3) «Cálculo das probabilidades e Estatística Matemática», pelo Prof. MANUEL ZALUAR NUNES: noções de probabilidades e estimação estatística.

4) «Álgebra Linear», pelo Prof. ROBERTO RAMALHO DE AZEVEDO: curso solicitado pela Comissão de Desenvolvimento Económico de Pernambuco (CODEPE).

5) «Análise Funcional», pelo Prof. JÔNIO LEMOS: espaços métricos normados, aplicações.

Professores estrangeiros — Foi contratado, pela IMPA, por um período de 6 meses o Prof. STEPHEN SMALE, da Universidade da Califórnia, Berkeley, USA, que realiza um curso intitulado «Diferential Topology»: teoremas de imersão, fibrados vectoriais, cobordismo.

O Dr. António A. Monteiro, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro e da Universidade Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina, fez na IMPA uma conferência intitulada: Matrizes características de MORGAN para o Cálculo Proposicional.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame Final — Epoca de Julho — (2.ª chamada) — 18-7-1959.

I

5163 — Determine $f(x,y)=0$ por forma que a quádrica $x_1^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+2\,x_2\,x_3-2\,x_1\,x_3+2\,x_1\,x_5+2\,X\,x_2\,x_5+2\,(Y-1)\,x_3\,x_5-4\,x_4\,x_5$, ao descrever $P(X,Y)$ a curva $f(x,y)=0$, se decomponha exactamente em quatro quadrados.

Apresente nesse caso a decomposição.

R:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	**1**	0	-1	0	1	$\to f_1=x_1-x_3+x_5$
x_2	0	0	1	0	X	
x_3	-1	1	1	0	$Y-1$	
x_4	0	0	0	1	-2	
x_5	1	X	$Y-1$	-2	1	

	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	X	
x_3	1	2	0	Y	
x_4	0	0	**1**	-2	$\to f_2=x_4-2\,x_5$
x_5	X	Y	-2	0	

	x_2	x_3	x_5	
x_2	0	1	X	
x_3	1	**2**	Y	$\to f_3=x_2+x_3+Y\,x_5$
x_5	X	Y	-4	

	x_2	x_5	
x_2	-1	$2X-Y$	$\to f_4=-x_2+(2X-Y)\,x_5$
x_5	$2X-Y$	$-8-Y^2$	

Para que a quádrica se decomponha exactamente em quatro quadrados terá de ser $\begin{vmatrix} -1 & 2X-Y \\ 2X-Y & -8-Y^2 \end{vmatrix} = 8-4X^2+4XY=0$ *e portanto* $f(x,y)=2xy-2x^2+4=0$. *A decomposição em quadrados é* $(x_1-x_3+x_5)^2+(x_4-2\,x_5)^2+(x_2+x_3+Y\,x_5)^2-[x_2+(2X-Y)\,x_5]^2$.

II

5164 — Dados os planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x-y+z=0\\ \pi_2 &\equiv 2x+y+z=0\\ \pi_3 &\equiv -2x+4y-z=0\\ \pi_4 &\equiv 2x-3y+z=0 \end{aligned}$$

determine as soluções independentes do sistema, bem como a solução geral.

Aproveite o resultado para calcular os cosenos directores da recta definida por π_1 e π_2.

R: *Como fàcilmente se reconhece, a característica de* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ *é igual a* 2 *e portanto o grau de indeterminação do sistema proposto é* 1. *Existe pois uma solução independente e qualquer outra é proporcional. Tomando* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$ *para determinante principal, será* z *a incógnita secundária e fazendo* $z = 1$, *por exemplo, obtém-se a solução independente* $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ *e a solução geral* $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0, \alpha\right)$.

Devido à proporcionalidade, $\frac{x}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ *e por conseguinte os parâmetros directores da recta definida por* π_1 e π_2 *são* $h = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = 1$. *Os cosenos directores obtêm-se pelas formas* $\cos\alpha, \beta, \gamma = \frac{h, k, l}{\pm\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ *que dão* $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

III

5165 – Considere a função $f(x) = x \log(1+x)$.

a) Desenvolva $f(x)$ em potências de $x-1$.

b) Calcule $Pf(x)$.

c) Determine $f^{(n)}(x)$.

R: a) *Fazendo* $x - 1 = t$, *como* $\log(2+t) = P\frac{1}{2+t}$ *e* $\frac{1}{2+t} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^n}{2^{n+1}}$ *vem* $\log(2+t) = \log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}$.

$$(1+t)\log(2+t) = \log(2+t) + t\log(2+t) = \log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} + t\log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+2}}{(n+1)\,2^{n+1}} = \log 2 + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)t + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)\,2^{n+1}}\, t^{n+1} = \log 2 + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)\,2^{n+1}}(x-1)^{n+1}.$$

b) $$Pf(x) = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + C.$$

c) $$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} = \log(1+x) + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^4}$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + \frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 2, 3, \cdots$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro – 13-10-1959

I

5166 – Considere a quádrica $f = X^* A X$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, e a transformação $X = BY$, com $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

a) Mostre que a transformação é ortogonal.

b) Apresente a quádrica $g = Y^* C Y$, resultante daquela transformação. Aproveite-a para apresentar a decomposição de $f(x_1, x_2, x_3)$ em quadrados. Classifique a quádrica $f(x_1, x_2, x_3)$.

R: a) *A transformação é ortogonal porque a matriz* B *é ortogonal. Com efeito,*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$(0)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

b) *Fazendo a transformação* $X=BY$ *a quádrica* $f=X^*AX$ *transforma-se na quádrica equivalente* $g=(BY)^*ABY=Y^*B^*ABY$, *isto é,* $C=B^*AB=$ $=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. *Portanto* $g=3y_1^2+3y_2^2$ *e, como*

$$Y=B^{-1}X=B^*X=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\end{bmatrix},$$

vem $\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\\ y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3)\\ y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\end{cases}$ *e* $f=\frac{3}{2}(x_1-x_2)^2+$ $+\frac{1}{2}(x_1+x_2-2x_3)^2$. *A quádrica* $f(x_1,x_2,x_3)$ *é definida positiva.*

II

5167 — 1) Desenvolva em série de Mac Laurin a função $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$, indicando o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

Calcule em termos finitos $Pf(x)$.

2) Dada a função $y=x^{\frac{1}{x}}$, indique o seu domínio, defina-a em $x=0$ por forma que fique contínua à direita nesse ponto, calcule $y'_d(0)$, determine os extremos e intervalos de monotonia.

R: 1) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}=(1-x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=(1-x)\left[1+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n\right]=$$

$$=1+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(1n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n-x-$$

$$-\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{n+1}=1-\frac{3}{2}x+$$

$$+\sum_2^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)(4n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n,\ \text{para } |x|<1.$$

$$Pf(x)=P\frac{1}{\sqrt{1+x}}-P\frac{x}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}-P\frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

A primitiva de $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ *pode calcular-se fazendo* $1+x=t^2$. *Assim,* $P\frac{x}{\sqrt{1+x}}=2P\frac{t^2-1}{t}\cdot t=$ $=2\frac{t^3}{3}-2t=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}$ *e então vem*

$$Pf(x)=4\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C.$$

2) *Como* $y=e^{\frac{\log x}{x}}$, *o domínio é visivelmente* $(0,+\infty)$. *Dado que* $\lim_{x\to+0}y=0$, *terá de ser* $y(0)=0$ *para que a função fique contínua à direita em* $x=0$.

$$y'_d(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to+0}e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\log x}=0.$$

Como $y'=e^{\frac{\log x}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\log x\right)=\frac{e^{\frac{\log x}{x}}}{x^2}(1-\log x)$, $y'>0$ *em* $(0,e)$ $y'=0$ *em* $x=e$ *e* $y'<0$ *em* $(e,+\infty)$ *e portanto* $y(x)$ *cresce em* $(0,e)$ *atinge um máximo em* $x=e$ *e decresce em* $(e,+\infty)$. *Claro que* $x=0$ *é minimizante de* $y(x)$.

