ANO XXI — N.º 78 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JAN./MARÇO — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 29449 — LISBOA 2

Sur la figure formée par deux ensembles convexes en Géométrie plane

por **Lucien Chamard**

1. Notre but est assez clairement exprimé par le titre de la présente Note.

Précisons cependant que nous nous attacherons surtout ici à établir diverses conditions de convexité de la réunion de deux figures convexes. A cet effet, nous devons d'abord rappeler quelques définitions et résultats. Nous énumérerons aussi les divers aspects de la figure étudiée.

2. α) Soient deux ensembles ponctuels quelconques E_1 et E_2. On a la relation formelle évidente $E_1 \dot{+} E_2 = E_1 - E_1 \cdot E_2 + \dot{+} E_1 \cdot E_2 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Cas particuliers:

1.º) $E_1 \cdot E_2 = 0$; E_1 et E_2 sont disjoints par définition.

2.º) $E_1 \cdot E_2$ n'a pas de points intérieurs; $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} = E_1$, $\overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_2$, $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} \dot{+} \overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_1 \dot{+} E_2$ et $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} \cdot \overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_1 \cdot E_2$.

Et, en toute généralité.

3.º) $C(E_1 \dot{+} E_2) = C(E_1) \cdot C(E_2)$ (1)

$C(E_1 \cdot E_2) = C(E_1) \dot{+} C(E_2)$

4.º) $f(E) = \overline{E} \cdot \overline{C(E)}$

$f(E_1) \cdot f(E_2) = f(E_1 \dot{+} E_2) \cdot f(E_1 \cdot E_2)$.

β) D'autre part, on sait qu'un ensemble convexe est un ensemble qui, avec points contient tous ceux du segment rectiligne qui les joint.

DÉFINITION I. C'est naturellement un ensemble *semi-continu* au sens suivant: avec deux points, il contient un continu contenant ces deux points. On peut dire que l'ensemble convexe possède *la semi-continuité rectilinéaire*.

γ) *Dans le plan*, un ensemble convexe qui ne remplit pas ce plan, c'est-à-dire dont le complémentaire n'est pas vide est tel que le dit complémentaire contient au moins un demi-plan ouvert. On peut, à partir de cette remarque, définir les demi-plans d'appui d'un ensemble convexe, demi-plans ouverts «bordés» par *une droite d'appui* de l'ensemble convexe et on démontre que par tout point de la frontière d'un ensemble convexe, il passe au moins une droite d'appui. A ce point de vue, l'ensemble convexe apparaît comme l'intersection des demi-plans fermés complémentaires des demi-plans d'appui. A ce titre,

(1) $C(E)$ désigne le complémentaire de E et $f(E)$ la frontière de E.

l'ensemble convexe est lui-même un ensemble fermé.

Si un ensemble plan convexe a au moins une droite d'appui qui passe par chacun de ses points frontières, réciproquement, tout ensemble plan qui admet en tout point de sa frontière, au moins une droite d'appui, est un ensemble convexe. Aussi, peut on définir un ensemble convexe comme un ensemble jouissant de la propriété précédente (DÉFINITION 2).

L'intersection d'une droite et d'un ensemble convexe est un ensemble fermé connexe (c'est-à-dire un continu rectiligne).

δ) Enfin, un ensemble plan E qui ne remplit pas le plan, peut, sans être convexe, avoir au moins une droite d'appui. S'il est borné, il a pour chaque direction non orientée, deux droites d'appui parallèles (à l'image du cercle). L'intersection des demi-plans fermés complémentaires des demi-plans d'appui constitue *l'enveloppante convexe* de l'ensemble E, enveloppante convexe qui se note $K(E)$.

L'ensemble $K(E)$ contient E et ne s'identifie à E que si E est convexe. Dans le cas de E quelconque, une droite peut rencontrer cet ensemble suivant un ensemble non connexe et si E est fermé, il en est de même de quelque droite d'appui que M. GEORGES BOULIGAND a appelée *droite concluante* pour rappeler le fait qu'une pareille droite contribue à «fermer» la frontière de $K(E)$ lorsqu'est donné l'ensemble $E \cdot f\,[K(E)]$.

Sur une droite concluante, il y a au moins une corde ouverte de E appartenant à $f[K(E)]$.

Enfin, rappelons que les droites d'appui jouissent de la semi-continuité supérieure par inclusion, c'est-à-dire que si M désigne un point d'appui d'une droite d'appui $\Delta'\Delta$ d'un ensemble E, si M tend vers un point M_0 de $f(E)$, $\Delta'\Delta$ tend vers une droite d'appui de E en M_0.

