Observemos ainda que a definição (2) da função entropia é a definição de um *valor médio*, no caso sujeito o dos n números

$$-\log p_1, \cdots, -\log p_n$$

Por outro lado, prova-se em Cálculo das Probabilidades que, em certas situações, os valores que toma uma variável aleatória aproximam-se do valor médio dessa variável o suficiente para que, do ponto de vista experimental, os possamos com ele identificar.

Assim se esclarece, nas suas linhas gerais, a conexão entre a relação (17) de BOLTZMAN e a definição (2) da função entropia.

Contudo, foi a moderna teoria das telecomunicações e do controle automático que levou o cientista americano C. E. SHANON a introduzir a definição geral de entropia (*A mathematical theory of communication*, Bell System Techn. J., 27, 1948), criando-se assim um novo ramo do Cálculo das Probabilidades que se encontra em pleno desenvolvimento: a teoria da informação.

Princípios fundamentais dos computadores digitais automáticos

por ***A. César de Freitas***

O que vai seguir-se não é mais do que dissemos numa série de palestras feitas na Faculdade de Ciências de Lisboa em Dezembro de 1958 e destinadas a divulgar as ideias que estão na base dos mais poderosos meios de cálculo numérico actualmente existentes.

Nessas palestras procurou-se sempre apresentar os assuntos na sua forma mais elementar e sem entrar em aspectos técnicos, para que os princípios fundamentais fossem percebidos pelo maior número possível de ouvintes, a maioria deles inteiramente leigos na matéria. Esses princípios fundamentais, que como se verá são bastante simples, podem ser apreendidos sem grande dificuldade por qualquer pessoa com instrução equivalente à dos nossos cursos secundários.

Evidentemente que, apenas pela leitura destas palestras, ninguém fica apto a construir uma máquina calculadora electrónica por mais rudimentar que ela seja; o que se pretende é que elas permitam fazer uma ideia, mais ou menos precisa, da maneira como trabalha uma das maiores maravilhas inventadas pelo homem, cujas aplicações são cada vez maiores em quase todos os ramos da actividade humana. Por outro lado, para aqueles que tenham um interesse especial pelo assunto, julgamos ter apresentado os elementos suficientes à compreensão de obras mais especializadas. Principalmente para estes inserimos no final alguma bibliografia por ordem crescente de especialização.

1. Generalidades. As máquinas matemáticas podem classificar-se em *máquinas digitais* e *máquinas analógicas*. As primeiras trabalham por *contagem* de acontecimentos discretos, as segundas *medem* grandezas contínuas. Um exemplo de máquina digital é a máquina calculadora vulgar (manual ou eléctrica); a régua de cálculo é uma máquina analógica em que os números são representados por comprimentos.

Mais precisamente o termo *digital*, quando aplicado a uma máquina, implica mecanização das matemáticas dos problemas, uma vez esses problemas sejam postos na forma aritmética; o termo *analógico* implica uma semelhança de propriedades nos aspectos que interessam, e na máquina analógica a analogia baseia-se na identidade (ou semelhança) das equações matemáticas que traduzem as propriedades do sistema em estudo e as propriedades do sistema analógico. Por exemplo, para estudar as vibrações duma asa de avião pode-se analisar as oscilações de natureza absolutamente diferente dum *modelo* eléctrico (sistema analógico) verificando as mesmas equações matemáticas.

A precisão das máquinas analógicas é limitada pela precisão das medidas das grandezas físicas que nelas se consideram; pelo contrário, nas máquinas digitais a precisão em geral só é limitada pelo número de casas decimais que se queira conservar e por isso estas máquinas são em geral preferíveis e nalguns casos indispensáveis em cálculos científicos (1). As máquinas digitais são evidentemente as únicas empregadas em cálculos de tipo comercial (em bancos, companhias de seguros, etc.).

Vamo-nos referir apenas às máquinas calculadoras digitais automáticas chamadas universais devido à universalidade das suas aplicações — elas resolvem qualquer problema que se possa reduzir a uma sequência finita das operações elementares (adição, subtracção, multiplicação). Tais máquinas designam-se também por *computadores digitais automáticos universais.*

Apenas nos referiremos aos princípios fundamentais dessas máquinas sem entrar em quaisquer detalhes de ordem técnica. Veremos como a máquina efectua as operações, como recebe e trata as informações que lhe são dadas e finalmente como fornece os resultados que lhe são pedidos.

