MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência.

5025 — 1) Estude a série $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Calcule, com erro inferior a $0,01$, a soma da série que se obtém fazendo $x = 1/2$.

5026 — 2) Sejam A, B, C as imagens das raízes cúbicas de um complexo z e seja $[A' B' C']$ o triângulo que se obtém de $[A B C]$ por uma rotação de $+30°$ em torno do centro.

Qual o complexo cujas raízes cúbicas são representadas por $A' B' C'$? Justifique.

5027 — 3) Demonstre que toda a sucessão monótona tem limite.

Seja $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a^n + \cdots$ uma série de termos alternadamente positivos e negativos com $a^{n+1} < a^n$ e $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Pondo $s^n = q_1 - q^2 + \cdots + (-)^{n-1} q^n$ mostre que $s^1, s^3, \cdots, s^{2n-1}, \cdots$ e $s^2, s^4, \cdots, s^{2n}, \cdots$ são sucessões monótonas com o mesmo limite e conclua daí a natureza da série dada.

5028 — 4) Que valores pode tomer o expoente β para que a série $\sum \frac{n\beta}{n^2(n+1)}$ seja convergente? Ache a soma da série quando $\beta = 1$.

5029 — 5) Sabe-se que a sucessão u_n tem uma infinidade de termos posivos e uma infinidade de termos negativos. Pode a sucessão ser convergente? Qual será nesse caso o limite de $(1 + u_n)\, 1/u_n$? Justifique.

5030 — Seja C o conjunto plano formado pelas imagens dos complexos Z tais que $|Z|\, C\, 1$. Quais o ponto de acumulação deste conjunto? Qual o fecho de C? Qual o complementar de C em relação a todo o plano?

5031 — Se u_n e v_n são sucessões convergentes para o mesmo limite e $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, que sabe de w_n?

Calcule $\lim_{n\to 8} \sqrt[n]{\log n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \log n}$ e deduza daí o valor de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n!}$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de Frequência — 1. cad. — 2-2-1959.

I

5032 — Considere a correspondência do conjunto de números reais $\{x / 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ em si, estabelecida pela função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ e verifique:

1) Se se trata duma aplicação daquele conjunto sobre si;

2) Se se trata duma aplicação biunívoca.

Determine ainda:

3) $f^{-1}(A)$, sendo $A = \{x / 0 \leqslant x \leqslant 1/2\}$.

II

5033 — Prove, utilizando o método de indução que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 .$$

III

5034 — Prove que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

IV

5035 — No espaço linear a 3 dimenssões, represente os vectores dum plano (subespaço linear a 2 dimensões) contendo o vector $\{1, 0, 2\}$ e os pontos $A(0, 1 0)$ e $B(1, 0, 0)$.

V

5036 — Resolva e diga o que representa o sistema

$$\begin{cases} 3x+5y+z=-1 \\ x+y+2z+t=1 \\ 2x+z-t=4 \\ 2y+3z+3t=-2 \\ 3x+y+3z=5 \end{cases}$$

VI

5037 — Prove que, se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, para todos o $\varepsilon > 0$, existe função poligonal $\varphi(x)$, tal que

$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$, para todo o $x \ni [a,b]$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 19-2-1958.

I

5038—1) Considere os conjuntos $X\{(0,2);3;(4,7)\}$ e $Y\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ e responda às seguintes perguntas:

a) Interior e fronteira de X e Y.

b) Pontos de acumulação de X e Y. Os conjuntos são fechados?

c) Limites de Weierstrass de X e Y.

d) $X \cup Y$ e $X \cap Y$.

2) Demonstre que todo o número complexo (não nulo) tem n raízes distintas de índice n.

II

5039 — Escrevendo o polinómio $f(z)$ na forma $\varphi(z^2)+z\,\psi(z^2)$, mostre que o resto da divisão de $f(z)$ por z^2-a é $\varphi(a)+z\,\psi(a)$.

Aproveite a mesma decomposição para provar que, em polinómio real, raízes imaginárias, se as há, são conjugadas duas a duas.