Les ensembles convexes bornés sont des continus, comme il résulte presque immédiatement de leur définition. Aussi convient-il, avant d'étudier la figure formée par deux ensembles convexes, d'examiner succintement la figure formé par deux continus E_1 et E_2.

THÉORÈME I. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux continus non disjoints* (1) *et tels que l'un d'eux ne soit pas inclus dans l'autre* (2). *Leur intersection* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ *est une coupure de leur réunion* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$ (3).

En effet, soient P_1 et P_2 deux points appartenant respectivement à $E_1 - (E_1 \cdot E_2)$ et à $E_2 - (E_1 \cdot E_2)$.

$E_1 \dot{+} E_2$ étant un continu, il existe un continu (4) $k(P_1, P_2)$ contenant P_1 et P_2 et contenu dans $E_1 \dot{+} E_2$. Je dis que $k(P_1, P_2)$ porte au moins un point de $E_1 \cdot E_2$.

En effet, appelons k_1 la partie de $k(P_1, P_2)$ appartenant à E_1 et k_2 la partie de $k(P_1, P_2)$ appartenant à E_2.

On peut écrire :

$$\begin{cases} k\,1 = E_1 \cdot k(P_1, P_2) \cdot \subset E_1 & (1) \\ k\,2 = E_2 \cdot k(P_1, P_2) \cdot \subset E_2 & (2) \end{cases}$$

$$k = k_1 \dot{+} k_2 \subset E_1 \dot{+} E_2$$

$$k_1 \cdot k_2 \neq 0 \quad \text{(puisque } k \text{ est un continu).}$$

Faisons le produit logique des relations (1) et (2), membre à membre: $k_1 \cdot k_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot k(P_1, P_2)$.

$k_1 \cdot k_2$ appartient donc simultanément à k et à $E_1 \cdot E_2$, autrement dit k a un point au moins dans $E_1 \cdot E_2$. *C. Q. F. D.*

---

(1) C'est-à-dire tels que $E_1 \cdot E_2 = 0$.

(2) $E_1 \not\subset E_2$, $E_2 \not\subset E_1$.

(3) On pourrait exprimer ce fait par intersection de $(E_1 - E_1 \cdot E_2)$ et $(E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0$, mais je me propose ici de montrer que tout continu ayant un point dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et un point dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$ a forcément un point dans $E_1 \cdot E_2$.

(4) Et même un continu irréductible (par rapport aux faits de contenir P_1 et P_2 et d'être un continu, voir par exemple S. JANISWESKI: Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèse. Paris 1911 = Journal de l'Ec. Polytech. 16, 1912, Chap. II, ou bien C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 151, 18 Juillet 1910.

Nous avons écarté le cas de deux ensembles continus disjoints. Il est évident ou presque que, même dans le cas d'ensembles E_1 et E_2 *quelconques,* non forcément connexes, non forcément fermés, le fait d'être disjoints entraîne que l'intersection des fermetures est ou vide ou, au moins, dépourvue de points intérieurs.

3. On sait que l'intersection (Durschnitt) ou ensemble des points communs à un nombre quelconque fini ou non, d'ensembles convexes est aussi un ensemble convexe. Nous avons déjà rencontré un exemple de ce fait réciproque = un ensemble convexe peut être regardé comme l'intersection des demi-plans complémentaires de demi-plans d'appui.

Il est immédiat que la réunion de deux ensembles convexes n'est pas, en général, un ensemble convexe: par exemple, deux ensembles convexes disjoints n'ont pas toujours une réunion convexe. Aussi convient-il d'étudier les conditions de convexité de la réunion de deux figures convexes. Ce problème a déjà été étudié mais pas systématiquement, à ma connaissance. Je me propose de montrer ici que les conditions en question sont multiformes, mais il n'est pas inutile qu'auparavant, nous examinions les divers aspects de la figure formée par deux figures convexes.

Cas I. Bien entendu, deux ensembles convexes peuvent être disjoints

$$E_1 \cdot E_2 = 0 \quad E_1 - E_1 \cdot E_2 = E_1 \quad E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2$$
$$(E_1 - E_1 \cdot E_2) \dot{+} (E_2 - E_1 \cdot E_2) = E_1 \dot{+} E_2$$
$$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_1 - E_1 \cdot E_2 \dot{+} E_2 - \\ - E_1 \cdot E_2 = E_1 \dot{+} E_2$$

est fermé mais non connexe.