*

Nos computadores digitais automáticos universais distinguem-se em geral as seguintes partes principais

(1) A *memória*, onde se registam os números que vão ser usados nos cálculos, as instruções (ordens) para operar com esses números e os resultados que seja necessário registar.

(2) A *unidade aritmética*, onde se efectuam as operações.

(3) O *sistema de control* que controla a sequência de operações a efectuar pela máquina.

(4) A *via de entrada* e a *via de saída* (de informação) por onde a máquina recebe os dados numéricos e as instruções e fornece os resultados.

Quando se está a fazer um cálculo com uma máquina de calcular vulgar as tábuas e folhas de papel que se usam correspondem à memória, a máquina corresponde à unidade aritmética e o calculador ao sistema de control.

A memória do computador digital, qualquer que seja a sua estrutura física, está dividida em compartimentos em cada um dos quais se pode «escrever» um número (ou parte dum número) ou uma ou mais ordens. Ao conteúdo dum destes compartimentos chama-se um *termo*. Esta designação única, tanto para ordens como para números, justifica-se, como veremos depois, porque dentro da máquina tudo é representado da mesma maneira.

Na maioria dos computadores actualmente existentes os números são representados no sistema de base dois (sistema binário) fazendo-se então uso apenas dos algarismos 0 (zero) e 1 (um). Neste sistema o número $143 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$, por exemplo, representa-se por 10001111 que corresponde a $2^7 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$.

É fácil verificar as seguintes correspondências:

(1) Isto não significa que não existam certas situações em que sejam preferíveis máquinas analógicas.

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
$4 = 2^2$	100
5	101
6	110
7	111
$8 = 2^3$	1000
9	1001
10	1010
$16 = 2^4$	10000
$32 = 2^5$	100000
$0{,}5 = \frac{1}{2}$	0,1
$0{,}25 = \frac{1}{2^2}$	0,01
$0{,}75 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$	0,11
0,1	$0{,}0001100110011 \cdots$
$\frac{10}{16}$	0,101

A «tabuada» da adição no sistema binário é simplesmente

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

e a da multiplicação

$$\begin{aligned} 0 \times 0 &= 0 \\ 0 \times 1 &= 0 \\ 1 \times 0 &= 0 \\ 1 \times 1 &= 1 \end{aligned}$$

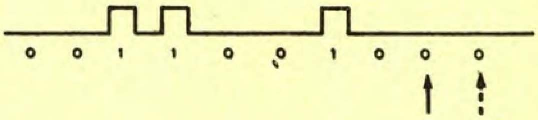
Para fazer uma soma de duas parcelas usam-se as tabelas seguintes:

$$\text{Tabela I} \rightarrow \begin{aligned} 0 + 0 &= 00 \\ 0 + 1 &= 01 \\ 1 + 0 &= 01 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{Tabela II} \rightarrow \begin{aligned} 0 + 0 + 0 &= 00 \\ 0 + 0 + 1 &= 01 \\ 0 + 1 + 0 &= 01 \\ 1 + 0 + 0 &= 01 \\ 0 + 1 + 1 &= 10 \\ 1 + 0 + 1 &= 10 \\ 1 + 1 + 0 &= 10 \\ 1 + 1 + 1 &= 11 \end{aligned}$$

Nestas tabelas o primeiro algarismo (a contar da esquerda) dos segundos membros das igualdades representa o transporte.

Nas máquinas a que nos estamos a referir toda a informação é transmitida e tratada na forma de grupos de impulsos eléctricos. Por exemplo, o número 100 (base dez) é representado pelo grupo



onde estamos a supor que a ausência de impulso representa zero e a presença representa um, e onde a seta a cheio indica o algarismo das unidades; se a posição das unidades correspondesse à seta a tracejado, então o grupo de impulsos figurado representaria o número 200.

