$x^2 + y^2 - 3x + 6y + 7 = 0$ e faça um ângulo de 45° com a tangente a esta circunferência no pt $(2, -1)$.

2) Achar as condições necessárias e suficientes que devem relacionar a, b, c, d para a equação

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

admita duas raízes duplas α e β.

Para $c = 2, d = 1$, determinar a e b e resolver a equação.

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — 2.° Concurso de Habilitação de 1960 — 8/3/60.

Prova Escrita de Matemática

II

Ponto sorteado n.° 10

1.ª Parte — Questionário

(Pêso 2)

5278 — 1) Escrever a expressão da área do fuso esférico de n gráus.

2) Qual a relação que liga o número de arestas o número de faces e o número de vértices de um poliedro convexo?

3) Dê a expressão geral dos arcos x tais que $tg\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4) Porque basta ter as tábuas trigonométricas com os logarítmos das funções até 45°?

2.ª Parte — Demonstrações

(Pêso 4)

5279 — 1) Demonstrar que, em tôda parábola, a sub-normal é constante e igual ao parâmetro.

2) Deduzir as fórmulas que exprimem $\operatorname{sen} \dfrac{a}{2}$ e $\cos \dfrac{a}{2}$ em função de $\cos a$ e em função de $\operatorname{sen} a$ e discutir os sinais destas fórmulas.

3.ª Parte — Problemas

(Pêso 4)

5280 — 1) São dados um semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e um ponto M sôbre sua semi-circunferencia. Dêsse ponto baixa-se a perpendicular MC sôbre AB e traça-se MA e MB. Supõe-se, em seguida, que a figura assim obtida gira em tôrno do eixo determinado pelo diâmetro AB. Determinar qual deverá ser a posição do ponto M para que o volume gerado pelo segmento circular de corda MB seja equivalente ao volume do cone de revolução gerado pelo triângulo MAC.

2) Resolver a equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = \cos 2x + \cos x + 1$$

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1959.

Ponto N.° 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5281 — Determinar o menor inteiro superior a 1000 que dividido por 9 dá resto 2 e dividido por 16 dá resto 11.

R: *Notando que $11 = 9 + 2$, logo se vê que ao adicionar 11 a um múltiplo comum de 9 e 16 se obtém um número que dividido por 9 dá resto 2 e por 16 dá resto 11.*

É m. m. c. $(9, 16) = 144$; o múltiplo comum imediatamente superior a 1000 é $7 \times 144 = 1008$; o número pedido é, portanto, $1008 + 11 = 1019$.

ÁLGEBRA

5282 — Determinar m de modo que a equação

$$2x^2 - (m+1)x + m + 7 = 0$$

tenha uma raíz dupla.

R:

$$\Delta = (m+1)^2 - 8(m+7) = 0$$
$$m^2 + 2m + 1 - 8m - 56 = 0$$
$$m^2 - 6m - 55 = 0$$
$$m = 3 \pm \sqrt{9+55} = 3 \pm 8 < \begin{matrix} m = 11 \\ m = -5 \end{matrix}$$

5283 — Derivar a função $y = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ e simplificar o resultado.

R:

$$y' = \frac{(1+x^2)^{3/2} - x \cdot {}^3/_2 \cdot (1+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(1+x)^3} =$$
$$= \frac{(1+x^2)^{3/2} - 3x^2(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^3} =$$
$$= \frac{1+x^2-3x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

TRIGONOMETRIA

5284 — Calcular $\dfrac{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$, sendo α o ângulo do 2.º quadrante cujo seno é $\dfrac{8}{17}$.

R: *Será* $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2} = -$

$$-\sqrt{1-\frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17} \therefore$$

$$\therefore \frac{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{-\dfrac{17}{15} - \dfrac{17}{8}}{-\dfrac{8}{15} - \dfrac{15}{8}} = \frac{8 \times 17 + 15 \times 17}{8 \times 8 + 15 \times 15} =$$

$$= \frac{17(8+15)}{64+225} = \frac{17 \times 23}{17^2} = \frac{23}{17}.$$

5285 — Resolver a equação $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$.