III

5168 — Certa função $y=\varphi(x)$ é definida implìcitamente pela equação $y^p+x^p+k=0$. Dada a recta $ax+by=c$ (a, b e c parâmetros), determine a condição para que ela seja tangente a $y=\varphi(x)$.

Forme o sistema constituído pela equação que exprime essa condição e pela recta dada, resolva-o em ordem a x e y por forma a obter $x=g_1(a,b,c)$ e $y=g_2(a,b,c)$ e mostre que estas duas funções são homogéneas de grau zero.

R: *A condição é que* $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}$ ou $\left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}=$ $=\frac{a}{b}$. *O sistema* $\begin{cases}\left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}=\frac{a}{b}\\ ax+by=c\end{cases}$ *é equivalente a* $\begin{cases}\frac{x}{y}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}\\ ax+by=c\end{cases}$ *e utilizando, por exemplo, o método de substituição, obtem-se:*

$$x=\frac{c}{b\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-p}}+a}\ \ e\ \ y=\frac{c}{a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}+b},$$ *funções que são, visìvelmente, homogéneas de grau zero.*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. – Matemáticas Gerais – Exame final – Época de milicianos – 12/12/1959.

I

5169 – Estude o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= \beta \\ x - y + z + u &= 0 \\ 2x + y + z + u &= 0 \\ \alpha x - y - z - u &= \gamma \end{aligned}$$

para os diferentes valores de α, β e γ, utilizando a teoria dos determinantes. Refira-se em pormenor ao caso da homogeneidade.

R: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2+\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(2+\alpha).$$

Se $\alpha \neq -2$ *o sistema é possível determinado para quaisquer valores de* β *e* γ; *em particular, com* $\beta = \gamma = 0$ *o sistema é homogéneo e admite apenas a solução nula.*

Se $\alpha = -2$, *como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, *o sistema é possível indeterminado (grau 1)*

se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$, *o que acontece com qualquer* β *e* $\gamma = 0$; *em particular, com* $\beta = \gamma = 0$ *o sistema é homogéneo e indeterminado do grau 1, apresentando portanto soluções proporcionais.*

O sistema será impossível com $\alpha = -2$, $\gamma \neq 0$ *e* β *qualquer.*

II

5170 – 1) Estude a função $y = \dfrac{k}{1+e^{-x}}$ $(k > 0)$.

2) Calcule $P \log^2 x$.

R: 1) *Domínio* $(-\infty, +\infty)$. *Intersecta o eixo dos* yy *no ponto* $(0, k)$. *Como* $y' = k\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})} > 0$, *a fnnção é sempre crescente.* $y'' = k\, e^{-x}\dfrac{(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$ *e portanto a concavidade está voltada para cima em* $(-\infty, 0)$ *e para baixo em* $(0, +\infty)$, *havendo uma inflexão no ponto* $\left((0; \dfrac{k}{2}\right)$. *Como* $\lim\limits_{x\to+\infty} y = k$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} x = 0$, *a curva possui as assíntotas* $y = 0$ *e* $y = k$.

2) $$P\,log^2 x = x\,log^2 x - 2\,P\,x \cdot log\,x \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= log^2 x - 2\left(x\,log\,x - P\,x \cdot\right) =$$
$$= x\,log^2 x - 2x\,log\,x + 2x + C.$$

III

5171 – Dada a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, resolva os seguintes problemas:

a) Mostre que é homogénea e escreva-a na forma $g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Calcule $g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $g'_x\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $g'_y\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e mostre que estas funções ainda são homogéneas.

b) Calcule a derivada de (f, xy) sobre a curva

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$$

c) A equação $f(x, y) - 2 = 0$ pode definir implìcitamente uma função $y(x)$ na vizinhança de $P(1, 1)$? Porquê?

R: *a*) $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$ *e portanto a função é homogénea de grau* 0. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ *e portanto* $g'\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{x^2}{y^2} + 1$, *função homogénea de grau* 0; $g'_x\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$ *e* $g'_y\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x}$, *ambas funções homogéneas de grau* -1.

b) $$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{y^2}\right) 2t.$$

c) *A equação é satisfeita em* $P(1, 1)$ *mas* $f'_y(1, 1) = 0$ *e portanto não pode definir uma função implìcitamente na vizinhança desse ponto.*

Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência ordinário — 7-3-1960.

I

5172 — 1) Determine os pontos de acumulação, pontos fronteiros e limites de Weierstrass do conjunto $\left\{0, \left[(-1)^n \frac{1}{n}\right], \left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. O conjunto é fechado? Porquê?

Dispondo os elementos do conjunto em sucessão, determine os seus limites máximo e mínimo e mostre que há uma infinidade de elementos inferiores ao limite mínimo. Poderá existir alguma sucessão em que haja uma infinidade de elementos inferiores a um número menor do que o limite mínimo? Porquê?

2) Prove que, tendendo $x_{n+1} - x_n$ para K, também $\frac{x_n}{n}$ tende para K. Qual o limite da sucessão

$$u_n = \frac{1}{n}\left[2 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] ?$$

R: 1) *Pontos de acumulação:* 0 e 2.

Pontos fronteiros: $\left\{0, \left[(-1)^n \frac{1}{n}\right], \left(\frac{2n}{n+1}\right), 2\right\}$

O conjunto não é fechado porque o ponto de acumulação 2 *não pertence ao conjunto.*

2) *O teorema do limite da média aritmética dá imediatamente* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n}\left[2 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

II

5173 — 1) Deduza o 1.° critério de Cauchy e diga como o aplica ao estudo das séries de potências.

Supondo que a série $\sum (-1)^n a_n \; (a_n > 0)$ é absolutamente convergente, qual é o màximo intervalo de convergência absoluta para a série $\sum a_n x^n$? É aí uniforme a convergência? Porquê?

Diga em que condições o intervalo indicado coincide com o intervalo de convergência absoluta de $\sum a_n x^n$.

2) Determine pela regra de Cauchy o quadrado da série $\sum x^n$ e indique a sua soma.

R: 2) $\left(\sum x^n\right)^2 = \sum n\, x^{n-1}$ *que, para* $|x| < 1$, *tem a soma* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

III

5174 — 1) Estude a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} 1 + x \; (x < 0) \\ 2 \; (x = 0) \\ x^2 \; (x > 0), \end{cases}$ calcule os limites laterais $f(+0)$ e $f(-0)$ e a oscilação para $x = 0$.

2) Enuncie e demonstre o teorema de Lagrange para as funções regulares. Pode aplicar-se esta proposição a $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ em $(-1, 1)$? Porquê?

R: 1) *A função é contínua em* $(-\infty, +\infty)$ *excepto para* $x = 0$.

$$f(+0) = 0 \quad \text{e} \; f(-0) = 1$$

$$w(0) = \overline{f}(0) - \underline{f}(0) = 2 - 1 = 1.$$

2) *A proposição não se pode aplicar a* $\varphi(x)$ *em* $(-1, 1)$ *porque esta função não é regular nesse intervalo Embora seja contínua,* $\varphi(x)$ *tem derivada infinita de duplo sinal em* $x = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência extraordinário — 2-4-1960.

I

5175 — Prove que ponto de acumulação do conjunto dos termos de uma sucessão é limite de subsucessões. Supondo que uma sucessão tem uma infinidade de sublimites, mostre que o conjunto destes é fechado.

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log n}$.

R: *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$, *vem* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log n} = 0$.

II

5176 — 1) Mostre que uma condição necessária de convergência de uma série é dada pela evanescência do termo geral.

Defina série absolutamente convergente e enuncie as suas propriedades fundamentais.

Determine os valores de x para os quais a série $\sum n \left(\frac{1}{x-a}\right)^n$ é absolutamente convergente.

