An — Adicione $C(n)$ a $C(Ac)$ colocando o resultado em Ac.

Sn — Subtraia $C(n)$ de $C(Ac)$ colocando o resultado em Ac.

Tn — Transfira $C(Ac)$ para o compartimento n da memória (deixando limpo o acumulador).

Un — Copie $C(Ac)$ no compartimento n da memória.

Hn — Substitua $C(M)$ por $C(n)$.

Vn — Multiplique $C(n)$ por $C(M)$ e some o resultado a $C(Ac)$.

Gn — Se $C(Ac) < 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

En — Se $C(Ac) \geqslant 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

Fn — Tome $C(n)$ como a próxima ordem a ser executada.

Escreva programas para resolver os seguintes problemas:

a) Calcular $ab + cd + ef$ onde a, b, c, d, e, f estão, respectivamente, nos compartimentos 20, 21, 22, 23, 24 e 25 da memória.

b) Se $C(4)$ e $C(6)$ têm o mesmo sinal, colocar o produto $C(4) \times C(6)$ no comportamento 1; se têm sinais contrários colocar $|C(4) - C(6)|$ nesse mesmo compartimento.

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — **1.ª prova parcial — Junho de 1960.**

5264 — 1) Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}}+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}}\right).$$

R.: *Como*

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}} > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}} > \cdots > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}},$$

a soma encerrada entre parêntesis está constantemente compreendida entre $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}$ *e* $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

$$Mas \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 1\Big/\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right) = 1,$$

e anàlogamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = 1,$$

sendo, por consequência igual a 1 *o limite pedido.*

5265 — 2) Seja a um número real maior que 1 e considere a sucessão

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

em que

$$a_1 < a \quad e \quad a_{n+1} = \frac{1}{a}\cdot a_n + a - 1.$$

Mostre que a sucessão é convergente e determine o seu limite quando $n \to \infty$.

R.: *Tem-se, por hipótese,* $a_1 < a$ *e, supondo* $a_n < a$, *resulta* $a_{n+1} < \dfrac{1}{a}\cdot a + a - 1 = a$. *Conclui-se, por indução, que a sucessão é superiormente limitada.*

É imediato também $a_{n+1} > a_n$, *pois esta desigualdade é equivalente a* $a_n < a$.

Trata-se, portanto, de uma sucessão crescente e superiormente limitada, logo convergente.

Designando por L *o seu limite, tem-se*

$$L = \frac{1}{a}\cdot L + a - 1,$$

donde $L = a$.

5266 — 3) Seja A o conjunto de todos os números racionais x tais que $x^3 + 2x < 1$. Mostre que:

a) A define um corte no conjunto dos números racionais;

b) se y é um número racional tal que $y^3 + 2y > 1$, então existe pelo menos um número racional $z < y$, tal que $z^3 + 2z > 1$;

c) o supremo do conjunto A é um número irracional.

R.: a) *O conjunto* A *define um corte porque:*

α) A é não vazio, *visto conter pelo menos o racional zero;*

β) A não contém todos os racionais; *por exemplo, não contém o racional* 1;

γ) Se $r \in A$ e r' é um racional menor que r, então $r' \in A$. *De facto,* $r' < r$ *implica* $r'^3 + 2r' < r^3 + 2r$ *e, portanto,* $r' \in A$;

δ) Se $r \in A$, existe pelo menos um racional $r' > r$, tal que $r' \in A$. *Na verdade, se* $r^3 + 2r < 1$, *ponhamos* $\varepsilon = 1 - r^3 - 2r$. *(Podemos supor, sem perda de generalidade,* $0 < r < 1$ *e, portanto,* $0 < \varepsilon < 1$*).*

É fácil ver que o racional $r' = r + \varepsilon/10$ *é um elemento de* A.

b) *Podemos supor, sem perda de generalidade,* $0 < y < 1$, *porque, se* $y \geq 1$, *basta pôr* $z = 1/2$.

Seja então $0 < y < 1$ *e ponhamos* $\varepsilon = y^3 + 2y - 1$.