R:

$$tg\, 2x = 3\, tg\, x$$
$$tg\, 2x = \frac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x}$$

$\dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} = tg\, x$. *Esta equação verifica-se imediatamente para* $tg\, x = 0$; *além disso, sendo* $tg\, x \neq 0$, *obtém-se dela esta outra* $\dfrac{2}{1 - tg^2 x} = 3$, *donde logo se tira* $tg\, x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. *As raízes são, portanto,* $x = arctg\, 0$ *ou* $x = arctg\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$, *arcos de expressão geral fácil de encontrar.*

GEOMETRIA

5286 — Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos $(2, -5)$ e $(-4, 3)$.

R: *As distâncias de um ponto genérico,* (x, y) *aos pontos dados, são, respectivamente, iguais a* $\sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$ *e* $\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$. *Igualando estas distâncias, fàcilmente se obtém da relação* $\sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$ *a equação do lugar pedido, que é* $4y - 3x + 1 = 0$.

Ponto N.º 2

ARITMÉTICA

5287 — Determinar todos os números naturais que divididos por 29 dão resto igual ao quadrado do cociente respectivo.

R: *Serão os números da forma* $N = 29x + r$, *em que* $r < 29$ *e* $r = x^2$. r *tomará portanto, os valores* 1, 4, 9, 16 *ou* 25, *correspondentes, respectivamente, aos quocientes* 1, 2, 3, 4 *e* 5. $29 + 1 = 30$; $29 \times 2 + 4 = 62$; $29 \times 3 + 9 = 96$; $29 \times 4 + 16 = 132$ *e* $29 \times 5 + 25 = 170$.

ALGEBRA

5288 — Determinar os valores de m para os quais a equação

$$x^2 + 4x - 3 = m(x + 12 - m)$$

tem raízes reais e desiguais.

R: *O descriminante da equação é* $\Delta = -3m^2 + 40m + 28$; *os seus zeros são* $m = 14$ *e* $m = -{}^2/_3$. *A equação tem raízes reais e desiguais quando fôr* $\Delta > 0$, *ou seja* $14 > m > -{}^2/_3$.

5289 — Derivar a função $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ e simplificar o resultado.

R:

$$y' = \frac{(1+x^3)^{1/2} - {}^3/_2\, x^3 (1+x^3)^{-1/2}}{1+x^3} =$$
$$= \frac{1 + x^3 - {}^3/_2\, x^3}{(1+x^3)(1+x^3)^{1/2}} = \frac{2 - x^3}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}.$$

TRIGONOMETRIA

5290 — Sem usar tábuas, resolver o triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 10 metros e um dos catetos 5 metros. (Usar $\sqrt{3} = 1{,}732$).

R: *O seno do ângulo oposto ao cateto dado é igual a* $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. *Esse ângulo mede, portanto, 30°. O segundo ângulo agudo do triângulo mede 60°. O segundo cateto mede* $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}\,\text{m} = 5 \times 1{,}732\,\text{m}$.

5291 — Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x$.

R: *Da equação dada vem* $4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x = \cos x$, *que admite a raiz* $x = n \times 180° + 90°$ (*de* $\cos x = 0$).

Por outro lado $\begin{cases} 4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$, *sistema em* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$, *de que se encontram fàcilmente as 4 soluções contidas em* $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4} \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \end{cases}$. *É*

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \textit{ora} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60°; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} 45° = \cos 45°; \quad \frac{1}{2} = \cos 60°,$$

pelo que $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° - \cos 60° \cdot \operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen} 15°$.

É imediato que $90° - 15° = 75°$ *também é raiz da equação, assim como* $15° + 180°$ *e* $75° + 180°$.

Resumindo: x *pode tomar qualquer das formas*

$n \times 180° + 15°$; $n \times 180° + 75°$; *ou* $n \times 180° + 90°$

GEOMETRIA

5292 — Determinar o ângulo da recta $y = 3x - 2$ com a recta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(0, -2)$.

R: *A recta que passa por* $(2, -1)$ *e* $(0, -2)$ *tem por equação* $\frac{x}{y+2} = 2$, *ou* $y = \frac{1}{2}x - 2$. *O ângulo* α *que este sector forme com o da equação* $y = 3x - 2$ *é*

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3 - 1/2}{1 + 3/2} = \operatorname{arctg} \frac{5/2}{5/2} = \operatorname{arctg} 1 = 45°$$

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1959.