2) Como estuda a natureza de um produto infinito de termos positivos? Indique os valores

de α para os quais o produto $\Pi\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ é convergente.

R: 1) *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left|\frac{1}{x-a}\right|^n} = \frac{1}{|x-a|}$, *a série dada será absolutamente convergente para os valores de* x *tais que* $|x-a|>1$ *ou* $x>a+1$ *e* $x<a-1$.

2) *O produto será convergente quando* $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ *o for, o que acontece com* $\alpha>1$.

III

5177 – 1) Supondo que $\varphi'(x)>0$ em (a,b), prove que $\varphi(x)$ é crescente nesse intervalo.

2) Considere as funções $\Phi(y)$ e $f(x)$. Supondo que $\Phi'(b)$ é finita $(b=f(a))$ e $f(x)$ é contínua em $x=a$, prove que $F(x)=\Phi[f(x)]$ é contínua em $x=a$. A mesma hipótese garante a existência de $F'(a)$? Porquê?

3) Calcule P arc sec x.

R: 3) *P arc sec* $x = x$ *arc sec* $x - P\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$
$= x$ *arc sec* $x -$ *arch* $x + C$.

Soluções de Fernando de Jesus

F. C. L. – Matemáticas Gerais – 2.° exame de frequência – (Licenciaturas em Ciências Biológicas e Geológicas) – 1959-60.

5178 – Estude a curva $y=\frac{x^2+1}{x}$.

5179 – Demonstre e interprete geomètricamente o teorema de Lagrange. Será o teorema aplicável à função $y=\sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-8,8]$? Porquê?

5180 – Determine $\lim\limits_{x\to\pi-0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi-x}}$.

5181 – Primitive *a)* $\cos^{\frac{2}{3}} x \cdot \operatorname{sen}^3 x$; *b)* $x^2 e^x + \frac{1}{x^4+2x^2+1}$; *c)* $\frac{x^2-x+1}{x_2-3x+2}$.

5182 – Determine a área limitada pela parábola $y=2-x^2$ e a recta $y+x=0$.

Enunciados do Dr. Dias Agudo

I. S. T. – Matemáticas Gerais – Exame de frequência – 1959-60.

5183 – *a)* Discutir o seguinte sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=b \\ x+y+az=b^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

e resolvê-lo quando possível.

b) Indicar em cada um dos casos a posição relativa dos planos representados pelas quatro equações.

5184 – Dada a relação $w=2iz+4$, com $z=x+iy$ e $w=u+iv$, determine o lugar das imagens de w no plano de Argand quando

a) $\rho(z)\leqslant 2$; *b)* $\rho(z)<2$ e $I(z)\geqslant|R(z)|$

5185 – Considerando os vectores $\overline{u}=2\overline{I}+\overline{J}$ e $\overline{v}=a\overline{I}+b\overline{J}+2\overline{K}$, supostos aplicados no ponto $B(0,1,2)$, determine a e b de modo que $\overline{u}$ seja perpendicular a $\overline{v}$ e o ponto $A(1,2,3)$ esteja a uma distância igual a 1 do plano definido por $\overline{u}$ e $\overline{v}$ (eixos rectangulares).

5186 – Considerando a matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Determine 3 vectores próprios $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ de módulo igual a 1 (eixos triortogonais).

b) Calcule os ângulos $(\widehat{\overline{v_i}, \overline{v_j}})$ $(i\neq j)$. Seria de prever o resultado? Porquê?

c) Designando por V_i a matriz coluna constituída pelas coordenadas de $\overline{v_i}$ $(i=1,2,3)$, determine a matriz inversa de $T=[V_1\,V_2\,V_3]$.

d) Com $X=|x\,y\,z|$ determine X^*AX e indique, em que se transforma esta expressão quando se faz a substituição $X=TX'$.

e) O que representa geomètricamente cada uma das equações $X^*V_i=0$ e a que se reduz cada uma delas por meio da transformação anterior?

Enunciados do Dr. Dias Agudo

I. S. T. – Matemáticas Gerais – Exame final – 1959-60. (Algumas questões).

Ponto 1

5187 – Dada a quádrica $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$.

a) Determine o plano diametral conjugado com a recta de equações $x = y, z = 0$. Trata-se de algum plano diametral particular? Justifique a resposta.

b) Deduza uma equação canónica e classifique a quádrica.

5188 — Pretende-se construir um silo de volume dado V com a forma de um cilindro terminado por um hemisfério na parte superior. Cada metro quadrado de construção custa para o hemisfério o dobro do que custa para o cilindro. Determinar as dimensões do silo por forma a tornar mínimo o custo da construção.

5189 — Dada a função $w = e^{\log x y z}$ com $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \sqrt{1+4t^3}$, $z = t^{a^t}$. Calcular $\dfrac{dw}{dt}$ e $\dfrac{d^2 w}{dt^2}$.

5190 — Em determinados problemas de Resistência de Materiais intervém as grandezas $M(x)$ (momento flector) e $T(x)$ (espaço transverso) relacionadas por $T(x) = \dfrac{dM}{dx}$.

Considere uma viga assente no eixo OX de um sistema de referência XOY com os extremos em $(0,0)$ e $(l,0)$ e suponha que para ela se tem

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} q b & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2} q b - q(x-a) & \text{para } a < x < a+b \\ -\dfrac{1}{2} q b & \text{para } a+b \leqslant x \leqslant l \quad (a, b, l, q \text{ constantes positivas}). \end{cases}$$

Determine a correspondente função $M(x)$ sabendo que $M(0) = 0$ e estude a variação de $M(x)$ no intervalo $(0, l)$.

Ponto 2

5191 — Dado o plano $\pi \equiv x + z + 1 = 0$ e a recta $r \equiv x = y = z$, determine:

a) Os planos que passam por r e formam com π um ângulo de 60°.

b) Os planos paralelos a π que cortam a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ segundo uma circunferência de raio 4.

5192 — Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes do plano $x + y + z = 1$ e do ponto $P(1, 1, 1)$. Como se chama a superfície obtida?

5193 — Dada a função $u = f(r)$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{dx^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 u}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}$.

5194 — Em que teoremas se baseia para concluir que uma funcão contínua transforma um intervalo fechado noutro intervalo fechado?

Sejam m e M o mínimo e o máximo da função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Mostre que $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$ e conclua daí que existe pelo menos um ponto ξ em $[a, b]$ tal que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$.

Interprete geomètricamente esta propriedade.

Exprimindo $\int_a^b f(x)\,dx$ em termos de uma primitiva de $f(x)$ que teorema obtém? Justifique.

Enunciados do Dr. Dias Agudo

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência – 1960.

5195 — 1) Prove que, sendo iguais todos os sublimites de uma sucessão, esta tem limite.

5196 – 2) Estude a natureza da série

$$a_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - \cdots$$

supondo que a_n decresce para zero.

5197 — 3) Intervalo de convergência e comportamento nos extremos deste para a série

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{3^n\, n!} (2x)^n$$

5198 – 4) Discuta a natureza do produto infinito

$$\prod_1^{\infty} (1 - u_n)\, e^{u_n}$$

5199 — 5) Calcule no ponto $x = 0$ os limites laterais e as derivadas laterais da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{para } x < 0 \\ +\sqrt{2-(x-1)^2} & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5200 – 6) Seja F um conjunto fechado e A um conjunto aberto contido em F. Prove que é fechado o conjunto dos elementos de F não pertencentes a A.

5201 – 7) Designe $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ uma série uniformemente convergente em cada ponto de X limitado e fechado Mostre que ela converge uniformemente em X.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência — 1960.