É fácil concluir que $z = y - \frac{\varepsilon}{10}$ *satisfaz às condições desejadas.*

c) *Dos resultados anteriores conclui-se que o supremo* s *do conjunto* A *não pode ser tal que*

$$s^3 + 2s < 1 \quad nem \quad s^3 + 2s > 1$$

donde resulta, pela tricotomia da relação de ordem, que

$$s^3 + 2s = 1$$

Supondo que $s = \frac{m}{n}$, *com* m *e* n *inteiros primos entre si, vinha*

$$m^3 + 2mn^2 = n^3$$

donde se concluía que n *é divisor de* m^3 *e, portanto, seria* $n = \pm 1$. *Ora isto é absurdo, em virtude de ser* $0 < s < 1$. *Logo* s *é um número irracional.*

Enunciados e soluções dos n.os 5264 a 5266 de José Morgado

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Complementos de Geometria — 1.ª prova parcial — Junho de 1960.

5267 — 1) É dada a curva de equação vectorial

$$\vec{r}(u) = a \cdot \operatorname{sen} u \cos u \cdot \vec{i} + b \cdot \operatorname{sen}^2 u \cdot \vec{j} + c \cdot \cos^2 u \cdot \vec{k}$$

onde u é um parâmetro real e a, b, c são constantes reais não nulas.

a) Mostre que a curva dada é plana quaisquer que sejam a, b, c, e determine a equação cartesiana do plano da curva.

b) Determine a condição a que devem satisfazer a, b e c para que $\frac{dl}{du}$ seja constante (l é a abcissa curvilínea de um ponto genérico da curva).

c) Supondo que a, b e c satisfazem à condição encontrada na alínea anterior, determine a curvatura da curva dada.

R.: a) *A curva dada é plana, se se tiver*

$$(1) \qquad \frac{d\vec{r}}{du} \,\Big|\, \frac{d^2\vec{r}}{du^2} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{du^3} = 0$$

qualquer que seja u.

Ora verifica-se que $\frac{d\vec{r}}{du}$ *e* $\frac{d^3\vec{r}}{du^3}$ *são vectores colineares e, portanto, a igualdade* (1) *é válida para todo* u, *e daqui resulta que a curva dada é plana.*

O plano da curva é o plano osculador

$$\overrightarrow{R - r(u)} \,\Big|\, \frac{d\vec{r}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{du^2} = 0$$

ou seja $cy + bz = bc$.

b) *O cálculo de* $\frac{dl}{du}$ *conduz a*

$$\frac{dl}{du} = \sqrt{a^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{sen}^2 2u}$$

e, portanto, a condição pedida é $a^2 = b^2 + c^2$.

c) *Curvatura* $= 2/|a|$.

5268 — 2) Seja C uma curva torsa de classe suficientemente elevada, tal que em todos os seus pontos se tenha

$$\vec{n} \,\Big|\, \frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = 0$$

Mostre que:

a) O módulo do vector $\frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2}$ é igual a $\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{3/2}$;

b) $\rho = c\tau$, onde c é uma constante real;

c) O vector $c \cdot \vec{t} + \vec{b}$ é constante.

[$\vec{t}$, $\vec{n}$ e $\vec{b}$ são, respectivamente, os versores da tangente, da normal principal e da binormal à curva no ponto genérico de abcissa curvilínea l; ρ e τ são, respectivamente o raio de curvatura e o raio de torsão no ponto l].

R.: a) *Como*

$$\frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\vec{t} +$$
$$+\left(\frac{\rho^1}{\tau\rho^2}-\frac{\tau^1}{\rho\tau^2}\right)\vec{n}+\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\vec{b},$$

a condição $\vec{n} \,\Big|\, \frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = 0$ *equivale a* $\frac{\rho'}{\tau\rho^2} - \frac{\tau'}{\rho\tau^2} = 0$ *e, portanto*

$$\left|\frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2}\right| = \left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)^2 +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{3/2}.$$

b) *De* $\frac{\rho'}{\tau\rho^2} - \frac{\tau'}{\rho\tau^2} = 0$, *resulta* $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\tau}{\tau}$, *isto é*, $\rho = c\cdot\tau$, *onde* c *é constante real.*

c) *Como* $\frac{d}{dl}(c\cdot\vec{t}+\vec{b}) = c\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vec{n} - \frac{1}{\tau}\vec{n} = \vec{0}$, *conclui-se que* $c\vec{t}+\vec{b}$ *é um vector constante.*

Enunciados e soluções dos n.os 5267 e 5268 de José Morgado

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — Concurso de Habilitação de 1960 — 16/2/1960

Prova Escrita de Matemática

I

1.ª Parte — Questionário

5269 — 1) Dada a expressão:

$x = \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{b\,c^3}$, exprimir $\log x$ em função de $\log a$, $\log b$ e $\log c$.