$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ a deux composantes fermées.

Cas II. $E_1 \cdot E_2 \neq 0$ mais
$\quad$ Int. $E_1 \cdot$ Int. $E_2 = 0$ (1)

(1) Int. désigne l'ensemble des points intérieurs de E.

En un point de $E_1 \cdot E_2$, E_1 et E_2 ont au moins une droite d'appui commune qui les «sépare» (1).

$$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = (E_1 - E_1 \cdot E_2) \dot{+} \\ \dot{+} (E_2 - E_1 \cdot E_2) \subset (E_1 \dot{+} E_1)$$

au sens strict, avec

$$(E_1 - E_1 \cdot E_2) \cdot (E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0 \,.$$

Cette fois $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ n'est ni fermé, ni connexe et $(E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2)$ a deux composantes non fermées (2), et

$$\overline{E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_1 \dot{+} E_2 \,.$$

Cas III. $E_1 \cdot E_2 \neq 0$ Int. $E_1 \cdot$ Int. $E_2 \neq 0$. Comme dans le Cas II, $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = (E_1 - E_1 \cdot E_2 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2) \subset E_1 \dot{+} E_2$ avec $(E_1 - E_1 \cdot E_2) \cdot (E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0$ $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ ni fermé ni connexe.

Mais $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ a au moins deux composantes non fermées *et peut en avoir un nombre quelconque.*

Et $\overline{E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2} \subset E_1 \dot{+} E_2$ au sens strict.

Exemple. Réunion de deux polygones réguliers convexes, réunion constituant un polygone régulier étoilé = réunion de deux triangles équilatéraux dont l'un se déduit de l'autre par une rotation de 60° autour du centre commun.

Cas IV. $E_1 \cdot E_2 \equiv E_1$ (ou E_2)
(Celà équivaut à $E_1 \subset E_2$)

avec $E_1 \cdot \overline{C(E_2)} \neq 0$

(1) J'entends ici que chacun des ensembles E_1 et E_2 est inclus dans la fermeture d'un demi-espace d'appui de l'autre.

(2) Rappelons qu'une composante d'un ensemble est une partie connexe de cet ensemble saturée par rapport à cette propriété.

Dans ce cas, $E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2 - E_1$ n'est pas forcément d'un seul tenant; $E_1 - E_1 \cdot E_2 = 0$.

Exemple: $E_2 =$ disque circulaire
$E_1 =$ triangle inscrit dedans.

Cas V. $E_1 \cdot E_2 = E_1$ (ou E_2) ou bien encore $E_1 \subset \text{int.}\, E_2$.

Dans ce cas $E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2 - E_1 =$ $=$ connexe.

Nous retiendrons surtout que E_1, E_2 étant deux ensembles convexes, $E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2$ peut avoir un nombre quelconque de composantes.

4. Etude de $E_1 \cdot E_2 \dot{+} E \sum k_i$, $\sum k_i$ désignant la réunion d'un nombre quelconque de composantes k_i de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

Théorème II. *Tout segment rectiligne joignant deux composantes différentes de* $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ *rencontre* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$.

En effet, soient K_1 et C_1 deux composantes de $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et soient A_1 et A'_1 deux points appartenant respectivement à K_1 et C_1. Considérons le segment rectiligne $A_1 A'_1$. Ses extrémités appartenant à E_1, il appartient tout entier à E_1.

D'autre part $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1$ et $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$ sont des continus d'intersection $E_1 \cdot E_2$ ainsi que leur réunion $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ et aucun d'eux n'est contenu dans l'autre puisque $K_1 \cdot C_1 = 0$. En vertu du Théorème I, *tout* continu joignant un point A_1 de K_1 et un point A'_1 de C_1, rencontre $E_1 \cdot E_2$. C'est donc le cas pour le segment rectiligne $A_1 A'_1$.

Corollaire. *Une droite* $\Delta' \Delta$ *ne saurait rencontrer plus de deux composantes de* $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ (*ou* $\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$).

En effet, supposons le contraire et soient A_1, A'_1, A''_1 des points de $\Delta' \Delta$ appartenant à trois composantes différentes K, C, Γ de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

En vertu du Théorème II, à supposer que A_1, A'_1, A''_1 se succèdent dans cet ordre, $A_1 A'_1$ porterait un point B de $E_1 \cdot E_2$ et $A'_1 A''_1$ un point B' de $E_1 \cdot E_2$. Le segment $B B'$ serait tout entier dans $E_1 \cdot E_2$ ainsi que le point A'_1 qu'il porte, contrairement à l'hypothèse.