5202 — 1) Considere a função

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

a) Calcule as assíntotas

b) Prove que admite quatro extremos locais e indique a natureza de cada

c) Prove que admite um e um só ponto de inflexão

d) Faça o traçado aproximado

e) Efectue a decomposição em fracções simples e calcule a área limitada pela curva e o eixo dos xx.

f) Usando a mesma decomposição, calcule o termo geral do desenvolvimento segundo as potências de x e indique o intervalo de convergência

5203 — 2) *a*) Se $f(x)$ tem segunda derivada negativa ao longo do intervalo (a, b), que dizer do sentido da concavidade da sua imagem? Justifique

b) Em que condições se pode integrar termo a termo uma série de potências? Estabeleça o teorema em que baseia a resposta.

c) Suponha que as funções $\varphi(u, v)$, $\psi(v)$ e $f(x, y)$ têm derivadas de primeira ordem nos pontos (u_0, v_0), v_0 e $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(v_0)$, respectivamente. Imponha condições que assegurem a existência das derivadas de primeira ordem da composição $F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(v)]$ no ponto (u_0, v_0). Dê as expressões dessas derivadas.

J. J. Dionísio

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 9-2-1960.

Ponto n.º 2

5204 — 1) Solução analítica e gráfica do sistema

$$\begin{cases} |Rz| = 3 \\ Rz = Iz \end{cases}$$

Nota: Rz e Iz indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.

2) Considere o sistema (em x, y, z)

$$\begin{cases} x + ay + z = \alpha \\ ax + \ \ y + z = \beta \\ x + ay + z = \gamma\,; \end{cases}$$

determine uma matriz principal do sistema e escreva (em cada caso) as matrizes características correspondentes.

3) Represente por Q o corpo dos números racionais e considere os polinómios $A = 2 + x + x^2$ e $B = 1 + x^2$ de $Q[x]$;

a) exprima o máximo divisor comum de A e B como combinação linear de A e B usando o algoritmo de Euclides;

b) servindo-se exclusivamente dos cálculos da alínea *a*), decomponha em elementos simples de $Q(x)$ a fracção $\dfrac{2}{(2 + x + x^2)(1 + x^2)}$.

Nota: A e B são irredutíveis sobre Q.

4) Considere o corpo assim definido:

$E = \{0, 1, 2, 3\}$;

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

;

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

;

determine os polinómios do grau dois e normados de $E[x]$ irredutíveis (sobre E).

5) Considere um corpo E e em seguida o conjunto $E[x]$ dos polinómios de coeficientes em E e na indeterminada x; supondo que $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de ideais de $E[x]$ tal que dados dois (quaisquer) elementos A_α e A_β da família existe um elemento da família A_γ tal que $A_\alpha \subset A_\gamma$ e $A_\beta \subset A_\gamma$, mostre que $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ é um ideal.

6) Considere a série de termo geral $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Verifique que é divergente usando o teorema de Cauchy (é essencial mostrar prèviamente a legitimidade da sua aplicação).

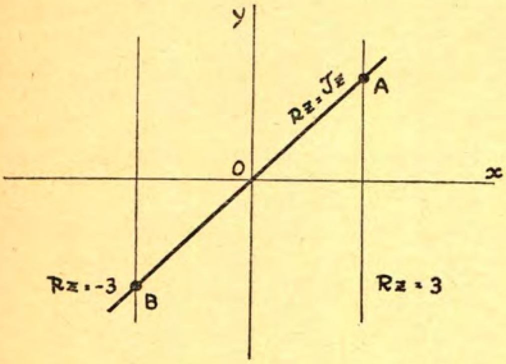
Nota: As questões que deverá resolver são:

1, 2, 3, 5 e 6 ou 1, 2, 4, 5 e 6.

Resolução do ponto n.º 2

1) a) Solução analítica: $|Rz| = 3$ *significa* $Rz = 3$ *ou* $Rz = -3$; *logo as soluções são* $3 + 3i$ e $-3 - 3i$.

b) Solução gráfica: A, B.



2) *A matriz do sistema é* $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$; *como o seu determinante é zero* (*1.ª e 3.ª linhas iguais*), *a sua característica é* 1 *ou* 2 (*há elementos diferentes de zero*); *a submatriz* $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *relativa às duas primeiras linhas e às duas últimas colunas, tem determinante igual a* $a-1$ *e daqui, na hipótese* $a \neq 1$, *a submatriz referida é matriz principal e a matriz característica correspondente é* $\begin{bmatrix} a & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ a & 1 & \gamma \end{bmatrix}$; *no caso* $a = 1$ *poderá tomar-se a submatriz* $[1]$, *relativa à primeira linha e à primeira coluna, como matriz principal e as matrizes características correspondentes são*

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

3) a) $A = B\,Q + R_1$ *com* $Q_1 = 1$ $R_1 = 1 + x$
$B = R_1\,Q_2 + R_2$ *com* $Q_2 = -1 + x$ $R_2 = 2$

logo, $R_2 = 2$ *é máximo divisor comum de* A *e* B; *como:*

$$R_1 = A - B\,Q_1 \quad e \quad R_2 = B - R_1\,Q_2,$$

teremos:

$$R_2 = B - (A - B\,Q_1)\,Q_2 = A\,(-Q_2) + B\,(1 + Q_1\,Q_2)$$

$$2 = (2 + x + x^2)\,(1 - x) + (1 + x^2)\,x$$

b) $$\frac{2}{(2+x+x^2)\,(1+x^2)} = \frac{(2+x+x^2)\,(1-x) + (1+x^2)\,x}{(2+x+x^2)\,(1+x^2)} = \frac{x}{2+x+x^2} + \frac{1-x}{1+x^2}$$

4) *Seja* $A = a + b\,x + x^2 \in E\,[x]$ *irredutível* (*sobre* E); *como* A *é de grau dois, dizer que é irredutível e equivalente a dizer que a função polinomial definida por* A *toma em cada ponto de* E *um valor diferente de* 0. a *e* b *deverão então ser determinados pelas condições:*

$$A\,(0) = a \neq 0$$
$$A\,(1) = a + b + 1 \neq 0$$
$$A\,(2) = a + b\,2 + 3 \neq 0$$
$$A\,(3) = a + b\,3 + 2 \neq 0.$$

Analisemos, a título de exemplo, o caso $a = 1$. *Da segunda condição, vem, então,* $b = 1$ *ou* $b = 2$ *ou* $b = 3$; *pelas duas últimas teremos que afastar o caso* $b = 1$; *isto é, o polinómio* $1 + b\,x + x^2$ *é irredutível quando e só quando* $b = 2$ *ou* $b = 3$.

5) i) *O polinómio zero pertence a* $\bigcup_{i \in I} A_i$; *pois o polinómio zero pertence a qualquer ideal;*

ii) *Se* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *e* $B \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *então* $A - B \in \bigcup_{i \in I} A_i$; *na verdade, existem então* $\alpha \in I$ *e* $\beta \in I$ *tais que* $A \in A_\alpha$ *e* $B \in A_\beta$ *e como existe* $\gamma \in I$ *tal que* $A_\alpha \subset A_\gamma$ *e* $A_\beta \subset A_\gamma$, A *e* B *pertencem ao ideal* A_γ *e daqui se conclui que* $A - B \in A_\gamma \subset \bigcup_{i \in I} A_i$;

iii) *se* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$, *qualquer que seja* $X \in E\,[x]$, $A\,X \in \bigcup_{i \in I} A_i$; *como* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *existe* $\alpha \in I$ *tal que* $A \in A_\alpha$ *e como* A_α *é ideal,* $A\,X \in A_\alpha \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

b) O *teorema de* Cauchy *invocado é este:* «*se* $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$ *é uma sucessão decrescente e de termos não-negativos, pondo* $b_i = 2^i\,a_{2^i}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, *as séries* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes*».

Ora $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1,2,3,\dots}$, *é decrescente e de termos não-negativos, logo o teorema é aplicável. A série de termo geral* $b_i = 2_i\,\dfrac{1}{\sqrt{2^i}}$, $i = 0, 1, 2 \cdots$, *é a série geométrica* $1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \cdots$, *de razão* $\sqrt{2}$, *que é divergente. A série de termo geral* $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, *é portanto divergente.*

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 9-2-60.