Ponto n.° 1

Prova escrita de Matemática

5293 — Calcule o resto da divisão por 11 de

$$29357 + \overline{321}^2 \times 17$$

pelos critério da divisibilidade.

Em que teoremas se baseia?

R:

$$\begin{aligned} 29357 &= \dot{1}\dot{1} + 9 \\ 321 &= \dot{1}\dot{1} + 2 \\ 321^2 &= \dot{1}\dot{1} + 4 \\ 17 &= \dot{1}\dot{1} + 6 \\ 321^2 \times 17 &= \dot{1}\dot{1} + 24 = \dot{1}\dot{1} + 2 \\ 29357 + 321^2 \times 17 &= (\dot{1}\dot{1} + 9) + (\dot{1}\dot{1} + 2) = \dot{1}\dot{1} \end{aligned}$$

O resto é igual a zero.

Bases: Critério de divisibilidade por 11 *e teoremas relativos aos restos de divisões de somas, produtos, potências, por um número.*

5294 — Calcule a área do círculo cujo centro tem o afixo $4 + 3i$ e um dos pontos da circunferência é o conjugado do centro.

O conjugado do centro é o ponto que tem por afixo $4 - 3i$. *O raio da circunferência é, portanto, igual a* $\sqrt{(4-4)^2 + (3+3)^2} = 6$. *A área do círculo será igual a* 36π.

5295 — Haverá valores de x para os quais a fracção

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 4x + 3}$$

tome a forma $\frac{0}{0}$? Sabe-se que o numerador se anula para $x \quad -2$.

R: *As raízes do denominador são* 3 *e* 1; *para* $x = 3$ *o numerador anula-se; para* $x = 1$, *tome o valor* -24. *Logo a fracção toma o valor* $\frac{0}{0}$ *para* $x = 3$. *A indicação do que o numerador se anula para* $x = 2$, *dispensável, como se viu, para a resolução do problema, sugere que o autor dos pontos desejava que se calculassem os zeros desse numerador, o que se obtém igualando a zero o cociente da divisão do* $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$) *por* $(x + 2)$, *como se sabe.*

5296 — Ache a derivada da função

$$y = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{tg} x}$$

O que entende por função contínua num dado intervalo?

R: $y' = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$.
Uma função diz-se contínua num intervalo quando é continua em todos os pontos desses intervalo.

5297 — Demonstre que

$$\cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x$$

R: *Com efeito é:*

$$\cos(n+1)x = \cos(nx+x) = \cos nx \cdot \cos x - \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} x$$
$$\cos(n-1)x = \cos(nx-x) = \cos nx \cdot \cos x + \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} x$$

somando ordenadamente, vem

$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cdot \cos x$, *donde*
$\cos(n+1)x = 2\cos nx \cdot \cos x - \cos(n-1)x$, *c. q. d.*

5298 — Ache a equação da recta tangente à cónica $y^2 = -2x$ no ponto $\left(-\frac{9}{2}, -3\right)$ e, uma vez obtida, ache a tangente do ângulo que essa tangente faz com a tangente no ponto simétrico $\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

Qual a área do triângulo formado pelas duas rectas tangentes e a directriz. usando o metro como unidade de medida?

R: *Para que a recta* $y = mx + p$ *seja tangente à curva* $y^2 = 2x$ é preciso que o sistema $\begin{cases} y = mx + p \\ y^2 = 2x \end{cases}$ *tenha uma só solução.*

Estude-se: $\begin{cases} y = mx + p \\ y^2 = -2x \end{cases} \begin{cases} \\ (mn+p)^2 = -2x \end{cases}$

$\begin{cases} \\ m^2x^2 + 2(mp+1) + p^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \\ \to \Delta = (mp+1)^2 - p^2m^2. \end{cases}$

$\Delta = \to m^2p^2 + mp + 1 - m^2p^2 = 0 \to mp + 1 = 0$.
Por outro lado, sabe-se que a tangente contém o ponto $(-{}^9/_2, -3)$, *o que obriga* m *e* p *a satisfazerem simultâneamente as equações* $2mp + 1 = 0$ *e* $-3 = -\frac{9}{2}m + p$. *Daqui tira-se* $m = {}^1/_3$ *e* $m = {}^3/_2$. *A tangente pedida tem por equação* $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$. *O coeficiente angular da tangente no ponto simétrico é igual a* $-{}^1/_3$, *pelo que a tangente do ângulo formado pelas duas rectas é igual a* $\frac{18}{24}$.

