o sistema

$$(6)\quad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

onde para $\xi_1 = 14{,}6$, $\xi_2 = -7{,}2$, $\xi_3 = -2{,}5$, $\xi_4 = 3{,}1$ se obtêm os resíduos $r_1 = -r_2 = -r_3 = r_4 = 0{,}1$; para $\xi_1 = 2{,}36$, $\xi_2 = 0{,}18$, $\xi_3 = 0{,}65$, $\xi_4 = 1{,}21$, obtêm-se os resíduos $r_1 = -r_2 = -r_3 = r_4 = 0{,}01$. Contudo a solução do sistema é $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Sistemas tais como (6) dizem-se *numéricamente instáveis* e, para estes sistemas, pequenas variações nos coeficientes traduzem-se por grandes variações na solução.

A resolução de sistemas numéricamente instáveis exige sempre cuidados especiais e, se os coeficientes estão sujeitos a incertezas, esses sistemas conduzem a soluções sem qualquer valor [1].

Em notação matricial o sistema (1) escreve-se

$$AX = B \qquad (1)'$$

onde A é a matriz do sistema, X é o vector-coluna das incógnitas e B é o vector-coluna dos termos conhecidos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dizer que o sistema admite uma e uma só solução equivale a dizer que a matriz A é regular.

O sistema (2), com a notação anterior, escrever-se-á

$$R = A\xi - B \qquad (2)'$$

sendo $R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$

Vem então, tendo em atenção (1)',

$$R = A\xi - AX = A(\xi - X) \qquad (4)'$$

que é o sistema (4).

---

[1] Ver referência [2] da bibliografia.

2 — Os inúmeros métodos de resolução do sistema (1) podem classificar-se em *métodos directos* (ou *exactos*) e *métodos iterativos* (ou *aproximados*)

Nos métodos directos obtem-se a solução do sistema por uma sequência finita de operações e, se estas se fazem exactamente, a solução obtida é exacta.

Nos métodos iterativos usam-se aproximações sucessivas: parte-se duma solução aproximada e a partir dela vão-se obtendo sucessivamente novas soluções aproximadas formando uma sucessão cujo limite é a solução (exacta) do sistema. É então necessário que exista esse limite, isto é, é necessário que o processo seja convergente; na prática, é preciso ainda que o processo seja rapidamente convergente para que se possa obter uma boa aproximação da solução com relativamente poucas iterações.

Note-se que em geral os métodos directos fornecem soluções aproximadas devido à necessidade prática de limitar o número de algarismos dos números com que se trabalha. Nos métodos iterativos (convergentes) pode obter-se sempre um valor aproximado da solução com a precisão que se queira, mas soluções exactas exigiriam, pelo menos geralmente, processos infinitos.

Um exemplo dum método directo é o conhecido *método de redução* da álgebra elementar. O *método de relaxação,* como vamos ver em seguida, é um método iterativo.

Nesse método calculam-se os resíduos correspondentes a uma solução aproximada $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ e por correcções sucessivas a partir das componentes desta solução, procura-se fazer com que esses resíduos tendam para zero. Com esse fim começa-se por construir uma tabela, a *tabela das operações unitárias,* das variações dos resíduos para variações unitárias de cada um dos $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.

Essa tabela é a seguinte

Δx_1	Δx_2	$\cdots$	Δx_n	Δr_1	Δr_2	$\cdots$	Δr_n
1	0	$\cdots$	0	a_{11}	a_{21}	$\cdots$	a_{n1}
0	1	$\cdots$	0	a_{12}	a_{22}	$\cdots$	a_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\cdots$	1	a_{1n}	a_{2n}	$\cdots$	a_{nn}

Com efeito, tem-se para o caso da primeira linha

$$\begin{cases} r_1' = a_{11}(\xi_1 + 1) + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n - b_1 \\ r_2' = a_{21}(\xi_1 + 1) + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n - b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n' = a_{n1}(\xi_1 + 1) + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n - b_n \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &= r_1' - r_1 = a_{11} \\ \Delta r_2 &= r_2' - r_2 = a_{21} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta r_n &= r_n' - r_n = a_{n1} \end{aligned}$$

As outras linhas obtiveram-se de modo análogo.