Ponto n.º 3

5205 — 1) Solução gráfica e analítica do sistema

$$\begin{cases} |\,\mathcal{R}\,z + \mathcal{I}\,z\,| = 1 \\ |\,z\,| = 1. \end{cases}$$

Nota: $\mathcal{R} z$ e $\mathcal{I} z$ indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.

2) É dado o sistema (em x, y, z):

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ ax + by + cz = c; \end{cases}$$

condicione a, b e c, apresentando o resultado de maneira simples, de modo que o sistema seja solúvel e tenha mais que uma solução usando exclusivamente o teorema de Rouché sob a forma em que intervêm directamente os determinantes das matrizes características.

3) Represente por Q o corpo dos números racionais e considere os polinómios $A = 1 - x + x^2$ e $B = 1 + 2x + x^2$ de $Q[x]$;

a) exprima o máximo divisor comum de A e B como combinação linear de A e B usando o algoritmo de Euclides;

b) usando exclusivamente o método dos coeficientes indeterminados, decomponha em elementos simples de $Q(x)$ a fracção: $\dfrac{6 + 8x + 13x^2 + 5x^3}{(1+x)^2(1 - x + x^2)}$

Nota: $1 - x + x^2$ é irredutível sobre Q.

4) Considere o corpo assim definido:

$E = \{0, 1, 2, 3\}$;

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

;

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

;

a) Diga, justificando, se o polinómio $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ é ou não irredutível (sobre E); caso seja não irredutível, factorize-o em factores normados e irredutíveis (de $E[x]$);

b) determine o polinómio $A \in E[x]$, quando muito de grau três, tal que:

$$A(0) = 1 \quad A(1) = 2 \quad A(2) = 3 \quad A(3) = 1.$$

5) Considere, por exemplo, o corpo dos números complexos C, e no conjunto E dos subcorpos de C a relação de ordem parcial $\subset$ (inclusão de conjuntos).

Mostre:

a) cada parte $A (\neq \emptyset)$ de E é minorada e tem ínfimo;

b) cada parte $A (\neq \emptyset)$ de E é majorada e tem supremo.

6) Aplicando o critério de D'Alembert à série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \cdots$$

diga se é convergente ou divergente.

Nota: Designando por $a_n, n = 1, 2, \cdots$, o termo de ordem de n, é:

$$\begin{cases} a_{3n-2} = 1/2^{n-1}\ 3^{n-1}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \\ a_{3n-1} = 1/2^{n}\ 3^{n-1}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \\ a_{3n} \quad = 1/2^{n}\ 3^{n}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Observação: As questões que deverá resolver são: 1, 2, 3, 5 e 6 ou 1, 2, 4, 5 e 6.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 1959-1960.

Alguns enunciados doutros pontos

5206 — 1) Considere o conjunto Z dos números inteiros e as relações ρ e σ definidas em Z como se indica:

$$\begin{aligned} x \rho y \text{ significa } \quad & x \leqslant y \text{ se } |x| = |y| \\ & |x| < |y| \text{ se } |x| \neq |y|; \\ x \sigma y \text{ significa } \quad & |x| = |y|. \end{aligned}$$

Mostre que ρ é uma relação de ordem total e σ é uma relação de equivalência.

2) Sejam ρ e σ relações de ordem parcial definidas no conjunto $E \neq \emptyset$ e considere as relações τ_1 e τ_2 definidas em E deste modo:

$$x \tau_1 y \text{ significa } x \rho y \text{ ou } x \sigma y;$$
$$x \tau_2 y \text{ significa } x \rho y \text{ e } x \sigma y.$$

Diga, justificando, se alguma das relações τ_1 e τ_2 é de ordem parcial.

3) Considere a relação ρ definida no corpo dos números complexos como se indica:

$$\begin{aligned} z \rho z' \text{ significa } \quad & \mathcal{I} z \leqslant \mathcal{I} z' \text{ se } \mathcal{R} z = \mathcal{R} z' \\ & \mathcal{R} z < \mathcal{R} z' \text{ se } \mathcal{R} z \neq \mathcal{R} z'. \end{aligned}$$

Mostre que ρ é um relação de ordem total.

4) Estude, pelo teorema de CAUCHY e mostrando a legitimidade da sua aplicação, a série de termo geral

a_n, $n=1,2,3,\cdots$, com $a_1=1$ e $a_n=\dfrac{1}{n\log n}$

para $n=2,3,\cdots$.

5) Estude, pelo critério de CAUCHY, a série:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{5^6}+$$
$$+\frac{1}{8^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{5^9}+\cdots$$

Nota: Representando por a_n, $n=1,2,\cdots$, o termo de ordem n, é:

$$a_{3n-2}=1/8^{3n-2} \quad n=1,2,\cdots$$
$$a_{3n-1}=1/2^{3n-1} \quad n=1,2,\cdots$$
$$a_{3n}\ \ =1/5^{3n} \quad n=1,2,\cdots$$

6) Considere o corpo assim definido:

$E=\{0,1\}$;

+	0	1
0	0	1
1	1	0

;

·	0	1
0	0	0
1	0	1

.

a) $1+x+x^2+x^3$ e $E[x]$ é irredutível (sobre E)? Justifique.

b) Forme as tabelas das operações «+» e «•» definidas em $E\times E$ do modo seguinte:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$
$$(x,y)\bullet(u,v)=(x\cdot u,y\cdot v).$$

c) Verifique que $(E\times E,+,\cdot)$ não é um corpo.

Enunciados e soluções de
Aníbal Coimbra Aires de Matos

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **2.º exame de frequência — 1960.**

1.ª chamada

5207 — 1) Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 7\\ 1 & 2 & -1\\ -4 & -6 & 9\end{bmatrix}$$

a) Calcule $c(\lambda)$, adj $(\lambda I - A)$ e A^{-1}

b) Mostre que é cíclica

c) Calcule os valores próprios e bases dos subespaços próprios, estas usando adj $(\lambda I - A)$.

5208 — 2) Seja $A=[\alpha_{ij}]$ matriz tal que

$$R\,\alpha_{kk}>\sum_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n}|\alpha_{kj}| \qquad k=1,\cdots,n$$

a) Prove que são positivas as partes reais de todos os valores próprios

b) Prove que é $\det R\,A>0$.

5209 — 3) Designe A a soma directa de r transformações lineares $A_1,\cdots,A_r$ com polinómios mínimos respectivos $f_1(\lambda),\cdots,f_r(\lambda)$ primos entre si dois a dois. Dê, justificando, o polinómio mínimo de A.

5210 — 4) *a*) É dado o polinómio $f(\lambda)=$ $=\lambda^2-3\lambda+1$. Obtenha a decomposição espectral de $f(A)$ usando a relativa a A.

b) Se C é nilpotente de índice q, prove que $\sum_{k=1}^{q-1}\alpha_k C^k=0$ implica $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{q-1}=0$.

c) Usando as alíneas anteriores, deduza para A uma condição incidente sobre os valores próprios, necessária e suficiente para que $f(A)$ resulte completa.

2.ª chamada

5211 — 1) Calcule os valores próprios da matriz

$$A=\begin{bmatrix}9 & -1 & -1\\ -1 & 9 & -1\\ 2 & 2 & 12\end{bmatrix}$$

e obtenha uma base de JORDAN.

5212 — 2) *a*) Prove que é unidimensional qualquer subespaço próprio de uma transformação linear cíclica.

b) É a recíproca verdadeira? Justifique.

c) Condição necessária e suficiente para que uma transformação cíclica seja completa.

5213 – 3) *a*) Que valores são admissíveis para α de modo que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

admita potência infinita? Use o teorema de Oldenburger.

b) Confirme o resultado anterior mediante o cálculo prévio da sucessão das potências de A.