A equação da directriz desta parábola é $n = {}^1/_2$. *Temos portanto de achar a área do triângulo formado pelas rectas* $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$; $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{2}$ *e* $x = {}^1/_2$. *As 2 tangentes contam-se no ponto* $A({}^9/_2, 0)$, *e cortam a directriz respectivamente nos pontos* $B\,{}^1/_2, -{}^2/_3)$ *e* $C({}^1/_2, {}^2/_3)$. *É* $\overline{BC} = {}^4/_3$ *e dist. de* A *a* $\overline{BC} = 4$. *Logo, a área do triângulo mede* $4 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{16}{6}\,m^2$.

Ponto n. 2

5299 — Pelo critério da divisibilidade calcule os algarismos a e b para que o inteiro $\overline{a37b}$ seja simultâneamente divisível por 11 e por 5.

O que entende por congruência?

R: $\overline{a37b} = \dot{11} = \dot{5}$

$b\begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases} (b+3) - (a+7) = \dot{11}$

Se $b = 0$, $a = 7$
Se $b = 5$, $a = 1$
ou 7370 *ou* 1375.

Dois números dizem-se côngruos a respeito de um terceiro (módulo), quando a sua diferença é dele múltipla.

5300 — Sendo as coordenadas polares de dois pontos $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ e $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ ache a distância desses dois pontos.

R:

$$d = \sqrt{(3 \cdot \cos{}^\pi/_6 - 5\cos{}^\pi/_2)^2 + (3 \cdot \operatorname{sen}{}^\pi/_6 - 5 \cdot \operatorname{sen}{}^\pi/_2)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + ({}^3/_2 - 5)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{49}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19}.$$

5301 — Ache o verdadeiro valor da expressão

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3x}{x^2 + x - 2}$$

para $x = 1$.

R:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3x}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{x + 2 - 3x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{-3x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

que tome o valor $-\infty$, *para* $x = 1$.

5302 — Ache a derivada da função

$$y = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x}}$$

O que entende por derivada dc uma função?

R:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x}} \qquad y' = \frac{(2x+3)\sqrt{x} - \dfrac{x^2 + 3x}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{4x^2 + 6x - x^2 - 3x}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + 3x}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x + 3}{2\sqrt{x}}.$$

Chama-se derivada de uma função $f(x)$ *no ponto* x_0 *ao limite da razão incremental de* $f(x)$ *em* x_0, *se tal limite existir, quando* x *tende para* x_0.

5303 — Resolva a equação

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \cot x = 2$$

R:

$$\frac{sen\, x}{1 + cos\, x} + cotg\, x = 2$$

$$\frac{sen\, x}{1 + cos\, x} + \frac{cos\, x}{sen\, x} = 2$$

$$sen^2 x + cos\, x + cos^2 x = 2\, sen\, x\, (1 + cos\, x)$$

$$1 + cos\, x = 2\, sen\, x\, (1 + cos\, x).$$

Isolando a solução desta equação, que vem de $1 + cos\, x = 0$, *obtém-se a solução* $sen\, x = \frac{1}{2}$, *ou seja* $x = arc \cdot sen \frac{1}{2}$.

$$x = n\pi + (-1)^n \times 30^\circ$$

5304 — De uma circunferência são conhecidas as coordenadas do centro $(2,2)$ e um ponto da curva $(0,4)$. Deseja-se saber a área compreendida entre a tangente à circunferência nesse ponto $(0,4)$, o eixo dos xx e o arco da circunferência que as duas rectas limitam. Use como unidade de medida o metro.