É pois necessário distinguir entre os impulsos (ou ausência de impulsos) que representam os algarismos das diferentes ordens e isso pode fazer-se por dois processos: pode conseguir-se que o significado posicional dum impulso seja dado pelo fio em que ele viaja ou pelo instante em que ele ocorre. Esta distinção é fundamental e conduz a dois tipos de máquinas usualmente conhecidas por máquinas do *tipo paralelo* e por máquinas do *tipo série*. Nas primeiras os dígitos apresentam-se simultaneamente ao passo que nas segundas se apresentam em sucessão.

É interessante assinalar algo de semelhante ao que acabámos de referir e que se passa no nosso sistema nervoso. A informação transmite-se através dos nossos corpos na forma de cadeias de impulsos todos aproximadamente do mesmo tamanho. A grandeza do estímulo controla o número de impulsos que passam através duma fibra nervosa num certo intervalo de tempo mas a amplitude desses impulsos (cerca de 0,1 volts) e a sua velocidade (cerca de *320* Km/hora) são mais ou menos constantes. A distinção entre operações do tipo série e operações do tipo paralelo aparece também no sistema nervoso: nós ouvimos *simultaneamente* todos as componentes dum som, contudo só vemos distintamente uma pequena região de cada vez e para ver uma região maior temos que ver parte por parte e com as partes vistas «construir» o todo.

É em parte devido a estas semelhanças e a outras que apontaremos mais adiante, que muitas vezes se chama *cérebros electrónicos* aos computadores digitais automáticos e a outras máquinas afins. Deve-se porém evitar tal designação pois ela parece sugerir que a máquina pode actuar como o cérebro humano, o que não corresponde à realidade. A máquina simplesmente cumpre as ordens que o homem lhe dá e para que foi construida, mas é incapaz de reagir *conscientemente* a qualquer situação que não tenha sido prevista por quem a construiu. Note-se contudo que a máquina é capaz de fazer alguma cousa de que o homem não é capaz. Basta pensar que existem actualmente computadores digitais electrónicos que somam dois números com doze algarismos, no sistema decimal, em 20 micro-segundos, multiplicam esses mesmos números em 200 micro-segundos, calculam um seno, um cosseno, um logaritmo em 2,5 mili-segundos com erro inferior a 2^{-30}, etc.

A forma de representação dos números exige ainda que se fixe um intervalo a que eles terão de pertencer. Em muitas máquinas tudo se passa de modo que qualquer número x verifique a relação

$$-1 \leqq x < 1$$

e para trabalhar com números fora deste intervalo há que usar factores de redução apropriados.

É necessário ainda saber distinguir entre números negativos e positivos. Isso faz-se, em geral, substituindo os números negativos pelos complementos dos seus módulos. Para o caso duma máquina trabalhando no intervalo referido e em que se representem os números negativos, como os complementos para dois, dos seus módulos, o número $-0{,}75$ será representado por 1,01. Dum modo geral, em tal máquina, sempre que o primeiro dígito a contar da esquerda é um 0 trata-se dum número positivo; se esse digito é 1, trata-se dum número negativo.

Exemplifiquemos

(1) Se o número 0,2 for representado por 0,0011001100110 então o número $-0{,}2$ será representado por 1,1100110011010.

(2) O número negativo 1,110010001 corresponde a escrever $-1+0{,}110010001 =$ $= -0{,}001101111$.

É também

$$1{,}110010001 = 10 - 0{,}001101111$$

Ao dígito que está à esquerda da vírgula chama-se o *digito do sinal.*

A principal vantagem de usar a forma complementar para os números negativos reside no facto de as somas se fazerem sempre à maneira ordinária sem pensar nos sinais dos números.

2. Elementos de álgebra de Boole. Consideremos um conjunto apenas com dois elementos distintos que designaremos por 0 e 1.

Definamos neste conjunto uma «adição» fazendo corresponder a cada par de elementos do conjunto um elemento desse conjunto do modo seguinte

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=1$$

Nesta «adição» o resultado é 1 sempre que a primeira parcela é 1 *ou* a segunda parcela é 1; caso contrário o resultado é 0. Designaremos esta operação por *operação «ou»*.

Definamos uma segunda operação da forma seguinte

$$0\times 0=0$$
$$0\times 1=0$$
$$1\times 0=0$$
$$1\times 1=1$$

Nesta «multiplicação» o resultado é 1 se, e só se, o primeiro factor *e* o segundo factor são iguais a 1. Designaremos esta operação por *operação «e»*.