Théorème III. *Soit* K *une composante de* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$. *L'ensemble* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E} \dot{+} \mathrm{K}$ *est convexe.*

K appartient soit à $E_1 - E_1 \cdot E_2$ soit à $E_2 - E_1 \cdot E_2$ car si ces deux ensembles ne sont pas vides, ils sont disjoints. Supposons donc que $K \subset E_1 - E_1 \cdot E_2$ et considérons un segment rectiligne $A_1 A'_1$ ayant ses extrémités sur $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$, donc dans E_1; il appartient lui-même tout entier à E_1. Nous allons montrer qu'il appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ c'est-à-dire ne peut porter un point B d'une autre composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

En effet, si A_1 et A'_1 appartiennent tous deux à $E_1 \cdot E_2$, le segment $A_1 A'$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2$ et ne saurait porter un point B d'une composante quelconque de $E_1 - E_1 \cdot E_2$. Supposons maintenant que A'_1 appartienne à K et A_1 à $E_1 \cdot E_2$. Si $A_1 A'_1$ portait un point B de E_1 appartenant à une autre composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$, en vertu du Théorème II, $A'_1 B$ porterait un point B'de $E_1 \cdot E_2$; le segment $A_1 B'$ ayant ses extremités dans $E_1 \cdot E_2$ qui est convexe serait tout entier dans $E_1 \cdot E_2$ ainsi que le point B qu'il porte contrairement à l'hypothèse. Reste à envisager un segment $A_1 A'_1$ ayant ses deux extrémités dans K.

Ce segment est aussi tout entier dans E_1. Il reste à prouver qu'il ne peut rencontrer une seconde composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$. Si celà était, c'est-à-dire si B était un point de $A_1 A'_1$ situé dans C, en vertu du Théorème II, il y aurait sur $B A_1$ un point I de $E_1 \cdot E_2$ et sur $B A'_1$ un point J de $E_1 \cdot E_2$. Le point B appartiendrait ainsi à $E_1 \cdot E_2$ contrairement à l'hypothèse. En résumé, tout segment ayant ses extrémités dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ y est situé tout entier et $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ est convexe.

THÉORÈME IV. *Soient deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2, *aucun d'eux n'étant contenu dans l'autre. Supposons que* $E_1 - E_1 \cdot E_2$ *présente au moins deux composantes* K_1 *et* C_1. *Je dis que* $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ *est un ensemble convexe et que, plus généralement,* $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \sum K_i$ *est un ensemble convexe,* $\sum K_i$ *désignant la réunion d'une collection quelconque de composantes de* $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

Démonstrons d'abord la première partie du théorème après avoir posé:

$E_1 \supset E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ avec $K_1 \cdot C_1 = 0$.

Soient A_1 et A'_1 deux points de $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS I. A_1 et A'_1 sont dans $E_1 \cdot E_2$; il en est de même de tout le segment $A_1 A'_1$.

CAS II. A_1 et A'_1 sont dans K_1 (ou dans C_1).

Dans ce cas, au cours de la démonstration du Théorème III, il a été prouvé que $A_1 A'_1$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_1 \dot{+} K_1$ (ou $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$) c'est-à-dire à $E_1 \cdot E_1 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS III. A_1 est dans $E_1 \cdot E_2$ et A'_1 dans K_1 (ou C_1). C'est encore au cours de la démonstration du Théorème III qu'on a prouvé que $A_1 A'_1$ appartiente à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1$ ou à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$ c'est-à-dire à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS IV. A_1 est dans K_1 et A'_1 est dans C_1. En vertu du Théorème II, $A_1 A'_1$ porte au moins un point B de $E_1 \cdot E_2$. Nous avons vu au CAS III que $B A_1$ est dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1$ et que $B A'_1$ est dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$. Donc $A_1 A'_1$ est tout entier dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$. L'ensemble $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ est donc convexe.

Il est aisé de montrer, plus généralement que $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \sum K i$ est convexe. La démonstration précédente est valable. Et si $\sum K i$ désigne la reunion de toutes les composantes de $E_1 - E_1 \cdot E_2$, ce résultat est évident.

5. *Critère de convexité de la reunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *envisagés selon la définition* I (1).