Seja $g(z)$ o transformado em $\frac{1}{z}$ de $f(z)$ e admita que $g=\lambda f$ (λ constante). Mostre que, nestas condições, $p_k=\lambda\,p_{n-k}$ e $p_{n-k}=\lambda\,p_k$ $(k=0,1\cdots n)$ e conclua seguidamente que λ só pode tomar os valores ± 1.

III

5040 — Defina produto de duas matrizes e descreva o processo de multiplicação por partes. Sendo A diagonal, provar que $AB=BA$ se B é quadrada e A, além de diagonal, é escalar.

Utilize o teorema de Rouché para achar a condição a que devem satisfazer α e β por forma que o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ x+y-z&=0 \\ x+3y+3z&=0 \\ 6x+\alpha y+\beta z&=1 \end{aligned}$$

seja: *a*) possível, *b*) impossível.

Se o sistema $a_i^\alpha x_\alpha = 0$ $(i=1,\cdots n)$ é simplesmente indeterminado, mostre que os complementos algébricos das linhas de $|a_i^k|$ são proporcionais.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 20-3-1959.

I

5041 — 1) Dado o conjunto X, infinito e limitado, demonstre qne ele admite um primeiro ponto de acumulação.

Em que condições admite X mínimo?

Sendo X' o conjunto dos pontos de acumulação de X mostre que a união $X \cup X'$ é conjunto fechado.

2) Utilize as fórmulas de Girard para provar que é nula a soma dos produtos k a k das raízes índice n de um número complexo $(k<n)$.

II

5042 — 1) Sejam A e B dois polinómicos com divisor comum. Prove que se tem $AV=BU$ com dois polinómios U e V, primos entre si, inferiores em grau a A e B, e recìprocamente.

Se V divide A demonstre que, então também UV divide A.

2) Para o polinómio $f(z)=6z^4-16z^3-3z^2+$ $+12z+1$, indique, caso existam, ós valores racionais de h que anulam o quarto termo de $f(z+h)$.

III

5043.— Seja $A=|a_i^k|$ $(n \times n)$ uma matriz simétrica. Defina termos, par e impar, da matriz e verifique que o determinante $|A|$ se não altera se multiplicarmos cada elemento a_i^k por l^{k-i} $(l \neq 0)$.

Supondo $|A|=0$, prove que, então, o anulamento do complemento algébrico do elemento a_r^r arrasta o anulamento dos complementos algébricos dos restantes elementos contidos na linha r e coluna r.

Mostre que há sempre constantes $\lambda_1\cdots\lambda_n$, não conjuntamente nulas, que fazem $\lambda^i a_n^i = |A|$ $(i=1,2,\cdots n)$. Indique-as.

Fernando de Jesus

ALGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — ALGEBRA SUPERIOR — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 20-2-59.

5044 — 1) Mostre que num semi-grupo em que existe um elemento a que é divisor direito e esquerdo, qualquer elemento tem identidade.

5045 — 2) Mostre que se existe um homomorfismo $x \to f(x)$ de $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}'$ se tem

$$f^{-1}(A'B') = f^{-1}(A') \cdot f^{-1}(B')$$

e

$$f^{-1}(A'^{-1}) = f^{-1}(A')^{-1}$$

Conclua que a imagem completa e inversa de um subgrupo de $\mathfrak{g}'$ é um subgrupo de $\mathfrak{g}$.

5046 — 3) Um anel em que todo o elemento é idempotente é de característica 2 e comutativo.

5047 — 4) O domínio operatório Ω de um grupo $\mathfrak{g}$ é um grupo. Seja ε a unidade de Ω, todo o elemento é o produto

$$x = x\,\varepsilon \cdot (x^{-1}\,\varepsilon\, x)$$

de dois elementos num dos quais ε dá o endomorfismo nulo e noutro a identidade.