Vejamos dois exemplos.

(1) Suponhamos que se pretendia provocar uma explosão fazendo chegar ao explosivo sinais eléctricos de duas origens diferentes. Se um sinal vindo de qualquer das origens (ou de ambas ao mesmo tempo) for capaz de provocar a explosão trata-se duma operação *«ou»* (desde que se convencione representar por 1 a presença do sinal e da explosão); se, por motivos de segurança, a explosão só se der quando as duas origens enviem sinais simultâneamente, trata-se então da operação *«e»*.

(2) Em lógica simbólica pode dar-se a seguinte interpretação às operações definidas. Suponhamos que se convenciona escrever

$x=1$ com o significado *a proposição x é verdadeira*

$x=0$ com o significado a *proporção x é falsa*

A operação *«ou»* corresponde a uma proposição x_3, composição de x_1 e x_2, que é verdadeira quando e só quando x_1 ou x^2 (ou ambas) são verdadeiras; a operação *«e»* corresponde à proposição que é verdadeira se, e só se, x_1 e x_2 são verdadeiras.

É do caso do exemplo (2) que resulta chamar-se *disjunção* (ou *alternação*) à operação *«ou»* e chamar-se *conjunção* à operação *«e»*. Uma outra operação que vamos definir é a *operação de negação* pela qual se faz corresponder a cada elemento do conjunto o elemento diferente Designaremos esta operação por um traço sobre o elemento a que diz respeito

$$\overline{0}=1$$
$$\overline{1}=0$$

Tal como na álgebra ordinária, podem considerar-se variáveis $X, Y, Z, \cdots$ que tomam os valores no conjunto referido, e funções dessas variáveis por intermédio das operações definidas. Assim, quando escrevemos $Z=X+Y$ queremos dizer que $Z=1$ se $X=1$ *ou* $Y=1$ (ou ambas são iguais a 1); caso contrário $Z=0$. Do mesmo modo $Z=X\times Y$ ou $Z=X\,Y$ significa que $Z=1$ se $X=Y=1$; se isto não se verifica então é $Z=0$.

Das definições dadas obtém-se imediatamente que

$$\begin{array}{lll} X+0=X & X\times 0=0 & X+\overline{X}=1 \\ X+1=1 & X\times 1=X & X\overline{X}=0 \\ X+X=X & X\times X=X & \overline{\overline{X}}=X \end{array}$$

Tanto a operação *«ou»* como a operação *«e»* são comutativas (por definição) e associativas

$$\begin{array}{ll} X+Y=Y+X & XY=YX \\ (X+Y)+Z=X+(Y+Z) & (XY)Z=X(YZ) \end{array}$$

Tem-se ainda

$$(1)\qquad \begin{array}{l} X(Y+Z)=X\,Y+XZ \\ X+YZ=(X+Y)(X+Z) \\ \overline{XYZ}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z} \\ \overline{X+Y+Z}=\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \end{array}$$

Para o verificar basta, em cada caso, substituir X, Y, Z pelos seus valores possíveis.

Consideremos agora as funções S e T definidas do modo seguinte

$$(2) \qquad \begin{cases} S = X\overline{Y} + \overline{X}\,Y \\ T = X\,Y \end{cases}$$

e vejamos os valores que elas podem tomar para os possíveis pares de valores de X e Y. Virá

X	Y	T	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabela III

que corresponde precisamente à tabela I, se considerarmos que os símbolos da tabela anterior são os números zero e um.

As expressões (2) podem escrever-se nas formas seguintes

$$(3) \qquad \begin{cases} S = (X+Y)\,(\overline{X} + \overline{Y}) \\ T = \overline{\overline{X} + \overline{Y}} \end{cases}$$

e

$$(4) \qquad \begin{cases} S = (X+Y)\,\overline{XY} \\ T = XY \end{cases}$$

e seria fácil arranjar outras maneiras de representar as mesmas funções. Para verificar que (3) e (4) equivalem a (2) pode reproduzir-se a tabela III a partir dessas expressões ou aplicar as igualdades (1) por forma apropriada.