R: *Da simples observação dos dados se conclui que a circunferência passa na origem; a equação da tangente no ponto* $(0, 4)$ *é* $y = x + 4$, *dado que a equação da recta que contém o raio com extremo em* $(0, 4)$ *é* $y = -x + 4$. *Essa tangente vai cortar o eixo* $\overline{OX}$ *no ponto* $(-4, 0)$. *A área pedida é, portanto é igual à área do triângulo de vértices* $(0, 4)$ $(0, 0)$ e $(-4, 0)$, *diminuida da do segmento circular determinado pela corda de extremos* $(0, 0)$ *e* $(0, 4)$. *O raio da circunferência é igual a* $\sqrt{8}$. *O sector circular referente ao arco em causa é um quadrante.*

Logo: $A = 8 - \left(\frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2}\right) = 8 - 2\pi + 4 = 12 - 2\pi = 12 - 2 \times 3{,}14 = 12 - 6{,}28 = 5{,}72\ m^2$.

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, e curso de engenheiro geografo — Ano de 1960.

Ponto N.º 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5305 — Determinar os números naturais que, divididos por 67, dão resto igual ao cubo do cociente respectivo.

R: *Serão os números da forma* $N = 67 \times q + R$, *onde* $R = q^3$ *e* $R < 67$. R *pode tomar os valores* 1, 8, 27 *e* 64, *correspondendo, respectivamente, aos valores* 1, 2, 3 *e* 4 *de* q. *Os números pedidos serão, portanto,* 67, 142, 228, e 332.

ÁLGEBRA

I

5306 — Determinar os valores de m para os quais a função

$$x^2 - (m+1)x + m + 2$$

é positiva para todos os valores reais de x.

R: *Como é positivo o coeficiente de* x^2, *a função será positiva para todos os valores reais de* x *desde que sejam imaginárias as raizes da equação que se obtém igualando-a a zero. O descriminante desta equação é*

$(m+1)^2 - 4(m+2)$, *e terá de ser negativo.*

$$(m+1)^2 - 4(m+2) < 0$$

$$m^2 - 2m - 7 < 0$$

$m^2 - 2m - 7 = 0$ *para* $m = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

Cumprem-se as condições pedidas para

$$1 + 2\sqrt{2} > m > 1 - 2\sqrt{2}.$$

II

5307 — Derivar a função $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+3}}$, simplificando o resultado.

R: $$y' = \frac{6\,x}{(x^2+3)\sqrt{x^4-9}}$$

TRIGONOMETRIA

I

5308 — Resolver a equação $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

R: $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$

$\cos x + \cos(x+2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos x + \cos x\cdot(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos x\,(1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

como $1-\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$, *vem*

$\cos x\,(\cos^2 x + \cos^2 x) - 2\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$2\cos x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, *igualdade que se verifica para*

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$ *ou para*

b) $2\cos x = 1$.

A equação a) *resolve-se para* $\cos x = \pm\operatorname{sen} x$, *ou seja para* $\operatorname{tg} x = \pm 1$, *portanto para todos os arcos* $x = 45^\circ + n \times 90^\circ$.

A equação b), $\cos x = \dfrac{1}{2}$, *fornece-nos a solução*

$$x = 360^\circ \times n \pm 60^\circ$$

II

5309 — Verificar a identidade $\dfrac{\operatorname{sen} 6a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 6a - \cos 2a} + \operatorname{cotg} 2a = 0$.

R:

$$\frac{\operatorname{sen} 6a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 6a - \cos 2a} + \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{sen} 6a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 6a - \cos 2a} + \frac{\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a + \cos 6a\cdot\cos 2a + \operatorname{sen}^2 2a - \cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a\,(\cos 6a - \cos 2a)}$$

Mas

$\cos 6a\cdot\cos 2a + \operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a = \cos(6a-2a) = \cos 4a$

e $\cos 4a = \cos(2a+2a) = \cos^2 2a - \operatorname{sen}^2 2a$,

portanto

$$\frac{\operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a + \cos 6a\cdot\cos 2a + \operatorname{sen}^2 2a - \cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a\,(\cos 6a - \cos 2a)} =$$

$$= \frac{\cos 4a + \operatorname{sen}^2 2a - \cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a\,(\cos 6a - \cos 2a)} =$$

$$= \frac{\cos^2 2a - \operatorname{sen}^2 + \operatorname{sen}^2 2a - \cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a\,(\cos 6a - \cos 2a)} =$$

$$= \frac{0}{\operatorname{sen} 2a\,(\cos 6a - \cos 2a)} = 0, \qquad c.\ q.\ d.$$

GEOMETRIA

5310 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(-1,3)$ e é paralela à recta de equação $2x+3y=1$.