2) Dentre os problemas resolúveis pela aplicação das formulas do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética, quais os que conduzem a equações de gráu superior ao primeiro?

3) A que é igual a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton $(x+a)^m$? Justifique.

4) O sistema abaixo:

$$5x+3y=5$$
$$2x+7y=43.$$

é de Cramer? Porquê?

5) Quando se diz que uma sucessão (a_n) tem por limite L?

6) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

$$x^2+y^2-2y-4x-4=0$$
$$x^3+y^2=15$$
$$x^2+xy=2y^2-16. \qquad \text{Porquê?}$$

7) Dentre as retas

$$3x+2y+16=0$$
$$3x-2y+5=0$$
$$3x+3y+7=0$$

qual é perpendicular à reta $2x+3y+7=0$? Justifique.

8) Quais os números inteiros que podem ser raízes da equação $2x^3+x^2-18x-9=0$? Porquê?

9) É a equação $x^4-2x^3+6x^2+2x-1=0$ recíproca? Porquê?

10) Qual o módulo do complexo conjugado de $-4+3i$?

2.ª Parte — Demonstrações

a) Estabelecer a expressão da distância de um ponto a uma reta.

b) Estabelecer a expressão do desenvolvimento do binômio de Newton.

3.ª Parte — Problemas

5270 — 1) As retas $x=3$, $3x-2y+6=0$ e $x+2y+2=0$ formam um triângulo. Determinar as coordenadas do centro e o raio da circunferência circunscrita ao mesmo.

5271 — 2) Dado $R(x) = \frac{3x+2}{P(x)}$ com $P(x) = x^3-5x^2+8x-4$,

a) Decompor $P(x)$ no produto de factores binômios

b) Decompor $R(x)$ na soma de frações simples.

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — Concurso de Habilitação de 1960 — 17/2/1960

Prova escrita de Matemática

II

Ponto sorteado n.º 1

Questionário

(Pêso 2)

5272 — 1) Definir ângulo duma reta e dum plano.

2) Quantas e quais são as posições relativas que podem ocupar três planos no espaço?

3) Complete: «Em qualquer triedro, a soma dos ângulos diedros está compreendida entre... ?

4) Quantos e quais são os poliedros regulares convexos?

5) Qual o enunciado do teorema no qual se baseia a dedução da fórmula que permite determinar a área da superfície de uma esfera?

6) Complete: «Uma cunha esférica está para a esfera inteira assim como o ângulo dessa cunha está para...»

7) Definir a elipse como lugar geométrico.

8) Dar a expressão geral dos arcos que verificam a condição:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9) Indique os períodos e os pontos de descontinuidade das funções $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$.

10) Das igualdades seguintes indique as que são impossíveis:

$$\cos x = \frac{1}{2}, \ \sec 2x = \frac{1}{4}, \ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \operatorname{tg} x = 3,$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 + \operatorname{tg} 2x = 1.$$ Justifique.

Demonstrações
(Pêso 4)

5273 — 1) Demonstrar que a soma das faces de qualquer ângulo sólido convexo é menor do que quatro ângulos retos.

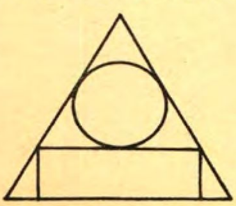
2) Se a, b, c, A, B, C, são os elementos de um triângulo qualquer:
demonstrar que:

$$I) \quad \frac{\operatorname{sen} A}{\mathrm{a}} = \frac{\operatorname{sen} B}{\mathrm{b}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\mathrm{c}}$$

$$II) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Problemas
(Pêso 4)

5274 — 1) Em um cone de revolução de altura h e raio da base a, dados, inscreve-se um cilindro. Determina-se, assim, um cone parcial com base na parte superior do cilindro inscrito e no qual inscreve-se uma esfera. Determinar qual deverá ser a altura x do cilindro para que a área da sua superfície lateral seja igual à área da esfera inscrita no cone parcial