5214 – 4) *a*) A matriz não-negativa A é ampliada com uma linha e uma coluna não-negativas. Relacione o raio espectral da nova matriz com o de A.

b) Prove que matriz nilpotente não-negativa é transformável por permutação em matriz triangular.

J. J. Dionísio

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 1.ª frequência — (1.ª chamada) — 1960.

5215 – 1) Demonstre que, num espaço métrico, a distância entre um conjunto compacto e um conjunto fechado é maior que zero, se, e só se, os dois conjuntos são disjuntos. Mostre com um exemplo que a distância entre dois conjuntos fechados pode ser nula, sendo os conjuntos disjuntos.

5216 – 2) Mostre que um sub-espaço fechado dum espaço métrico completo é também completo.

5217 – 3) Prove que, num espaço separado, dados vários pontos em número finito, é sempre possível escolher vizinhanças desses pontos, disjuntas duas a duas.

5218 – 4) Reduza à forma triangular o sistema

$$\begin{aligned} Dx + Dy - z &= \varphi \\ Dx + y + Dz &= \varphi \\ x + y + Dz &= \varphi \end{aligned}$$

e supondo que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \text{ ou } t > \pi/2 \\ 1, & \text{se } 0 < t < \pi/2 \end{cases}$$

ache a solução do sistema que se anula para $t < 0$.

5219 – 5) Determine, pelo método de truncatura, a solução da equação $y''' + 4y' = 1$ que verifica as condições $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.

5220 – 6) Determine a função de Green associada ao sistema

$$\begin{gathered} y'' + 2y' + 2y = \varphi(x) \\ y(0) = 0\,,\ y(\pi/2) = 0 \end{gathered}$$

e determine a resposta do sistema quando a acção $\varphi(x)$ é a função $|\operatorname{sen} 4x|$.

5221 – 7) Prove que a sucessão de funções

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n, & \text{para } |x| \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ 0, & \text{para } |x| > \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

converge em média sobre a recta mas não converge em média quadrática nem pontualmente.

5222 – 8) Mostre que, se φ é uma função indefinidamente derivável no sentido usual e S uma distribuição qualquer, o produto de composição $\varphi * S$ é uma função indefinidamente derivável no sentido usual. (Supõem-se φ e S nulas à esquerda da origem).

F. C. L. — Análise Superior — 1.ª frequência — (2.ª chamada) — 1960.

5223 – 1) Seja f uma aplicação de R num intervalo limitado; mostre que, para f ser contínua, é necessário e suficiente que o gráfico de f seja um conjunto fechado em R^2.

5224 – 2) Prove que o espaço R^3 é homeomorfo ao interior de uma esfera de R^3 e que R^2 não é homeomorfo a uma superfície esférica.

5225 – 3) Sendo E um espaço separado, prove que, dados dois conjuntos compactos M, N de E disjuntos, existem sempre dois conjuntos abertos disjuntos A; B de E tais que $M \subset A$ e $N \subset B$.

5226 – 4) Determine pelo método de truncatura a solução da equação

$$y^{(\mathrm{IV})} - y = \cos x$$

que verifica as seguintes condições iniciais

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\ y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,.$$

5227 — 5) Determine a solução do sistema

$$x'+y'-x-y=H$$
$$x''+y''-x+y=\delta$$

que se anula à esquerda da origem. (H designa a função de HEAVISIDE e δ a distribuição de DIRAC).

5228 — 6) Determinar a função de GREEN associada ao sistema

$$y'''=\varphi(x)\,,\ y(0)=0\,,\ y(1)=y'(1)=0\,.$$

5229 — 7) Mostre que, se T é uma distribuição de ordem $p\geqslant 2$, todas as soluções da equação $y''+ay'+by=\mathrm{T}$ são distribuições de ordem $p-2$.

F. C. L. — ANÁLISE SUPERIOR — **2.ª frequência — 1960**

5230 — 1) Seja f uma função holomorfa num domínio D e seja a uma singularidade isolada de f. Demonstre que:

a) Condição necessária e suficiente para que a seja um polo de ordem k é que existam duas constantes positivas M, N tais que se tenha

$$N\leq|f(z)|\,|z-a|^k\leq M$$

numa vizinhança de a privada deste ponto.

b) É impossível a condição $|f(z)|\geqslant e^{\frac{1}{|z-a|}}$ numa vizinhança de a privada deste ponto.

5231 — 2) Mostre que a função $\exp(1/z)$ é limitada no semi-plano $\mathrm{Re}\,z<0$, apesar de a origem ser uma singularidade essencial para esta função.

5232 — 3) Seja D um domínio aberto qualquer do plano complexo C e designe $\mathcal{H}(D)$ o espaço vectorial complexo formado pelas funções holomorfas em D, com as definições usuais de adição de duas funções e produto de uma função por um número complexo. A cada função $f\in\mathcal{H}(D)$ e a cada compacto $K\subset D$, com um número infinito de pontos, façamos corresponder o número $p_K(f)=\max\limits_{z\in K}|f(z)|$. Posto isto

a) Provar que p_K é uma função norma definida em $\mathcal{H}(D)$, qualquer que seja o compacto K.

b) Caracterizar a convergência de uma sucessão f_n de funções de $\mathcal{H}(D)$, relativamente ao sistema de normas $p_K(f)$.

c) Provar que o operador D de derivação é contínuo relativamente à topologia introduzida em $\mathcal{H}(D)$ pelo sistema de normas $p_K(f)$.

5233 — 4) Resolver pelo método das matrizes o sistema

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=-3x_1+5x_2\\[2mm]\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=-2x_1+3x_2\end{cases}$$

com as condições iniciais $x_1(1)=0\,,\ x_1'(1)=1$ $x_2(1)=0\,,\ x_2'(1)=0$.

5234 — 5) *a*) Determine as funções próprias do operador D^2 que verificam as condições nos limites $y(0)=0\,,y(\pi)=0$.

b) Utilize o resultado anterior para determinar as componentes harmónicas da solução da equação $D^2y=x$ sujeita aquelas mesmas condições.

5235 — 6) Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x}}{1+x^2}\,dx$$

5236 — 7) Calcular pelo método dos resíduos o integral

$$\int_\Gamma z^2 e^{\frac{1}{z}}\,dz$$

sendo Γ uma circunferência com centro na origem, orientada no sentido positivo.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — MECÂNICA RACIONAL — **1.º exame de frequência — 1959-1960.**

5237 — 1 — *a*) Componentes tangencial e centrípeta da aceleração dum ponto em movimento.

b) Prove que o raio de curvatura da trajectória do ponto na posição que ele ocupa num certo instante é

$$\rho=\frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ são, respectivamente, a velocidade e a aceleração do ponto no referido instante. Por meio desta expressão, obtenha a expressão do raio de curvatura da linha plana $y = f(x)$ num seu ponto genérico.

2 — a) Ângulos de EULER. Estabeleça a relação que existe entre os ângulos de EULER e os cossenos directores dos eixos dos dois triedros de referência.

b) Sejam dois triedros S_1 e S_2; estabeleça as relações que existem entre os ângulos de EULER que definem a posição de S_2 em relação a S_1 e os ângulos de EULER que definem a posição de S_1 em relação a S_2, e comprove com as relações obtidas na alínea a) as relações agora obtidas.

3 — a) As coordenadas vectoriais dum sistema de vectores localizados sobre rectas em relação ao ponto $A(0,1,1)$ são

$$\mathbf{R} = 3\,\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 .$$

Determine um sistema equivalente ao sistema dado, formado por três vectores

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ aplicado em A

$\mathbf{v}_2$ pertencente ao plano $B = O + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mu\,\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_3$ pertencente ao plano $C = O + m\,\mathbf{e}_1 + n\,\mathbf{e}_3$.