R: *A família das rectas paralelas a* $2x+3y=1$ *tem por equação geral* $2x+3y=k$.

Há que determinar k *de modo que a recta passe pelo ponto* $(-1;3)$.

Portanto: $2\times(-1)+3\times 3 = k$; $k = 9-2 = 7$.

A equação pedida é $2x+3y=7$.

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1960.

Ponto N.º 1

Prova escrita de Matemática

5311 — Uma recta A passa pelo ponto $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$ e é perpendicular a uma recta B de equação $y=-\dfrac{2}{3}x$.

Quais as equações das rectas paralelas à primeira e distantes dela $\sqrt{13}$?

R: *Rectas paralelas a* A *serão também perpendiculares a* B. *Trata-se, pois, de achar as duas rectas perpendiculares a* B *e que distam* $\sqrt{13}$ *do ponto* $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$. *A equação geral das rectas perpendiculares a* B *é* $y=\dfrac{3}{2}x+p$; *a expressão da distância de uma destas rectas ao ponto* $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$

é $$d = \pm\frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\times 4 - p}{\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}}$$

$$\pm\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\times 4-p}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\sqrt{13}\,,\ \text{ou seja}$$

$$\pm\frac{-\frac{1}{2}-6-p}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{13}\,;\ \pm\left(-\frac{13}{2}-p\right)=\frac{13}{2}$$

$$\begin{cases} -\frac{13}{2}-p=\frac{13}{2}\to p=-13 \\ \frac{13}{2}+p=\frac{13}{2}\to p=0\,. \end{cases}$$

As duas rectas pedidas têm por equação

$$y=\frac{3}{2}x \quad e \quad y=\frac{3}{2}x-13\,.$$

5312 — Ache o resto da divisão de $2a^3+3b^2$ por 5 sabendo que os restos da divisão de a e de b por 5 são 2 e 3.

O que entende por divisão factorial?

R: $a=\dot{5}+2 \quad a^3=\dot{5}+2^3=\dot{5}+8=\dot{5}+5+$
$+3=\dot{5}+3 \quad 2a^3=\dot{5}+6=\dot{5}+1$

$b=\dot{5}+3;\ b^2=\dot{5}+9=\dot{5}+4;\ 3b^2=\dot{5}+12=\dot{5}+2$

$$2a^3+3b^2=\dot{5}+1+\dot{5}+2=\dot{5}+3\,.$$

O resto pedido é 3.

5313 — Calcule $tg\,3\alpha$ sabendo que $tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

R:

$$tg\,3\alpha=tg\,(\alpha+2\alpha)=\frac{tg\,\alpha+tg\,2\alpha}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,2\alpha}$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$tg\,3\alpha=\frac{tg\,\alpha+\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}{1-tg\cdot\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}=\frac{tg\,\alpha-tg^3\alpha+2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha-2\,tg^2\alpha}=$$

$$=\frac{3\,tg\,\alpha-tg^3\alpha}{1-3\,tg^2\alpha}$$

Como $tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, *vem* $tg\,3\alpha=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-1}=\infty\,.$$

Com efeito $tg\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, *e* $tg\,90^\circ=\infty$.

5314 — Qual o verdadeiro valor da fracção

$$\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^4+x^3-11x^2-9x+18}$$

para cada um dos seguintes valores de $x: x=1$, $x=-2$ e $x=3$?

O que entende por raiz múltipla?

R:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^4+x^3-11x^2-9x+18}\,.$$

É $P(1)=P(3)=P(-2)=0$ *e*
$Q(1)=Q(3)=Q(-2)=0$.

