$$20y = (y-5)^2 - 100 = 0$$
$$20y = y^2 - 10y + 25 - 100 = 0$$
$$y^2 + 10y - 75 = 0 \quad y = -15 \quad y = 5$$

Rejeitada a solução $y = -15$, *vem* $x^2 = 100$ $x = \pm 10$.
Os pontos da intersecção são $(10{,}5)$ *e* $(-10{,}5)$.

5316 — Dada a equação

$$(x+2)^2 + y^2 = 32$$

ache pelas derivadas a equação das tangentes à curva e, estabelecendo a condição de elas fazerem 45° com o eixo dos xx, encontre os pontos de tangência.

O que entende por derivada de uma função?

R: *Nota: a determinação de tangentes pelas derivadas está fora do programa do curso complementar dos Liceus. Embora se pense que assim não devesse ser, não podemos deixar de fazer notar que é muito frequente aparecerem questões como esta nos exames de aptidão, tanto escritos como orais, o que não nos parece justo.*

$$y^2 = 32 - (x+2)^2$$
$$y' = \frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}}.$$

Num ponto (x, y) *da curva, a tangente tem por equação* $Y - y = m(X - x)$, *em que* m *é o valor da derivada da função* $y(x)$ *no ponto* x.

Se as tangentes fazem com o eixo dos $\overline{xx}$ *ângulos de 45°, será* $m = 1$.

$$\frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1.$$ *Como a equação da curva é* $y^2 = 32 - (x+2)^2$, *associando esta equação à relação* $\frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$, *obtém-se:*

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{32-(x+2)^2} = 1 \\ y^2 = 32-(x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ y^2 = 32-(x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}.$$

As tangentes que fazem com $\overline{ox}$ *angulos de 45° tocam a circunferência nos pontos* $(-6, 4)$ *e* $(-6, -4)$.

Derivada de uma função $f(x)$ *num ponto* x_0 *é o limite, se existe, da razão incremental, de* $f(x)$ *em* x_0 *quando* x *tende para* x_0.

ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Estágio pedagógico de 8.° Grupo — Exames de Cultura (1959-60) — Decreto n.° 41273 de 17-9-1957.

Prova escrita

5317 — Faça uma «exposição» subordinada ao tema:

Números complexos a duas unidades

OBS: — O trabalho admite a orientação e a extensão que entender dever dar-lhe, mas, de preferência, considere as rubricas seguintes:

I

1. *Os números complexos:* — definição; relação de igualdade.
2. *As operações de adição e multiplicação:* — definição e propriedades formais; existência de operações inversas daquelas.
3. *Propriedades fundamentais do conjunto dos números complexos.*

II

4. A operação de *potenciação* (expoente inteiro e expoente fracionário).
5. A operação de *radiciação;* análise circunstanciada da operação e possível estudo comparativo com a mesma operação, quando definida no conjunto dos números reais.

Prova prática

I. GEOMETRIA

5318 — Num triângulo ABC, de centro de gravidade G, as medidas a, b e c dos lados verificam a relação

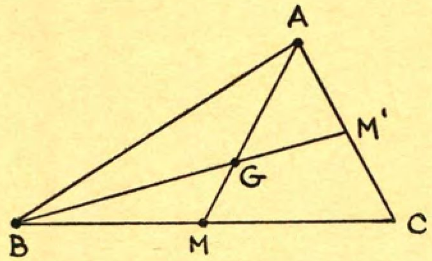
$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

1.°) Prove que são tangentes ao lado BC as duas circunferências que passam, respectivamente, pelos pontos A, B e G (uma delas) e pelos pontos A, C e G (a outra).

2.°) Prove que as medidas m_a, m_b e m_c das *medianas*, saídas, respectivamente, dos vértices A, B

e C são, também respectivamente, proporcionais a a, c e b.

R: *Sejam:* ABC *o triângulo considerado;* AM *e* BM' *duas das suas medianas e* G *o centro de gravidade.*



1.º) *A circunferência definida pelos pontos* A, B, G *é tangente a* BC *se for*

1) $$\overline{BM}^2 = \overline{MG} \times \overline{MA}$$

Ora, pondo

$$\overline{BC} = a; \quad \overline{AB} = c; \quad \overline{AC} = b; \quad \overline{AM} = m_a$$

tem-se:

a) $$b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = 2\,a^2 \quad (\textit{cond. do enunciado})$$

$\therefore$

$$2\,a^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}; \quad m_a^2 = \frac{3\,a^2}{4};$$

2) $$\boxed{m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Então, vem

$$\overline{MG} \times \overline{MA} = \frac{1}{3}\,m_a \times m_a = \frac{1}{2}\,m_a^2 = \frac{1}{3} \times \frac{3\,a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

e, por outro lado,

b) $$\overline{BM}^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Conclusão: *verifica-se a relação* 1), *o que garante a tangência da circunferência considerada com* BC.

Obs.: *fazendo considerações análogas, conclui-se que a circunferência definida pelos pontos* A, C *e* G *é também tangente a* BC.

2.º) *Da relação* 2) *resulta*

$$\frac{m_a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por outro lado, como

$$2\,a^2 + 2\,b^2 = 4\,m_c^2 + c^2$$

vem

$$2\,a^2 - c^2 + 2\,b^2 = 4\,m_c^2$$

e, atendendo a $b^2 + c^2 = 2\,a^2$, *resulta*

$$3\,b^2 = 4\,m_c^2; \quad \frac{m_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Anàlogamente, encontra-se

$$\frac{m_b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Em conclusão:

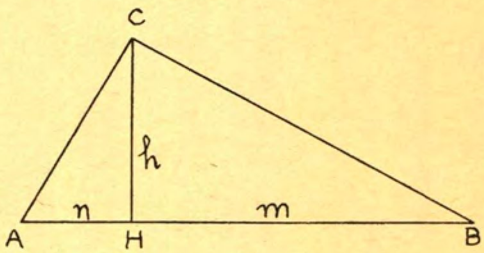
$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{c} = \frac{m_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

II. TRIGONOMETRIA

5319 — Num triângulo ABC, rectângulo em C, sabe-se que a *altura* relativa à *hipotenusa* divide-a em dois segmentos cuja *diferença* é igual à *altura*.

Calcule as medidas dos ângulos A *e* B *do triângulo.*

R: *Sejam:* ABC *o triângulo no qual (por hipótese) é med* $\sphericalangle C = 90°$; CH *a altura relativa à hipotenusa* $(\overline{CH} = h)$; m e n, *respectivamente, as medidas das projecções dos catetos* BC *e* AC *sobre a hipotenusa.*



Como $m - n = h \neq 0$, *será* $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ *e, por isso,* $\sphericalangle A \neq \sphericalangle B$. *Para fixar ideias, suponhamos então* $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. *Tem-se:*

$$m = h \, cotg\, B$$
$$n = h \, cotg\, A = h \, tg\, B$$
$$m - n = h\,(cotg\, B - tg\, B)$$
$$h = h\,(cotg\, B - tg\, B)$$

$\therefore$

$$cotg\, B - tg\, B = 1$$

e desta relação tira-se

$$tg\, 2\,B = 2$$

o que dá a solução conveniente

$$2\,B = 63°\ 26'\ 6''\ (\textit{aprox.})$$
$$B = 31°\ 43'\ 3''$$
$$A = 90° - B = 58°\ 16'\ 57''$$

Soluções de A. A. Lopes