Mostre que nem todo o sistema de vectores é equivalente ao sistema dos três vectores nas condições referidas.

b) É dado um sistema de vectores, S, uma recta r e dois pontos A e B. Mostre que se S é equivalente a três vectores $(r, \mathbf{v}_1)$, $(A, \mathbf{v}_2)$, $(B, \mathbf{v}_3)$, então $\mathbf{v}_1$ é determinado, assim como os planos de $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

4) Um ponto P move-se de modo tal que as componentes da sua velocidade são

$$\begin{cases} v_x = -2\,\omega \operatorname{sen} \omega t \\ v_y = 4\,\omega \operatorname{sen} 2\,\omega t \\ v_z = 0 . \end{cases}$$

com ω constante. No instante $t = 0$ o ponto encontrava-se em $P_0(0, 2, 2)$.

a) Determine as equações finitas do movimento de P e a sua trajectória.

b) Mostre que o movimento é periódico e determine o tempo que o ponto leva a percorrer a trajectória uma vez.

c) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração do ponto no instante $t = \dfrac{\pi}{2\,\omega}$.

F. C. L. — MECÂNICA RACIONAL — 2.º Exame de frequência — 1959-1960.

5238 — 1) a) Eixos principais de inércia dum sistema material S em relação a um ponto. Critério que permite reconhecer se uma recta que passa por um ponto A é eixo principal de inércia de S em relação a A. Mostre que se um eixo principal de inércia é eixo principal central de inércia, então é eixo principal de inércia em relação a qualquer dos seus pontos.

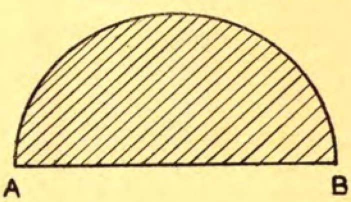
b) O elipsoide central de inércia de um dado sistema material é uma esfera. Servindo-se da relação que existe entre os momentos de inércia dum sistema material em relação a rectas paralelas, diga que forma particular tem o elipsoide de inércia do mesmo sistema em relação a um outro ponto A.

Sendo I o momento de inércia do sistema referido em relação ao seu centro de massa G e d a distância de G a A diga quais os valores dos seus momentos principais de inércia em relação a A.

5239 — 2) a) Sistemas articulados. Suas equações de equilíbrio. Deverão ou não estas equações implicar que o sistema de forças exteriores é equivalente a zero. Justifique a resposta.

b) Considere um sistema articulado formado por cinco lados, quatro dos quais constituem um quadrilátero e o quinto uma das diagonais desse quadrilátero. Classifique este sistema dentro dos tipos que estudámos. Escreva as suas equações de equilíbrio e deduza delas, directamente, que o sistema das quatro forças exteriores aplicadas nos nodos é equivalente a zero.

5240 — 3) a) Um semi-círculo material (raio R) tem em cada ponto uma densidade numéricamente igual à distância do ponto à base AB.



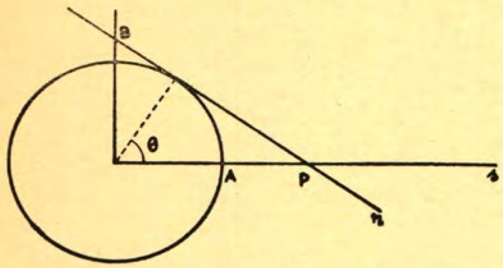
Determinar a posição do seu centro de massa Determinar o seu raio de giração em relação à mediatriz da base.

b) Suponha que o semi-círculo está fixo pelo ponto A, é pesado e que o ponto B é atraído para um ponto fixo C, no plano horizontal de A, por uma força de módulo proporcional à distância BC. Se o sistema se move apenas no plano vertical de AC, quais as suas posições de equilíbrio?

Faça dist. $AC = a$.

c) Mostre que se no caso da alínea anterior o semi-círculo puder ter qualquer movimento em torno do ponto A, as suas posições de equilíbrio continuam a ser as mesmas.

5241 — 4) Uma recta r move-se num plano do modo seguinte



1.º) — Um dos seus pontos P percorre uma recta fixa, s, desse plano com movimento uniformemente acelerado (aceleração **a**)

2.º) — Mantem-se constantemente tangente a uma circunferência fixa de raio R e cujo centro pertence à recta onde se move P.

3.º) — Inicialmente P encontrava-se em A com velocidade nula.

a) Determinar as trajectórias polares do movimento de r.

b) Considere o ponto B que em cada instante é a intersecção de r com a perpendicular a s tirada pelo centro da circunferência. Figure para um instante genérico a direcção e o sentido dos vectores velocidade relativa, velocidade de transporte e velocidade absoluta de B, e determine os módulos desses vectores no instante em que o ângulo θ figurado é igual a $\pi/4$ radianos.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. C. — Cálculo das Probabilidades — 1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 8-3-1960.

I — Parte Prática

5242 — 1) Dum baralho de 40 cartas tiram-se à sorte sucessivamente e sem reposição 5 cartas. Calcule a probabilidade de saída de:

a) Um só ás;

b) Um ás pelo menos;

c) Três cartas de um mesmo naipe e duas de outro;

d) Uma copa na última tiragem, sabendo que nas anteriores só saiu uma.

Justifique sumàriamente.

5243 — 2) Duma urna com 10 esferas, sendo 6 brancas e 4 pretas, tiram-se à sorte, simultâneamente, 2 esferas que saiem da mesma cor.

Qual a probabilidade de, em nova tiragem de 2 esferas, de entre 8 restantes voltar a sair esfera da mesma cor das duas primeiras.

5244 — 3) Sobre os catetos dum triângulo rectângulo $[OAB]$ lança-se à sorte 2 pontos M e N, um em cada cateto. A recta aleatória MN divide o triângulo em duas regiões: um triângulo rectângulo e um quadrilátero. Calcule a probabilidade de, em novo lançamento de um ponto Q, este caír no quadrilátero.

II — Parte Teórica

5245 — 1) Enuncie e demontre o teorema da possibilidade composta para uma classe dupla, em Probabilidade Descontínua.

5246 — 2) Enuncie a lei binominal no problema das provas repetidas. Generalize o enunciado.

5247 — 3) Em Probabilidade Contínua defina probabilidade no caso de lançamentos em regiões ilimitadas. Enuncie um teorema relativo a esse caso e faça a aplicação a um exemplo.

Enunciados do Dr. Neto Murta

MECÂNICA CELESTE

F. C. L. — Mecanica Celeste — 1.º exame de frequência — 1959-1960.

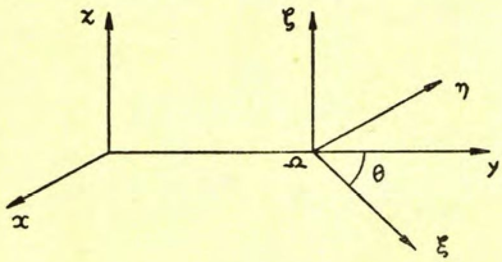
Responda apenas a três questões.

5248 — 1) *a*) Potencial newtoniano dum sistema material contínuo num ponto exterior ao sistema.

b) Calcular a força do campo newtoniano devido a um contorno rectangular homogéneo de lados $2a$ e $2b$ num ponto genérico da perpendicular ao plano do contorno passando pelo seu centro.

5249 — 2) *a*) Equações diferenciais, em coordenadas cartesianas, do movimento absoluto de n pontos materiais atraindo-se segundo a lei de Newton. Seus integrais primários.

b) Designe por $S(0; X, Y, Z)$ o referencial de inércia que usou na alínea anterior e seja $S_1(\Omega; \xi, \eta, \zeta)$ um novo referencial nas condições figuradas



$$\omega\zeta \,//\, OZ$$
$$\theta = \text{constante}$$

movendo-se o ponto Ω sobre $0Y$ com velocidade constante.