Tiago de Oliveira

F. C. L. — ALGEBRA SUPERIOR — 1.º exame de frequência — (2.ª chamada) — 27-2-59.

5048 — 1) Seja $\mathfrak{S}$ um subconjunto de um grupo $\mathfrak{g}$ tal que $x\,\mathfrak{S}\,x^{-1} \leqslant \mathfrak{S}$ qualquer que seja $x \in \mathfrak{g}$. Mostre que o subgrupo gerado por $\mathfrak{S}$ é um invariante,

5049 — 2) Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto, $\mathfrak{A}$ um anel e $\mathfrak{F}$ a família de todas as operações f de $\mathfrak{S}$ em $\mathfrak{A}$, definamos em $\mathfrak{F}$ soma e produto de duas aplicações f_1 e f_2 por:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Verifique que $\mathfrak{F}$ é um anel. Em que condições $\mathfrak{F}$ é comutativo?

5050 — 3) Mostre que se $\mathfrak{g}$ é um quase-grupo de operação $a \cdot b$ a solução da equação $a\,x = b$ define univocamente uma função $r(a_1 b)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ com respeito a operação $r(a_1 b)$ é ainda um quase-grupo.

5051 — 4) Seja E um endomorfismo Ω do grupo $\Omega - \mathfrak{g}$. Mostre que a totalidade dos endomorfismos tais que $x\,E = x$ forma um subgrupo Ω. Tal subgrupo Ω é um invariante Ω se só se E é normal.

Tiago de Oliveira

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — ANALISE SUPERIOR — 1.º exame de frequência — (2.ª chamada) — 6-3-59.

I — Teoria

5052 — 1) Defina substituição linear entre duas variáveis complexas e indique, justificando, o seu significado geométrico no caso mais geral.

5053 — 2) Escreva a fórmula do integral de CAUCHY indicando o significado das letras que nela figuram e deduza a partir dela um limite superior do módulo das derivadas da função $f(a)$ por aquela fórmula definida.

5054 — 3) Séries de FOURIER no campo imaginário; definição e indicação da sua região de convergência e condições a que, em tal região, deve satisfazer uma função para que tal desenvolvimento lhe seja aplicável.

II — Prática

5055 — 1) Considere a equação diferencial

$$y'^2 + 2x^3 y' = 4\,x^2 y\,.$$

a) Integral geral.

b) Integral singular.

c) Condição a impor às coordenadas α e β do ponto $P(\alpha, \beta)$ para que nele passem curvas integrais da equação com a mesma direcção; equação da respectiva tangente, tomando $\alpha = 1$.

5056 — 2) Considere a transformação de z em Z definida pela igualdade

$$Z = \frac{\alpha - iz}{iz - 1}$$

a) Determine α de modo que $z = \frac{1-i}{2i}$ seja um ponto fixo da transformação, único.

b) Decomponha aquela transformação (com o valor de α calculado) em transformações elementares e opere a inversão que entre elas se contem na família de rectas de equação $ax + by = 1$, relacionando a e b prèviamente, de modo que as figuras transformadas dessas rectas sejam igualmente rectas.

H. Meneses

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — 1.ª Frequência — 1958-59 — (1.ª chamada) 20-1-59.

Teoria

5057 — Expressão de um vector em função linear de outros.

5058 — Momento de um vector em relação a um eixo. Sua expressão como produto misto. Deduzir das propriedades do produto misto as condições de anulamento do momento.

5059 — Sistema de vectores localizados de automomento nulo.

Prática

5060 — Considere a superficie de equação vectorial.

$$P = 0 + \alpha \cos \beta\, \bar{e}_1 + \alpha \operatorname{sen} \beta\, \bar{e}_2 + \beta\, \bar{e}_3 .$$

Diga que linhas se obtém, fazendo separadamente α e β constantes. Equação do plano tangente num ponto genérico. Escreva a equação vectorial do l. g. dos pontos da superfície tais que o plano tangente à superfície nesses pontos contenha a origem.

5061 — Considere o sistema de vectores formado por

$$\bar{v}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \qquad \text{aplicado em A } (4, -2, 2)$$
$$\bar{v}_1 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \qquad « \quad « \text{ B } (0, \; 2, 0) .$$

Verifique que se trocarmos o ponto de aplicação dos vectores se obtém um sistema equivalente ao primeiro.