THÉORÈME V. *Si* A_1 *est une point de* $E_1 - E_1 . E_2$ *et si* A_2 *est un point de* $E_2 - E_1 \cdot E_2$ *le segment rectiligne* $A_1 A_2$ *est tout entier dans* $E_1 \dot{+} E_2$ *à la condition nécessaire et suffisante qu'il porte au moins un point* B *de* $E_1 \cdot E_2$.

1.°) *La condition est nécessaire* — en d'autres termes, si $E_1 \dot{+} E_2$ contient $A_1 A_2$, ce segment a au moins un point B dans $E_1 \cdot E_2$. En effet, $A_1 A_2$ est tout dans $E_1 \dot{+} E_2$. Comme $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et $E_2 - E_1 \cdot E_2$ sont non vides et disjoints, il résulte du Théorème I que $A_1 A_2$ rencontre $E_1 \cdot E_2$.

2.°) *La condition est suffisante* — en d'autres termes, si $A_1 A_2$ rencontre $E_1 \cdot E_2$ en un point B au moins, ce segment apartient à $E_1 \dot{+} \cdot E_2$.

En effet, $A_1 B$ appartient tout à E_1, $B A_2$ appartient tout en E_2; donc $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 B} \dot{+} \dot{+} \overline{B A_2}$ apartient tout à $E_1 \dot{+} E_2$.

THÉORÈME VI. *La réunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *est elle même convexe à la condition nécessaire et suffisante que tout segment* $A_1 A_2$ *dont les*

(1) § 2 (β).

extrémités sont respectivement dans E_1 *et dans* E_2 *ait au moins un point commun avec l'intersection* $E_1 \cdot E_2$.

En effet, si A_1 et A_2 appartiennent à $E_1 \cdot E_2$, $A_1 A_2$ appartient à $E_1 \cdot E_2$ donc à $E_1 \dotplus E_2$. Si A_1 est dans $E_1 \cdot E_2$ et A_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$, on sait, grâce a Théorème III que $E_1 \cdot E_2 \dotplus K_2$ est convexe(1) donc, que $A_1 A_2$ est contenu dans $E_1 \cdot E_2 \dotplus K_2$ et par suite dans E_2, et dans $E_1 \dotplus E_2$. Enfin, si A_1 est dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et A_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$, le Théorème V nous apprend que $A_1 A_2$ est encore contenu dans $E_1 \dotplus E_2$. Ainsi la condition du Théorème VI est suffisante. Il reste à montrer qu'elle est nécessaire.

En effet, si $A_1 A_2$ n'était pas entièrement contenu dans $E_1 \dotplus E_2$, il ne porterait pas un point de $E_1 \cdot E_2$ comme il résulte du Théorème V.

6. *Etude des droites d'appui de* $E_1 \dotplus E_2$ *et de* $E_1 \cdot E_2$.

Les ensembls $E_1, E_2, E_1 \cdot E_2$ étant convexes, on peut établir une correspondance par «représentation circulaire» entre les frontières $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_1 \cdot E_2)$. Mais, en général, $E_1 \dotplus E_2$ n'est pas convexe et présente, par conséquent, *des droites d'ppui concluantes* au sens du § 2 (δ).

Théorème VII. *Toute droite d'appui de* $E_1 \cdot E_2$ *parallèlle à une droit d'appui concluante de* $E_1 \dotplus E_2$ *et non confondue avec elle, ne saurait avoir plus d'un point d'appui sur* $E_1 \cdot E_2$.

En effet, soit la droite d'appui $D'D$ de $E_1 \cdot E_2$ parallèle à une droit d'appui concluante $\Delta'\Delta$ de $E_1 \dotplus E_2$ et la plus proche de $\Delta'\Delta$. L'ensemble d'appui de $\Delta'\Delta$ n'est pas connexe. Supposons que ses points d'appui les plus rapprochés entre eux et avec l'ensemble d'appui de $D'D$ soint A_1 et A_2 (ils sont respectivement sur E_1 et E_2). Si $D'D$ avait deux points d'appui, B et B' (le segment BB' ayant le même sens que $\overline{A_1 A_2}$).

Le triangle $A_1 B' B$ ayant ses trois sommets dans E_1 est out entier dans E_1. De même, le triangle $A_2 B B'$ ayant ses trois sommets dans E_2 est tout entier dans E_2. Or, ces triangles ont en commun un troisième triangle BIB' (I est l'intersection de $A_1 B'$ et de $A_2 B$) situé entre $D'D$ et $\Delta'\Delta$ ce qui contredit l'hypothèse que $D'D$ est la droite d'appui de $E_1 \cdot E_2$ parallèle à $\Delta'\Delta$ et la plus voisine de cette dernière droite.