Fácilmente se decompõem em factores os termos da fracção dada, obtendo-se o resultado

$$f(x)\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-3)(x+2)^2(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$f(1)=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{12}$$

$$f(3)=\frac{1}{5\times 6}=\frac{1}{30}$$

$$f(-2)=\frac{1}{0\times 1}=\infty\,.$$

Raiz múltipla: se o grau de multiplicidade de uma raiz de um polinómio é maior que 1, *essa raiz diz-se múltipla. Diz-se que a raiz* α *de um polinómio* $P(x)$ *é de grau de multiplicidade* k *quando*

$$P(x)=(x-\alpha)^k\times Q(x),\ \ com\ \ Q(\alpha)\neq 0\,.$$

5315 — É dada a parábola de vértice na origem e de foco $(0,5)$ e a circunferência tangente à directriz da parábola e de centro no foco da mesma.

Ache os pontos de intersecção das duas curvas.

R: *Equação da parábola:* $x^2=20y$

Directriz: $y=-5$

Circunferência pedida: $x^2+(y-5)^2=10^2$

Pontos de intersecção $\begin{cases} x^2=20y \\ x^2+(y-5)^2=10^2\,. \end{cases}$

$$20y = (y-5)^2 - 100 = 0$$
$$20y = y^2 - 10y + 25 - 100 = 0$$
$$y^2 + 10y - 75 = 0 \quad y = -15 \quad y = 5$$

Rejeitada a solução $y = -15$, *vem* $x^2 = 100 \quad x = \pm 10$.

Os pontos da intersecção são $(10{,}5)$ *e* $(-10{,}5)$.

5316 — Dada a equação

$$(x+2)^2 + y^2 = 32$$

ache pelas derivadas a equação das tangentes à curva e, estabelecendo a condição de elas fazerem 45° com o eixo dos xx, encontre os pontos de tangência.

O que entende por derivada de uma função?

R: *Nota: a determinação de tangentes pelas derivadas está fora do programa do curso complementar dos Liceus. Embora se pense que assim não devesse ser, não podemos deixar de fazer notar que é muito frequente aparecerem questões como esta nos exames de aptidão, tanto escritos como orais, o que não nos parece justo.*

$$y^2 = 32 - (x+2)^2$$
$$y' = \frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}}.$$

Num ponto (x, y) *da curva, a tangente tem por equação* $Y - y = m(X - x)$, *em que* m *é o valor da derivada da função* $y(x)$ *no ponto* x.

Se as tangentes fazem com o eixo dos $\overline{xx}$ *ângulos de 45°, será* $m = 1$.

$\dfrac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$. *Como a equação da curva é* $y^2 = 32 - (x+2)^2$, *associando esta equação à relação* $\dfrac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$, *obtém-se:*

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{32-(x+2)^2} = 1 \\ y^2 = 32 - (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ y^2 = 32 - (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}.$$

As tangentes que fazem com $\overline{ox}$ *angulos de 45° tocam a circunferência nos pontos* $(-6, 4)$ *e* $(-6, -4)$.

Derivada de uma função $f(x)$ *num ponto* x_0 *é o limite, se existe, da razão incremental, de* $f(x)$ *em* x_0 *quando* x *tende para* x_0.

ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Estágio pedagógico de 8.º Grupo — Exames de Cultura (1959-60) — Decreto n.º 41273 de 17-9-1957.

Prova escrita

5317 — Faça uma «exposição» subordinada ao tema:

Números complexos a duas unidades

OBS: — O trabalho admite a orientação e a extensão que entender dever dar-lhe, mas, de preferência, considere as rubricas seguintes:

I

1. *Os números complexos:* — definição; relação de igualdade.
2. *As operações de adição e multiplicação:* — definição e propriedades formais; existência de operações inversas daquelas.
3. *Propriedades fundamentais do conjunto dos números complexos.*

II

4. A operação de *potenciação* (expoente inteiro e expoente fracionário).
5. A operação de *radiciação;* análise circunstanciada da operação e possível estudo comparativo com a mesma operação, quando definida no conjunto dos números reais.

Prova prática

I. GEOMETRIA

5318 — Num triângulo ABC, de centro de gravidade G, as medidas a, b e c dos lados verificam a relação

$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

1.º) Prove que são tangentes ao lado BC as duas circunferências que passam, respectivamente, pelos pontos A, B e G (uma delas) e pelos pontos A, C e G (a outra).

2.º) Prove que as medidas m_a, m_b e m_c das *medianas,* saídas, respectivamente, dos vértices A, B