Note-se que os valores $\Delta r_1, \Delta r_2, \cdots, \Delta r_n$ são independentes da solução aproximada considerada.

Na parte da direita da tabela anterior os elementos da primeira linha são os coeficientes de x_1 no sistema (1), os elementos da segunda linha são os coeficientes de x_2, etc.; por outras palavras, os elementos dessa parte da tabela constituem a transposta da matriz do sistema.

Vamos agora ver como usar a tabela das operações unitárias no cálculo da solução aproximada do sistema (1), mas vamos fazê-lo com um exemplo simples, por ser a melhor maneira de perceber o método de relaxação.

3 — Seja obter, com erro inferior a 0,005, a solução do sistema

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 80 \\ 3x_1 + 10x_2 - x_3 = 50 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 40 \end{cases}$$

A tabela das operações unitárias é agora

	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δr_1	Δr_2	Δr_3	
(a)	1	0	0	9	3	− 1	
(b)	0	1	0	− 3	10	2	(I)
(c)	0	0	1	2	− 1	5	

Como não temos qualquer ideia dum valor aproximado da solução, vamos partir de $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ a que correspondem os resíduos $r_1 = -80$, $r_2 = -50$, $r_3 = -40$.

Os cálculos serão dispostos numa *tabela de relaxação* do modo seguinte

	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	r_3	
	0	0	0	−80	−50	−40	
(1)	9	—	—	1	−23	−49	
(2)	—	—	9	19	−32	−4	
(3)	—	3	—	10	−2	−2	
(4)	−1	—	—	1	−5	3	
	8	3	9	1	−5	3	Verificado

A linha (1) desta tabela foi obtida fazendo o que se chama *uma relaxação em* x_1 no valor de *9* unidades, tendo em vista reduzir a zero o maior resíduo (em valor absoluto); usou-se para isso a linha (a) da tabela (I).

A linha (1) exprime que para $\xi_1 = 9$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, se tem $r_1 = 1$, $r_2 = -23$, $r_3 = -49$.

A linha (2) foi obtida fazendo uma relaxação de *9* unidades em x_3, porque o maior resíduo (em valor absoluto) era agora $r_3 = -49$; a linha (3) obteve-se fazendo uma relaxação de 3 unidades em x_2; a linha (4) obteve-se fazendo uma relaxação em x_1 de valor igual a -1.

Nesta altura, para reduzir os resíduos, teriam de fazer-se relaxações de valor inferior à unidade o que não é conveniente do ponto de vista prático. Por isso, verificados os resíduos obtidos, multiplicamos todas as entradas por dez e continuamos o processo como a seguir indicamos.

Note-se que se a verificação falhar, não é necessário descobrir onde houve engano, basta corrigir os resíduos e partir dos novos valores de ξ_1, ξ_2, ξ_3, no nosso caso, $8, 3, 9$, respectivamente. O facto de não haver necessidade de descobrir os enganos constitui uma das vantagens do método de relaxação.

A continuação da tabela de relaxação é

10×	80	30	90	10	−50	−30	
	—	5	—	−5	0	40	
	—	—	−8	−21	8	0	
	2	—	—	−3	14	−2	
	—	−1	—	0	4	−4	
	82	34	82	0	4	−4	Verificado
10×	820	340	820	0	40	−40	
	—	—	9	18	31	5	
	—	−3	—	27	1	−1	
	−3	—	—	0	−8	2	
	—	1	—	−3	2	4	
	817	338	829	−3	2	4	Verificado
10×	8170	3380	8290	−30	20	40	
	—	—	−8	−46	28	0	
	5	—	—	−1	43	−5	
	—	−4	—	11	3	−3	
	—	—	2	15	1	−3	
	−2	—	—	−3	−5	−1	
	8173	3376	8284	−3	−5	−1	Verificado

e portanto a solucão do sistema nas condições pedidas é $x_1 = 8{,}17$, $x_2 = 3{,}38$, $x_3 = 8{,}28$.