De plus,

Théorème VIII. *Soit* $\Delta'\Delta$ *une droite d'appui concluante de* $E_1 \dotplus E_2$. *La droite d'appui de* $E_1 \cdot E_2$ *la plus proche de* $\Delta'\Delta$ *et parallèle à* $\Delta'\Delta$ (*soit* $D'D$) *est une droite d'appui intérieure* (1) *de* $E_1 \cdot F_2$, *à moins que* $\Delta'\Delta$ *et* $D'D$ *ne soient confondues.*

En effet, d'après le Théorème VII, $D'D$ n'a qu'un seul point d'appui B sur $E_1 \cdot E_2$. Si $D'D$ n'était pas une droite d'appui intérieure de $E_1 \cdot E_2$, elle serait, en B, une droite d'appui unique de $E_1 \cdot E_2$; donc droite d'appui de E_1 et de E_2 à la fois. Si $\Delta'\Delta$ et $D'D$ ne sont pas confondues, la bande qu'elles déterminent ne doit contenir aucun point de E_1 ou de E_2, donc $\Delta'\Delta$ ne saurait être droite d'appui de $E_1 \dotplus E_2$ puisque sans appui sur E_1 et E_2.

(1) K_2 désignant une composante de $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

(1) On dit qu'une droite d'appui d'un ensemble en un point est intérieure si elle n'est limite que de droites d'appui. Dans ce cas, il existe au même point un «angle d'appui» supérieur à π, en d'autres termes l'ensemble est localisé dans un angle intérieur à π, dont le sommet est dit *sommet* de l'ensemble. (A. Denjoy).

Du Théorème VIII découle immédiatement ce premier résultat:

THÉORÈME IX. *Une condition suffisante pour que la réunion* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *soit elle-même convexe est que leur intersection ne présente pas de sommets.*

La réciproque n'est pas vraie. L'ensemble $E_1 \dot{+} E_2$ peut être convexe même si $E_1 \cdot E_2$ présente des sommets.

EXEMPLE I. E_1 est un triangle ABC de base BC complété par un demi-cercle de diamêtre BC construit extérieurement. Quant à E_2 c'est le symétrique de E_1 par rapport à la droite BC.

EXEMPLE II. E_1 est la réunion de deux triangles isocèles ABC et $A_1 BC$ de base commune BC et contigus, la hauteur de $A_1 BC$ étant inférieure à celle de ABC. Quant à E_2, c'est le symétrique de E_1 par rapport à la droite BC.

On peut dire plus. Considérons une droite d'appui concluante $\Delta'\Delta$ de $E_1 \dot{+} E_2$. Nous avons rappelé [§ 2, (δ)] qu'elle porte au moins une corde ouverte de $E_1 \dot{+} E_2$ (appartenant à la frontière de $K(E_1 \dot{+} E_2)$). Appelons A_1, A_2 les extrémités d'une telle corde, A_1 appartenant à E_1, A_2 appartenant à E_2. Nous dirons que le plus petit des arcs $\widehat{A_1 A_2}$ de $f(E_1 \dot{+} E_2)$ est «attaché à $\Delta'\Delta$» et plus précisément, au segment rectiligne concluant $A_1 A_2$. Cet arc $\widehat{A_1 A_2}$ est formé d'un arc ouvert $\widehat{A_1 B}$ appartenant à $f(E_1)$ et d'un arc ouvert $\widehat{B A_2}$ appartenant à $f(E_2)$. Le point B, commun à la fermeture de ces deux derniers arcs appartient à $f(E_1) \cdot f(E_2)$ et à $f(E_1 \cdot E_2)$. Le Théorème VII nous a appris que la parallèle à $\Delta'\Delta$ menée par B ne touchait $E_1 \cdot E_2$ qu'en B et le Théorème VIII qu'elle était une droite d'appui intérieure de $E_1 \cdot E_2$. Mais considérons maintenant un point P de l'arc ouvert $\widehat{A_1 B}$ par exemple. Une droite d'appui de E_1 en P rencontre $\Delta'\Delta$ en un point Q. La droite d'appui de $\widehat{B A_2}$ issue de P, rencontre $\Delta'\Delta$ en R. La parallèle à $\Delta'\Delta$ menée par P est extérieure à l'angle $Q\widehat{P}R$ (angle qu'on pourrait appeller «*angle d'appui de* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$ *en* P»).