Consideremos ainda as seguintes funções de três variáveis

$$(5) \quad \begin{cases} S = XYZ + \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} \\ T = X\,Y + XZ + YZ \end{cases}$$

e construamos uma tabela dos seus valores para os ternos possíveis de valores de X, Y, Z. Obtem-se

X	Y	Z	T	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabela IV

Se considerarmos os símbolos desta tabela como os números zero e um, reconhece-se imediatamente que ela corresponde à tabela II.

As expressões (5) podem apresentar-se com formas equivalentes diversas.

Assim, por exemplo,

$$(6) \quad \begin{cases} S = (X+Y+Z)\,(\overline{T} + XYZ) \\ T = X\,Y + XZ + YZ \end{cases}$$

e

$$(7) \quad \begin{cases} S = [(X\overline{Y} + \overline{X}\,Y) + Z]\,(X\,Y + \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{Z}) \\ T = (X\overline{Y} + \overline{X}\,Y)\,Z + X\,Y \end{cases}$$

3. Circuitos básicos

(*a*) *Circuito de coincidência* (ou circuito «*e*»), é um circuito que executa a operação «*e*» (conjunção). Este circuito está esquematizado na Fig. 1 para o caso de ser constituido por electro-imans

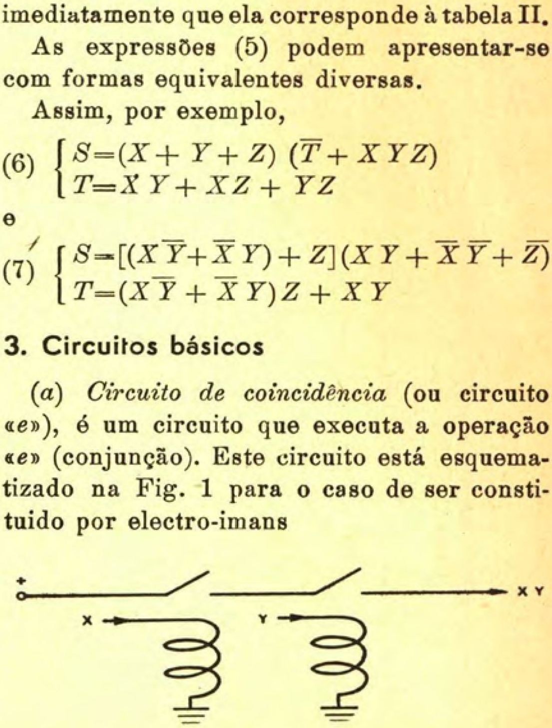


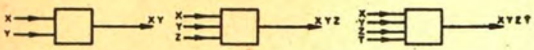
Fig. 1

Há dois terminais de entrada (X e Y) e um terminal de saída. Sempre que há um sinal eléctrico em X ($X=1$) a armadura do respectivo electro-íman é atraida e se ao mesmo tempo houver um sinal em Y ($Y=1$) obtem-se um sinal no terminal de saída ($XY=1$).

Se em X passar corrente enquanto em Y circulam os impulsos correspondentes a um número, no terminal de saída reproduz-se o número ($1 \times Y = Y$).

Evidentemente que pode haver um circuito de coincidência com mais terminais de entrada.

Representaremos circuitos de coincidência do modo seguinte



com dois, três e quatro terminais de entrada respectivamente.

(*b*) *Circuito disjuntivo* (circuito «*ou*» ou *circuito de alternação*) é um circuito que executa a operação «*ou*» e que está esquematizado na Fig. 2.

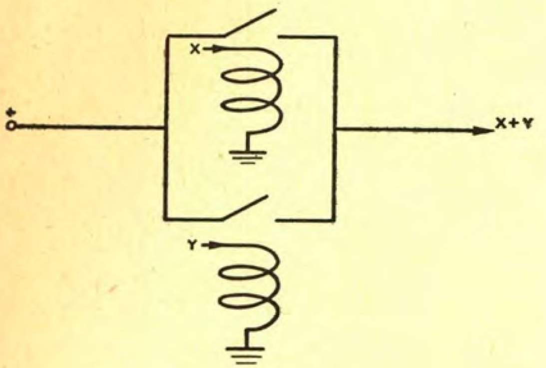
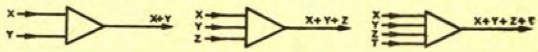


Fig. 2

Sempre que há um sinal em qualquer dos terminais de entrada X ou Y obtem-se um sinal no terminal de saída. Também um circuito deste tipo pode ter vários terminais de entrada.