Houve que fazer um grande número de operações mas todas muito simples e a maioria delas foi feita mentalmente.

Contudo o processo pode ser acelerado usando *grupos de relaxação* que correspondem a fazer relaxações de mais do que uma incógnita de cada vez. Para isso deveria ter-se acrescentado à tabela (I) mais algumas linhas do tipo seguinte.

	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δr_1	Δr_2	Δr_3
(*d*)	1	1	0	6	13	1
(*e*)	1	0	1	11	2	4
(*f*)	1	3	0	0	33	5
(*g*)	2	0	1	15	5	0

Estas linhas obtêm-se imediatamente das da tabela (1). Assim para obter a linha (*d*) basta somar os elementos correspondentes das linhas (*a*) e (*b*); a linha (*g*) obtem-se somando o dôbro dos elementos da linha (*a*) com os elementos correspondentes da linha (*b*); etc.. Têm particular interesse linhas em que apareça algum elemento nulo porque permitem fazer a redução de alguns resíduos sem alterar outros.

Nalguns casos a redução de certo grupo de residuos obtem-se mais fàcilmente se for precedida duma *sobre-relaxação,* isto é, uma relaxação tendo em vista mudar o sinal de de um ou mais resíduos.

4 — O exemplo que acabamos de resolver não permite avaliar todas as vantagens do método de relaxação pois algumas delas só se evidenciam quando se trata de resolver sistemas com um grande número de incógnitas em que muitos dos coeficientes sejam iguais a zero. Estes sistemas aparecem na resolução numérica de equações diferenciais (1). De resto, no exemplo referido, é discutível se o método empregado tem vantagem sobre os métodos directos.

Evidentemente que o método de relaxação nem sempre é aplicável porque o processo pode não ser convergente (ou convergir muito lentamente). Isso acontece em geral com os sistemas numèricamente instáveis. Contudo muitas vezes é possível, usando artifícios, passar dum certo sistema para outro, para o qual o processo já seja convergente.

Dum modo geral, pode dizer-se, que o método é aplicável sempre que seja possível obter uma tabela de operações unitárias e de grupos de relaxação, de modo que na coluna correspondente a cada resíduo, exista um elemento que, em valor absoluto, seja grande quando comparado com os valores absolutos dos restantes elementos da linha a que pertence.

Por outro lado, como já se deve ter notado, o método de relaxação só é eficiente para a resolução de sistemas cujos coeficientes são inteiros e relativamente pequenos (em valor absoluto).

5 — Para um estudo mais desenvolvido do método de relaxação e suas aplicações podem consultar-se as obras seguintes

BIBLIOGRAFIA

[1] D. N. de G. Allen, *Relaxation Methods,* Mc Graw-Hill Publ. Co. Ltd. (1955)

[2] A. César de Freitas, *Métodos numéricos em álgebra linear,* publicação do Seminário de Calc. Num. e Máq. Matem. do Instituto de Alta Cultura, Lisboa (a aparecer brevemente)

[3] F. S. Shaw, *Relaxation methods* Dover Publications, Inc. (1953)

[4] R. V. Southwell, *Relaxation methods in theoretical phisics,* Oxford University Press (1946)

[5] R. V. Southwell, *Relaxation methods in engineering science,* Oxford University Press (1951)

Em [1] encontra-se uma extensa bibliografia sobre o assunto; em [2], além do método de relaxação, tratam-se outros métodos de resolução do sistema (1); [4] e [5] apresentam variadíssimas aplicações do método, mas sempre tratadas do ponto de vista físico.

Lisboa, Julho 1960

(1) Ver [1] e [3]