2) Calcular a soma dos quadrados dos lados de um triângulo de área $S = 24\,m^2$ conhecendo dois de seus ângulos, a saber:

$$A = \frac{\pi}{3} rd \quad \text{e} \quad B = \frac{\pi}{4} rd.$$

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — 2.º Concurso de Habilitação de 1960 7 de Março de 1960

Prova Escrita de Matemática

I

Ponto sorteado: 1.º

1.ª Parte — Questionário
(Pêso 2)

5275 — Representando por C_m^n o número de combinações de m elementos tomados n a n, qual a diferença entre a soma das combinações correspondentes a n par e a soma das combinações correspondentes a n ímpar $(1 \leq n \leq m)$? Justifique utilizando o desenvolvimento do binômio de Newton.

2) Como se utiliza uma tábua de logarítmos decimais para calcular os logarítmos neperianos?

3) A função $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - 1)^2 (x + 3)^3}$ é contínua para todos os valores de x? Justifique.

4) Dizer se as retas: $x + y - 5 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ e $2x - 3y = 0$ concorrem em um ponto. Justifique.

2.ª Parte — Demonstrações
(Pêso 4)

5276 — 1) Estabelecer as condições para que uma equação algébrica das variáveis x, y represente em coordenadas retangulares uma circunferência; calcular as coordenadas do centro e o raio.

2) Enunciar a propriedade que permite escrever a identidade

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

Utilizando esta identidade, demonstrar que $3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$ é divísivel por $a + b + c$.

3.ª Parte — Problemas
(Pêso 4)

5277 — 1) Determinar a equação de uma reta que passe pelo centro da circunferência

$x^2 + y^2 - 3x + 6y + 7 = 0$ e faça um ângulo de 45° com a tangente a esta circunferência no pt $(2, -1)$.

2) Achar as condições necessárias e suficientes que devem relacionar a, b, c, d para a equação

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

admita duas raízes duplas α e β.

Para $c = 2, d = 1$, determinar a e b e resolver a equação.

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — 2.° Concurso de Habilitação de 1960 – 8/3/60.

Prova Escrita de Matemática

II

Ponto sorteado n.° 10

1.ª Parte — Questionário

(Pêso 2)

5278 — 1) Escrever a expressão da área do fuso esférico de n gráus.

2) Qual a relação que liga o número de arestas o número de faces e o número de vértices de um poliedro convexo?

3) Dê a expressão geral dos arcos x tais que $tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) Porque basta ter as tábuas trigonométricas com os logarítmos das funções até 45°?

2.ª Parte — Demonstrações

(Pêso 4)

5279 — 1) Demonstrar que, em tôda parábola, a sub-normal é constante e igual ao parâmetro.

2) Deduzir as fórmulas que exprimem $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ e $\cos\frac{a}{2}$ em função de $\cos a$ e em função de $\operatorname{sen} a$ e discutir os sinais destas fórmulas.

3.ª Parte — Problemas

(Pêso 4)

5280 — 1) São dados um semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e um ponto M sôbre sua semi-circunferencia. Dêsse ponto baixa-se a perpendicular MC sôbre AB e traça-se MA e MB. Supõe-se, em seguida, que a figura assim obtida gira em tôrno do eixo determinado pelo diâmetro AB. Determinar qual deverá ser a posição do ponto M para que o volume gerado pelo segmento circular de corda MB seja equivalente ao volume do cone de revolução gerado pelo triângulo MAC.

2) Resolver a equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = \cos 2x + \cos x + 1$$

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1959.

Ponto N.° 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5281 — Determinar o menor inteiro superior a 1000 que dividido por 9 dá resto 2 e dividido por 16 dá resto 11.

R: *Notando que $11 = 9 + 2$, logo se vê que ao adicionar 11 a um múltiplo comum de 9 e 16 se obtém um número que dividido por 9 dá resto 2 e por 16 dá resto 11.*

É m. m. c. $(9, 16) = 144$; o múltiplo comum imediatamente superior a 1000 é $7 \times 144 = 1008$; o número pedido é, portanto, $1008 + 11 = 1019$.

ÁLGEBRA

5282 — Determinar m de modo que a equação

$$2x^2 - (m+1)x + m + 7 = 0$$

tenha uma raíz dupla.