Cette propriété se conserve lorsque P tend vers le point B et l'on retrouve le Théorème VIII. Aussi peut-on énoncer cette proposition:

THÉORÈME X. *Soit* σ *un arc ouvert de* $\mathrm{f}(\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2)$ *entièrement contenu dans* $\mathrm{K}(\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2)$, *arc attaché à la droite d'appui coucluante* $\Delta'\Delta$ *pour* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$. *La parallèle à* $\Delta'\Delta$ *menée par un point quelconque* P *de* σ *est extérieure, au sens strict au faisceau des droites d'appui de* σ *passant par* P (1). *En d'autres termes l'angle d'appui en* P *est inférieur à* π.

Et on en déduit aisément que:

THÉORÈME XI. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la réunion* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *soit elle-même convexe est que, en tout point* B *de* $\mathrm{f}(\mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{f}(\mathrm{E}_2)$ *il passe une droite d'appui commune à* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$.

En effet, sur $f(E_1 \dot{+} E_2)$ on distingue les points situés sur $f[K(E_1 \dot{+} E_2)]$ en ces points passe évidemment une droite d'appui de $E_1 \dot{+} E_2$. Restent les points de $f(E_1 \dot{+} E_2)$ situés à l'intérieur de $K(E_1 \dot{+} E_2)$. Ils forment des arcs tels que l'arc σ du Théo-

(1) On mieux an faisceaux des droits d'appui issues de P des deux sous-arcs de σ d'extrémité commune P.

rème IX. Pour qu'en chacun de leurs points, P par exemple, il passe une droite d'appui de $(E_1 \dot{+} E_2)$ il faut et suffit que *l'angle d'appui* en P soit égal à π, ce qui ne saurait se produire que si celà arrive au point B de $f(E_1) \cdot f(E_2)$. La droite d'appui en question est commune à $E_1 \dot{+} E_2$ et à $E_1 \cdot E_2$.

7. *Critères de convexité de deux ensembles basés sur la considération de leur intersection et de leur réunion.*

Ce qui suit est très simplement suggéré par le fait que la convexité est une connexité particulière et par les propriétés communes aux ensembles connexes, locallement connexes, continus.

THÉORÈME XII. *Si la réunion et le pro- produit de deux ensembles* E_1 et E_2 *sont des corps convexes, les deux ensembles* E_1 et E_2 *sont eux-mêmes des corps convexes.*

Celà est banal si l'un contient l'autre. Soient les deux ensembles E_1 et E_2. Par hypothèse, $E_1 + E_2$ et $E_1 \cdot E_2$ sont des corps convexes.

Démontrons *par exemple,* que E_1 possède cette propriété. Et pour celà, considérons deux points quelconques P_1 et Q_1 de E_1. Il s'agit de prouver que tout point de segment rectiligne $P_1 Q_1$ appartient à E_1.

Trois cas peuvent se présenter:

1.°) P_1 et Q_1 sont des points de $E_1 \cdot E_2$

Alors, $P_1 Q_1$ appartiente à $E_1 \cdot E_2$, puisque ce produit est convexe par hypothèse $P_1 Q_1$ étant contenu dans une partie de E_1, est évidement contenu dans E_1.

2.°) On a, *par exemple,* la disposition suivante:

$$P_1 \text{ dans } E_1 \cdot E_2$$
$$Q_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

Puisque, par hypothèse, $E_1 \dot{+} E_2$ est convexe, le segment $P_1 Q_1$ appartient à $E_1 \dot{+} E_2$. Il reste à montrer que $P_1 Q_1$ ne saurait porter un point n'appartenant qu'à E_2, c'est-à-dire un point de $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Supposons, pour un instant, que celà puisse se produire et soit Q_2 un point de $E_2 - E_1 \cdot E_2$ porté par $\overline{P_1 Q_2}$. Le segment rectiligne $\overline{P_1 Q_2}$ ayant un point P_1 dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et un point Q_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$ a forcément un point P sur $E_1 \cdot E_2$ d'après le Théorème I. De l'hypothèse que $E_1 \cdot E_2$ est convexe, on déduit que le segment $P_1 P$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2$.