Achar o l. g. dos pontos que gozam da propriedade de, trocando os pontos de aplicação dos vectores, se obter um sistema equivalente supondo o ponto B desconhecido.

F. C. L. — Mecânica Racional — 1.ª Frequência — 1958-59 — (2.ª chamada) — 27-1-59.

Teoria

5062 — Produto misto de 3 vectores: suas propriedades.

5063 — Operações elementares da teoria dos vectores localizados sobre rectas. Equivalência dos sistemas de vectores localizados que resulta de aplicar essas operações a um sistema dado.

5064 — Sistemas de vectoores localizados equivalentes a um vector único.

Prática

5065 — Determine a equação vectorial da tangente à linha

$$P = 0 + \lambda\, \bar{e}_1 + (\lambda^2 - 2\lambda + 5)\, \bar{e}_2$$

no ponto correspondente a $\lambda = 2$.

Designe por A e B os pontos de encontro dessa tangente com e eixo dos XX e dos YY respectivamente e determine para que pontos P da linha dada a soma dos vectores $B - A, B - P$ é perpendicular à perpendicular à recta

$$Q = 0 + k\,(4\,\bar{e}_1 - \bar{e}_2) .$$

5066 — O sistema de vectores localizados sobre rectas tem por coordenadas vectoriais em relação à origem

$$\bar{R} = \bar{e}_1 - 2\,\bar{e}_2 + 3\,\bar{e}_3 \qquad \text{e} \quad \bar{G}_0 = 4\,\bar{e}_1 - 2\,\bar{e}_2 - 3\,\bar{e}_3 .$$

a) Determinar um sistema equivalente ao sistema dado formado por 2 vectores $\bar{u}$ e $\bar{v}$, o vector perpendicular à recta

$$P = 0 + \bar{e}_1 + \lambda\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) .$$

b) Suponha no problema da alínea anterior que o módulo do vector $\bar{u}$ é igual a a. Estude a possibilidade do problema para todos os valores de a.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — 1.º exame de frequência – (1.ª chamada) — 14-2-59.

5067 – 1) Supondo n fixo, considere ${}_nC_k$ como função de k, $f(k)$.

Se $n = 2m$, prove que $f(k)$ se torna máxima para $k = m$ e se $n = 2m + 1$ prove que $f(k)$ se torna máxima para

$$k = m \text{ e } k = m + 1 .$$

5068 — 2) Supondo conhecida a fórmula de Bayer, caso particular da fórmula de Bayer-Laplace, quando as probabilidades directas $r\,t = s$, deduza a fórmula correspondente relativa à probabilidade do acontecimente futuro.

5069 – 3) São dadas as urnas $U_1(2,1)$ $U_2(2,1)$ $U_3(2,1)$ e $U_4(3,2)$. Escolhe-se ao acaso uma das urnas, transfere-se ao acaso uma esfera da urna escolhida para uma das 3 urnas restantes escolhida ao acaso, e por fim, extrai-se ao acaso uma esfera da urna para a qual se faz a transferência.

Calcule a probabilidade de que a esfera extraída seja do 1.º tipo.

5070 — 4) Prove que

$$n! \cdot > c \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}$$

sendo $c = \sqrt{2}\,\pi$.

5071 – 5) Dois jogadores A e B disputam ao acaso um jogo que consiste de partidas consecutivas em cada uma das quais A faz o lançamento casual e simultâneo de duas moedas perfeitas e B faz o lançamento casual e simultâneo de 3 moedas perfeitas. Ganha a partida quem lançar maior número de casas do que o adversário, e ganha o jogo quem ganhar uma partida. Supondo que o número de partidas não pode exceder um valor pré-fixado n, calcule as probabilidades de que A ganhe o jogo e de que B ganhe o jogo e determine o limite excedente duma probabilidade.