Representaremos estes circuitos do modo seguinte



com dois, três e quatro terminais de entrada.

(*c*) *Circuito inversor* (circuito de negação).

Neste circuito — Fig. 3 — há um terminal de entrada e um terminal de saída

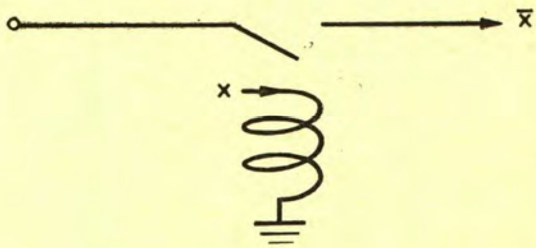
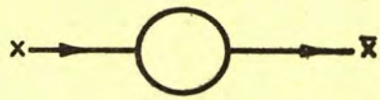


Fig. 3

Representaremos um circuito deste tipo por



É fácil reconhecer que com circuitos dos tipos (*a*) e (*c*) se pode construir um circuito do tipo (*b*). Para isso basta notar que $X+Y=\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$ e portanto o circuito seguinte satisfaz

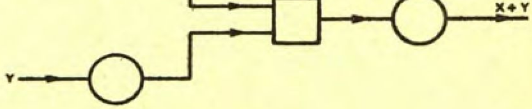


Fig. 4

De modo análogo se poderia construir um circuito do tipo (a) usando circuitos do tipo (b) e (c). Basta notar que $X\,Y = \overline{\overline{X} + \overline{Y}}$.

Nos circuitos referidos estamos a supor que a existência dum sinal em qualquer das terminais significa 1 e a ausência de sinal significa 0. Se porém fizermos a convenção contrária, isto é, se a presença de sinal significar 0 e a ausência significar 1, o circuito da Fig. 1 passará a ser um circuito «*ou*» e o da Fig. 2 um circuito «e».

Vamos agora indicar alguns circuitos que se obtém por combinação dos anteriores e que utilisaremos nos parágrafos seguintes.

(d) *Circuito bi-estável* (bi-vibrador, «flip-flop»). Neste circuito, como o próprio nome indica distinguem-se dois estados. Pode ser constituído do modo seguinte

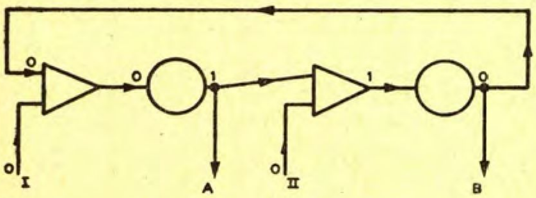
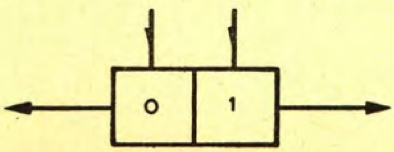


Fig 5

Tal como está indicado na figura, no terminal A tem-se sempre 1 e no terminal B tem-se sempre 0; este facto caracteriza um dos estados do circuito (onde supomos que não há qualquer sinal nos terminais I e II). Suponhamos que chega um impulso ao terminal I. Vê-se imediatamente que no terminal A passa a ter-se 0 e no terminal B passa a ter-se 1, mantendo-se este outro estado do circuito até que chegue um outro impulso ao terminal II.

Representaremos este circuito por



(e) *Semi-somador* — é um circuito que tem dois terminais de entrada e dois terminais de saída que correspondem aos valores S e T seguintes

$$(1) \qquad \begin{cases} S = X\,\overline{Y} + \overline{X}\,Y \\ T = X\,Y \end{cases}$$

onde X e Y se referem aos terminais de entrada. As expressões anteriores são as expressões (2) do parágrafo 2, e correspondem ao circuito