Or, Q_2 appartient à $\overline{P P_1}$ d'après notre supposition, donc, il appartient aussi à $E_1 \cdot E_2$, d'après ce qui précède. Celà est contraire à la seconde partie de notre supposition d'après laquelle Q_2 devrait appartenir à $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Ainsi se trouve démontré par l'absurde le fait que $\overline{P_1 Q_1}$ appartient tout entier à E_1.

3.°) Par hypothèse, nous posons cette fois, la double appartenance suivante:

$$P_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

et

$$Q_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

$P_1 Q_1$ appartient tout entier à $E_1 \dot{+} E_2$ qui, par hypothèse, est convexe. Supposons pour un instant que $P_1 Q_1$ porte un point Q_2 n'appartenant qu'à $E_1 - E_1 \cdot E_2$. D'aprés le Théorème I dans ce cas, $\overline{P_1 Q_2}$ et $\overline{Q_2 Q_1}$ portent chacun au moins un point de $E_1 \cdot E_2$.

Soient M un point de $\overline{P_1 Q_2}$ et N un point de $\overline{Q_1 Q_2}$ tous deux situés dans $E_1 \cdot E_2$. D'abord, Q_2 est porté par le segment $\overline{MN}$ et d'autre part, le produit $E_1 \cdot E_2$ étant convexe par hypothèse, il contient entièrement le segment MN.

Par conséquent, Q_2 appartient lui aussi à $E_1 \cdot E_2$ contrairement à la supposition qu'il n'appartient qu'à $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Cette contradiction démontre que $\overline{P_1 Q_1}$ appartient tout entier à E_1.

Aucun autre cas ne pouvant se présenter, le théorème est établi.

Il admêt, entre autres conséquences, celle-ci :

Corollaire. E_1 *et* E_2 *sont deux corps convexes à points intérieurs dont l'un* E_1 , *par exemple, contient l'autre* E_2. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\overline{E_1 - E_2}$ *soit aussi un corps convexe est que le produit de fermeture* $E_1 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ *soit un corps convexe.*

1.°) La condition est évidemment nécessaire.

En effet, supposons $\overline{E_1 - E_2}$ conveve. Son produit avec E_2, $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ est convexe.

2.°) La condition est suffisante.

En effet, supposons que $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ soit une figure convexe, évidemment sans points intérieurs.

Dans ce cas, la somme $E_2 \dot{+} (\overline{E_1 - E_2}) = E_1$ étant convexe ainsi que le produit $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$, il résulte du théorème précédent que E_1 et $\overline{E_1 - E_2}$ sont deux corps convexes.

Comme je l'ai indiqué au début de ce paragraphe il ne faut pas s'étonner du résultat précédent ni de sa simplicité, car les ensembles connexes, localement connexes continus jouissent d'une propriété analogue ([1]).

Je terminerai cet exposé par une question :

«Est-il possible caractériser *logiquement* une propriété qui, appartenant à la réunion et à l'intersection de deux ensembles, appartient, de ce fait, à chacun de deux ensembles ?

([1]) — I. Soient A et B deux ensembles fermés (ou deux ensembles ouverts). Si les ensembles $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ sont connexes, les ensembles A et B le sont aussi. Voir une note de S. Janizewski et C. Kuratowski. Fundamenta Mathematicae. Tome I (1920) Nouvelle Ed. 1937, P. 211, th. I.

Voir aussi C. Kuratowski, Topologie. Vol. II, Chap. V Par 41, II, p. 83.

II. A et B étant deux ensembles compacts tels que $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ soient des continus, A et B sont aussi des continus. (C. Kuratowski. Topologie, Vol. II, Chap. V, par. 42, p. 1[illegible]8).

III. A et B étant deux ensembles fermés tels que les ensembles $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ soient localement connexes; les ensembles A et B sont aussi localement connexes. (C. Kuratowski. Topologie. Vol. II, Chap. VI. Parag. 44 ; II, 10, p. 164).

Princípios fundamentais dos computadores digitais automáticos

por **A. César de Freitas**

(Conclusão)

4. Memória

A parte mais importante dum computador digital automático é, talvez, a sua memória, e a eficiência da máquina depende em grande parte da quantidade de informação que ela pode memorizar. Com efeito, como nos modernos computadores automáticos em geral há a necessidade de colocar na memória, logo de início, todos os números e instruções que conduzem à resolução dum problema de cálculo, se a capacidade dessa memória é pequena, a ordem dos problemas que podem ser tratados pela máquina é bastante limitada.

Toda a memória deve ter as três propriedades seguintes :

(1) Deve ser capaz de reter a informação durante o tempo que for necessário.