5072 – 6) Use a desigualdade de Lyapounoff para provar que sendo μ_s o momento absoluto de ordem s da variável casual e $a \geqq c \geqq 0$ se verifica a desigualdade

$$\mu^3_{\frac{a+2c}{3}} \leqq \mu_a \cdot \mu_c^2 .$$

5073 – 7) Calcule o valor médio quadrático da variável casual que tem como valores possíveis as somas dos números de pontos que podem sair num lançamento casual e simultâneo de n dados perfeitos.

5074 – 8) Supondo que a função geratriz dos momentos de uma variável casual tem uma derivada de ordem (positiva) para a qual se anule na origem, mostre que a variável em questão é degenerada na constante zero.

P. Braumann

ASTRONOMIA E MECÂNICA CELESTE

F. C. L. — 1.ª Frequência de Astronomia — 1958-59 (1. chamada) — 30-1-59.

Teoria

5075 — O que é a Rádio-astronomia?

5076 — Qual é a constituição dos anéis de Saturno? Porquê?

5077 — O que entende por paralaxe solar?

5078 – Os meteoros descrevem órbitas bem difinidas no sistema solar? Justifique a resposta.

5079 — Mostre porque é que um erro cometido na determinação da paralaxe dum astro afecta o conhecimento da sua distância à Terra.

5080 — Porque é que se adopta para unidade astronómica de medida a distância da Terra ao Sol.

5081 – O processo trigonométrico pode-se utilizar sempre para a determinação das paralaxes das estrelas? Porquê?

5082 — Defina estrela variável irregular. Indique a importância de algumas destas estrelas.

5083 — As nebulosas planetárias são visíveis à vista desarmada? Porquê?

5084 – A designação estrelas de rádio é apropriada? Porquê?

5085 — O zenite e o nadir geocêntrico tem interesse no estudo do movimento das estrelas? Justifique a resposta.

5086 — As coordenadas equatoriais absolutas dependem da posição dos equinócios? Porquê?

5087 — Existindo um erro *dz* no valor do ângulo horário de Cyrius, mostre em que posições esse erro afecta menos a determinação do tempo sideral.

5088 — Todos os problemas de transformação de coordenadas se podem resolver gràficamente? Porquê?

5089 — Existem alguns lugares da Terra para os quais o Sol é uma estrela de elongação? Justifique a resposta indicando, no caso afirmativo, quais são.

Prática

5090 — As coordenadas eclípticas de um objecto são:

$$\beta = 34^\circ\ 52'\ 17''.\ 8$$
$$\lambda = 300^\circ\ 10'\ 12''.\ 5.$$

Trabalhe com $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 15''.\ 83$. Determine as coordenadas equatoriais absolutas. Resolução gráfica e analítica.

5091 — Dado um lugar de latitude

$$\varphi = 40^\circ\ 32'\ 12''.\ 4\ \text{Sul},$$
$$\alpha = 70^\circ\ 45'\ 47''.\ 6,$$
$$\delta = -15^\circ\ 34'\ 52''.\ 4,$$

determine o azimute no ocaso e o ângulo horário no nascimento.

R. Vicente

F. C. L. — 1.ª Frequência de Astronomia — 1958-59 (2. chamada) — 6-2-59.

Teoria

5092 — Porque é que se classifica Plutão como um planeta?

5093 — Um comete pode-se confundir com uma nebulosa galáctica? Porquê?

5094 — Qual o melhor método para determinar a paralaxe solar? Porquê?

5095 — A Lua tem atmosfera? Porquê?

5096 — Pode-se determinar a paralaxe geocêntrica de um meteoro? Justifique a resposta.

5097 — Sabendo-se que existe um erro *dp* na determinação da paralaxe de uma estrela, deduza o erro que provem para a distância da estrela, expressa em parsecs.

5098 — O que é um binário de eclipse? Porque é que se podem observar esses binários?

5099 — O que é uma variável cefeide? Indique qual a importância destas estrelas nos estudos gláctícos.

5100 — As Núvens de Magalhães pertencem à nossa galáxia? Porquê?

5101 — Em que consiste a teoria do estado estacionário do Universo?

5102 — O instante em que um observador vê o nascimento do planeta Júpiter depende da posição do horizonte racional do observador? Porquê?