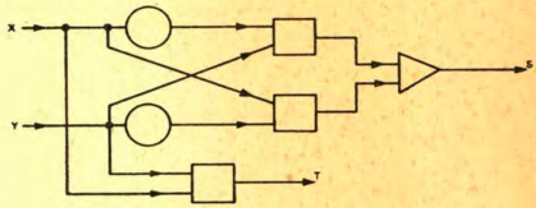


Fig. 6

Qualquer circuito correspondente a expressões equivalentes a (1) é um circuito que executa as mesmas funções mas com outro arranjo de componentes. Assim o semi-somador correspondente às expressões (4) do parágrafo 2 será

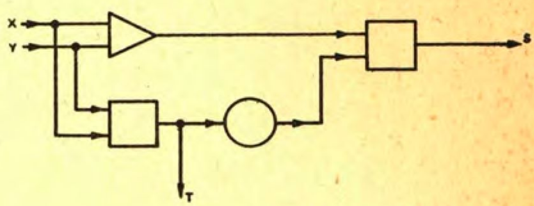
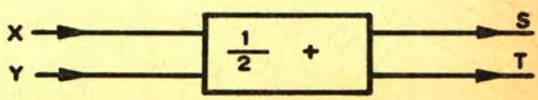


Fig. 7

Representaremos um semi-somador por



(*f*) *Somador* — É um circuito com três terminais de entrada — X, Y, Z — e dois terminais de saída — S, T — que corresponda às funções (5) do parágrafo 2, ou a quaisquer expressões equivalentes a essas.

O somador correspondente às expressões (6) do parágrafo 2 será

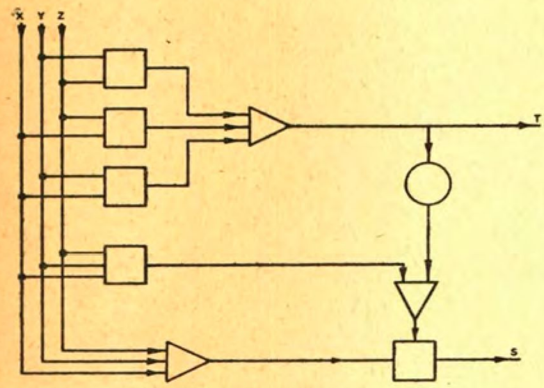


Fig. 8

Pode também obter-se um somador, a partir de dois semi-somadores do modo indicado na Fig. 9.

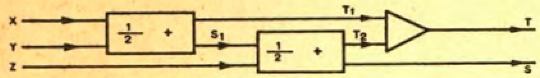


Fig. 9

Para o verificar pode usar-se o seguinte método (analítico):

$$\begin{aligned} S &= Z\bar{S}_1 + \bar{Z}S_1 = Z(\overline{X\bar{Y} + \bar{X}Y}) + \bar{Z}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) \\ &= Z(\overline{X\bar{Y}}\;\overline{\bar{X}Y}) + \bar{Z}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) \\ &= Z[(\bar{X} + Y)(X + \bar{Y})] + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \\ &= Z(XY + \bar{X}\bar{Y}) + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \end{aligned}$$

ou seja

$$S = XYZ + X\bar{Y}\bar{Z} + Y\bar{X}\bar{Z} + Z\bar{X}\bar{Y}$$

que é precisamente a primeira das expressões (5) do parágrafo 2.

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= XY + Z(X\bar{Y} + Y\bar{X}) \\ &= XY + ZX\bar{Y} + Y\bar{X}Z \\ &= XY + ZX\bar{Y} + Y\bar{X}Z + XYZ + XYZ \end{aligned}$$

porque

$$XY + XYZ = XY$$

Vem então

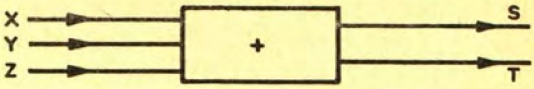
$$T = XY + XZ(Y + \bar{Y}) + YZ(X + \bar{X})$$

ou seja

$$T = XY + XZ + YZ$$

que é a segunda das expressões (5) do parágrafo 2.

Representaremos um somador por



As designações de semi-somador e somador dadas aos circuitos (*e*) e (*f*) serão justificadas mais adiante.

Todos os circuitos a que acabámos de fazer referência podem ser construídos com válvulas electrónicas, transistores, materiais magnéticos, etc.

(Continua)