Considere o movimento dos n pontos em relação ao referencial S_1 e compare a energia total do sistema neste caso, com a energia total obtida no caso da alínea *a*).

5250 — 3) No problema dos dois corpos:

a) Considere o movimento do sistema dos dois pontos em relação a um referencial de inércia com origem no centro de massa e mostre que cada um dos pontos descreve uma cónica de que o centro de massa é um foco.

b) Caso da órbita elíptica no movimento dum dos pontos em relação ao outro.

5251 — 4) *a*) Elementos intermediários no método de Laplace para o cálculo de órbitas. Dê uma ideia geral do modo de obter tais elementos a partir de três observações.

b) Suponha conhecidos os elementos intermediários a que se refere a alínea anterior e indique como se obtém, a partir deles, o semi-eíxo maior e a excentricidade da órbita.

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo Numérico Mecânico e Gráfico — Exame de frequência — 1959-1960.

Responda apenas a uma questão de cada grupo.

I

5252 — 1) As raízes da equação $x^2-18x+1=0$ são

$$x_1 = 9 + \sqrt{80}$$
$$x_2 = 9 - \sqrt{80}$$

Calcule os valores dessas raízes usando o valor de $\sqrt{80}$ com cinco algarismos significativos.

Quantos algarismos significativos tem cada um dos valores obtidos?

Mostre que, calculado x_1, é preferível obter x_2 a partir da relação $x_1 x_2 = 1$.

5253 — 2) Mediram-se dois lados dum triângulo e o ângulo por eles definido obtendo-se

$$c = 5{,}36\,(2)\ \text{cm}$$
$$b = 8{,}32\,(2)\ \text{cm}$$
$$\alpha = 45\,(0{,}25)^\circ$$

Determinar o erro relativo da área do triângulo quando calculada a partir dos elementos medidos.

II

5254 — 1) A grandeza $R = \dfrac{x}{x+y}$ pode obter-se medindo x e $x+y$ ou medindo x e y.

Os valores de x e $x+y$ podem obter-se com erro relativo inferior a $1°/_o$; y pode medir-se com erro relativo inferior a $20°/_o$. Sabendo que R tem um valor da ordem de $0,95$, quais as medidas que se devem fazer para obter o melhor resultado?

5255 — 2) Por aplicação da teoria dos operadores das diferenças finitas mostre que

$$a) \quad \nabla^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f_{i-k}$$

$$b) \quad f(x-n\,h) = f(x) - n\,\nabla f(x) + \frac{n\,(n-1)}{2!} \nabla^2 f(x) + \cdots + (-1)^n \nabla^n f(x).$$

III

5256 — 1) $f(x)$ é um polinómio de grau par. Na seguinte tabela de valores exactos há um engano

x	$f(x)$
0	10000
1	9998
2	9968
3	9844
4	9488
5	8750
6	7408
7	5198
8	1808

Corrigir esse engano e continuar a tabela ate $x = 12$

5257 — 2) A partir da relação

$$x = y^3 - 2\,y - 5$$

construiu-se a tabela

x	$y = f(x)$
− 1,941	1,9
− 1,000	2,0
+ 0,061	2,1
+ 1,248	2,2
+ 2,567	2,3

Construa uma tabela de diferenças divididas correspondentes aos valores tabulados da função y e a partir dela determine um valor aproximado da raíz do polinómio $y^3 - 2\,y - 5$ que está entre 2,0 e 2,1

IV

5258 — 1) Construir um ábaco de pontos alinhados de suportes rectilíneos em N, para representar a relação

$$X = \frac{d^2\,n}{2,5}$$

$$X = 0\,(10)\,120$$

$$d = 0\,(1)\,5\,.$$

5259 — 2) Construir um ábaco de pontos alinhados de suportes rectas concorrentes para representar a relação

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{w}$$

$$u = 0\,(1)\,10$$

$$v = 0\,(1)\,20$$

Os suportes das escalas de u e v devem ser perpendiculares e a razão dos comprimentos das escalas deve ser igual a $3/4$.

F. C. L. — Cálculo Numérico, Mecanico e Gráfico — **Exame final — Prova prática — (Junho 1960).**

5260 — 1) Calcular

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)\,(2-x)}\,d\,x$$

pela regra de Simpson, fazendo $h = 0,05$.

5261 — 2) Resolver, pelo método de relaxação, o sistema

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 = 80 \\ 3\,x_1 - 10\,x_2 - x_3 = 50 \\ -x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 = 40 \end{cases}$$

obtendo o resultado com erro inferior a 0,005.

5262 — 3) Calcular, por fraccionamento, a inversa da matrix,

$$\begin{bmatrix} 0,59 & -0,25 & -0,18 \\ -0,25 & 0,70 & -0,23 \\ -0,18 & -0,23 & 0,56 \end{bmatrix}$$

5263 — 4) Um computador electrónico universal tem um código de direcção simples que inclui as ordens seguintes (Ac — acumulador, M — registo do multiplicador, $C\,(A\,c)$ — conteúdo de $A\,c$, $C\,(M)$ — conteúdo de M, $C\,(n)$ — conteúdo do compartimento n da memória)

An — Adicione $C(n)$ a $C(Ac)$ colocando o resultado em Ac.

Sn — Subtraia $C(n)$ de $C(Ac)$ colocando o resultado em Ac.

Tn — Transfira $C(Ac)$ para o compartimento n da memória (deixando limpo o acumulador).

Un — Copie $C(Ac)$ no compartimento n da memória.

Hn — Substitua $C(M)$ por $C(n)$.

Vn — Multiplique $C(n)$ por $C(M)$ e some o resultado a $C(Ac)$.

Gn — Se $C(Ac) < 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

En — Se $C(Ac) \geqslant 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

Fn — Tome $C(n)$ como a próxima ordem a ser executada.

Escreva programas para resolver os seguintes problemas:

a) Calcular $ab + cd + ef$ onde a, b, c, d, e, f estão, respectivamente, nos compartimentos 20, 21, 22, 23, 24 e 25 da memória.

b) Se $C(4)$ e $C(6)$ têm o mesmo sinal, colocar o produto $C(4) \times C(6)$ no comportamento 1; se têm sinais contrários colocar $|C(4) - C(6)|$ nesse mesmo compartimento.

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — 1.ª prova parcial — Junho de 1960.

5264 — 1) Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}}+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}}\right).$$

R.: *Como*

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}} > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}} > \cdots > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}},$$

a soma encerrada entre parêntesis está constantemente compreendida entre $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}$ *e* $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

$$Mas\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 1 \Big/ \left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right) = 1,$$

e anàlogamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = 1,$$

sendo, por consequência igual a 1 *o limite pedido.*

5265 — 2) Seja a um número real maior que 1 e considere a sucessão

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

em que

$$a_1 < a \text{ e } a_{n+1} = \frac{1}{a}\cdot a_n + a - 1.$$

Mostre que a sucessão é convergente e determine o seu limite quando $n \to \infty$.

R.: *Tem-se, por hipótese,* $a_1 < a$ *e, supondo* $a_n < a$, *resulta* $a_{n+1} < \dfrac{1}{a}\cdot a + a - 1 = a$. *Conclui-se, por indução, que a sucessão é superiormente limitada.*

É imediato também $a_{n+1} > a_n$, *pois esta desigualdade é equivalente a* $a_n < a$.

Trata-se, portanto, de uma sucessão crescente e superiormente limitada, logo convergente.

Designando por L *o seu limite, tem-se*

$$L = \frac{1}{a}\cdot L + a - 1,$$

donde $L = a$.

5266 — 3) Seja A o conjunto de todos os números racionais x tais que $x^3 + 2x < 1$. Mostre que:

a) A define um corte no conjunto dos números racionais;

b) se y é um número racional tal que $y^3 + 2y > 1$, então existe pelo menos um número racional $z < y$, tal que $z^3 + 2z > 1$;

c) o supremo do conjunto A é um número irracional.