5103 — As coordenadas horizontais dependem da latitude geográfica do observador? Justifique a resposta.

5104 — As coordenadas eclípticas de uma estrela são sempre independentes do tempo? Porquê?

5105 — Pode-se passar directamente das coordenadas horizontais para as coordenadas eclípticas? Justifique a resposta.

5106 — Conhecendo-se as coordenadas equatoriais absolutas de uma estrela e determinando-se pela observação a sua distância zenital, pode-se determinar, sem ambiguidade, o seu ângulo horário? Justifique a resposta.

R. Vicente

F. C. L. — Mecânica Celeste — 1.º exame de frequência — 1958-1959.

Responda apenas a três questões, uma pelo menos do grupo I.

GRUPO I

5107 — 1 — *a*) Energia potencial dum sistema de n pontos materiais atraindo-se mutuamente segundo a lei de Newton: definição e significado mecânico.

b) Equações diferenciais do movimento absoluto do sistema dos n pontos, em coordenadas cartesianas. Seus integrais primários.

c) Redução do estudo do movimento dos centros de massa dos astros do sistema solar ao caso considerado na alínea anterior.

5108 — 2) O problema dos dois corpos:

a) Enunciado do problema e equações diferenciais do movimento.

b) Mostre que o movimento de qualquer dos corpos é uma cónica de que o outro ocupa um dos focos e determine essa cónica.

Caso da cónica ser uma elípse: lei do movimento sobre a trajectória.

c) O problema dos dois corpos e as leis de Kepler.

GRUPO II

5109 — 1 — *a*) Indique como a partir das leis de Kepler é natural concluir que os planetas se movem sob a acção de forças que os atraem para o Sol e cujos módulos variam na razão inversa do quadrado da distância ao Sol.

b) Um ponto material está sujeito à acção de uma força central sendo a lei de força da forma

$$F=\frac{A+B\cos 2\theta}{r^2}$$

com A e B constantes e tendo θ e r o significado habitual (coordenadas polares).

Mostre que, quaisquer que sejam as condições iniciais, a trajectória do ponto é uma curva algébrica de 4.ª ordem, a não ser que $B=0$ em que tal trajectória será uma cónica.

5110 — 2 — *a*) Potencial newtoniano dum sistema material contínuo num ponto exterior.

b) Calcular a força do campo newtoniano devido a um cilindro circular recto homogéneo (altura a e raio da base b) num ponto exterior do eixo, à distância c duma das bases.

5111 — 3) Elementos de órbita no caso do problema dos dois corpos (movimento relativo).

Integrais gerais das equações do movimento elíptico tomando os elementos de órbita como constantes arbitrárias.

César de Freitas

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo Numérico, Mecanico e Gráfico — **Exame de frequência — 1958-1959.**

5112 — 1) Mostre que não excede 5×10^{-5} o valor absoluto do erro que vem para o valor de

$$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{51}{x}\right)$$

quando calculado a partir do valor aproximado $x=7{,}14$.

(Os coeficientes da expressão de y são números exactos).

5113 — 2) Resolver pelo método de relaxação o sistema

$$\begin{cases}20x-4y+z-t-1{,}2=0\\2x-20y-4z-2t+1{,}5=0\\3x-y+20z-3t+2{,}3=0\\2x+3y-5z-20t-1{,}0=0\end{cases}$$

obtendo os valores das incógnitas com duas casas decimais.

5114 — 3) Construir um ábaco cartesiano rectilíneo para representar a relação (entre quatro variáveis)

$$AB^2=m+2n+1\,.$$

Indicar o modo de utilizar o ábaco.

5115 — 4) Prepare os elementos necessários à construção dum ábaco de pontos alinhados para representar a relação

$$\frac{1}{u^2}+\frac{2}{v}=\frac{1}{t^3}$$
$$0<u<5$$
$$0<v<10$$

e indique resumidamente como faria a sua construção.

Pretende-se desenhar o ábaco numa folha de papel de $30^{cm}\times40^{cm}$.