

PROBLEMAS PROPOSTOS

5116 — Sejam m, n e p inteiros não negativos tais que $p < m < n$. Mostre que, para todo o número $a \neq 0$, se tem

$$\frac{1}{n!} = \sum_{p, m=0}^{p, m=n} (-1)^p \cdot \frac{a^m}{p! (m-p)! (n-m)!}.$$

5117 — Mostre que, quaisquer sejam o inteiro positivo n e o inteiro não negativo p , se tem

$$\binom{n+p}{0} \binom{n}{0} + \binom{n+p}{1} \binom{n}{1} + \binom{n+p}{2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n+p}{n} \binom{n}{n} = \binom{2n+p}{n},$$

onda, pelo símbolo $\binom{m}{i}$ se designa o número de combinações de m objectos, tomados i a i .

Conclua que a soma dos quadrados dos coeficientes do desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é igual a

$$\binom{2n}{n}.$$

5118 — Sejam x, y e z números positivos tais que

$$x^{1/2} - y^{1/2} + z^{1/2} = (x - y + z)^{1/2}.$$

Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n + \left(\frac{z}{x}\right)^n = \left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{x}\right)^n + \left(\frac{z}{y}\right)^n$$

qualquer que seja o inteiro n .

5119 — Sejam A, B, C as medidas dos ângulos internos de um triângulo, a, b, c as medidas dos la-

dos respectivamente opostos e p o semi-primetro. Mostre que

$$(\cos A + \cos B + \cos C + 3)abc = 2p(2p^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

5120 — Dados os polinómios $x^{2n} - x^n + 1$ e $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$, determine uma condição necessária e suficiente a ser satisfeita pelo inteiro positivo n e pelo ângulo α para que o primeiro polinómio seja divisível pelo segundo.

Conclua daí que nenhum polinómio $x^{2n} - x^n + 1$ é divisível por $x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1$ e que uma infinidade de polinómios $x^{2n} - x^n + 1$ é divisível por $x^2 - \sqrt{3}x + 1$.

5121 — Dados num plano um ponto A , duas rectas b e c e um triângulo $A'B'C'$, construa, com régua e compasso, um triângulo ABC , semelhante ao triângulo dado e tal que B e C pertençam respectivamente a b e c .

Discutir.

5122 — Dados num plano três pontos A, B, C , construa, com régua e compasso, uma recta r que satisfaça às seguintes condições: a) a distância de A a r é igual ao comprimento de um segmento dado d ; b) as distâncias de B a r e de C a r estão entre si como dois segmentos dados m e n .

Discutir.

5123 — Sejam A, B, C as medidas dos ângulos internos de um triângulo e a, b, c os lados respectivamente opostos. Mostre que é condição necessária e suficiente para que o ângulo B seja duplo do ângulo C que se tenha

$$b^2 = (a+c)c.$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

129 — C. BERG — *Theories des graphes et ses applications*. — 288 pags. 15 x 24; 3400 F. — Dunod, Paris, 1959.

A palavra *graphe*, usada pelos matemáticos franceses, é um neologismo que, em certos casos, tem sido traduzida em português por *diagrama*. Os mate-

máticos ingleses servem-se da palavra *graph*, que tem quase os mesmos inconvenientes do que gráfico. Na definição de Serge:

Diz-se que se tem um gráfico (*graphe*) sempre que se tem:

- 1.º — Um conjunto X ;
- 2.º — Uma aplicação T de X em X .

Quando for possível os elementos de X , são representados por pontos ligados entre si por segmentos de recta orientados.

A teoria dos gráficos creada, pode dizer-se, por König tem hoje applicação em capitulos os mais diferentes das ciências. Os simplexes da topologia, são gráficos, bem como o são os esquemas de que o matemático muitas vezes se serve ao representar um conjunto ordenado e mais geralmente um reticulado (estructura). Mas não é só na matemática que os gráficos têm applicação; na química o esquema duma molecula dum composto orgânico é um gráfico; os sociogramas da psicologia, os circuitos electricos da física, os diagramas de organização da economia, são gráficos, uma arvore genealógica é um gráfico. Estes factos dão-nos ideia da importância do estudo abstracto dos gráficos. No livro *Théories des graphes et ses applications* faz-se o estudo sistemático das propriedades dos gráficos de uma forma acessível e completa. A partir do trabalho de König, o autor estuda os progressos feitos pela teoria, acrescentando os resultados das suas investigações pessoais. Noções e resultados que se encontravam espalhados por revistas ou em pequenas referências em livros, foram aqui reunidos e expostos de maneira sistemática de modo a fornecer ao estudioso o que lhe faltava neste campo: um livro que expuzesse a teoria no seu estado actual. É um livro notável e de aconselhar pois a técnica exposta serve a matemáticos, físicos, engenheiros, sociologos, economistas, porquanto se applica às ciências do comportamento, à teoria da informação, à cibernética, à teoria dos jogos, às redes de transportes, às telecomunicações, à teoria dos conjuntos etc. Os títulos dos diferentes capitulos fornece-nos ideia mais completa dos assuntos tratados:

- Cap. I — *Definições gerais*;
- Cap. II — *Estudo preliminar da descendência*;
- Cap. III — *Função ordinal e função de Grundy sobre um gráfico finito*;
- Cap. IV — *Os números fundamentais da teoria dos gráficos*;
- Cap. V — *Núcleo de um gráfico*;
- Cap. VI — *Jogos sobre um gráfico*;
- Cap. VII — *O problema do mais curto caminho*;
- Cap. VIII — *Redes de transporte*;
- Cap. IX — *Teorema dos semi-graus*;
- Cap. X — *Ligação de um gráfico simples*;
- Cap. XI — *Factores*;
- Cap. XII — *Centros de um gráfico*;
- Cap. XIII — *Diâmetro de um gráfico fortemente convexo*;

- Cap. XIV — *Matriz associada a um gráfico*;
- Cap. XV — *Matriz de incidência*;
- Cap. XVI — *Arvores e arborescências*;
- Cap. XVII — *O problema de EULER*;
- Cap. XVIII — *Ligação de um gráfico qualquer*;
- Cap. XIX — *Semi-factores*;
- Cap. XX — *Conectividade de um gráfico*;
- Cap. XXI — *Gráficos planos*.

É um livro que se recomenda aos interessados.

J. Silva Paulo

130 — JOSEPH BLAKEY, PH. D. — **University Mathematics** — Blackie & Son Limited — Londres, 581 pag. Preço: 35 s.

O livro é considerado pelo seu autor como livro de texto para alunos de Ciência e Engenharia das Universidades inglesas e contém praticamente todos os assuntos de matemática exigidos a tais alunos, excluída a geometria projectiva. O próprio autor no prefácio esclarece que a análise não é rigorosa, mas julga que o livro será útil até mesmo a estudantes ingleses liceais (GRAMMAR SCHOOLS). Diz-nos ainda o autor que os problemas foram extraídos dos pontos de exame de Matemáticas Puras, da Faculdade de Engenharia da Universidade de Londres.

O livro está escrito de modo a fazer-se compreender pelo estudante médio mas não é uma exposição teórica sistemática das matérias abordadas; podemos dizer que se trata da apresentação de resultados clássicos da álgebra e análise com um mínimo de justificação teórica, e com vista à resolução dos exemplos e problemas de que o livro é um bellissimo repositório. É sob esse aspecto um livro de recomendar. Eis o resumo do índice que dá ideia dos assuntos tratados no livro: I. Revisões. II. Limites; convergência e divergência de séries; funções exponencial e hiperbólicas; números complexos. III. Frações parciais e soma de séries. IV. Diferenciação. V. Integração. VI. Desenvolvimento de uma função em série; máximos e mínimos, e pontos de inflexão. VII. Tangentes, normais, curvatura, diferenciação parcial, etc. VIII. Determinantes. IX. Sistemas de coordenadas da geometria plana; linha recta, circunferência e parábola. X. Secções cônicas — ellipse e hipérbole. XI. Equação geral e polar de uma cônica. XII. Sistema de coordenadas no espaço a três dimensões; plano e recta. XIII. Quádricas, esfera, cone, etc. XIV. Área da superficie limitada por uma curva, volume de um sólido de revolução, etc. XV. Equações às derivadas parciais de segunda ordem. XVII. Trigonometria esférica. XVIII. Momento de inércia e movimento harmónico.

J. S. P.

131 — ARISTOTLE D. MICHAL — Le Calculé Différentiel dans les Espaces de Barrach — Gauthier — Villars, Paris, 1958.

Os trabalhos de A. MICHAL sobre funcionais, dispersos por várias publicações, foram, por sugestão de M. FRECHET, retomados e expostos de uma forma sistemática em um trabalho que MICHAL deixou concluído antes da sua morte. O presente livro é o primeiro volume da tradução francesa desse trabalho.

A noção de funcional, função numérica de uma variável de natureza qualquer, que nasceu, pode dizer-se, com os trabalhos de VOLTERRA sobre as funções de linha, estendeu-se a outras correspondências entre conjuntos abstratos. O estudo da continuidade de tais *funções gerais* e da generalização das propriedades das funções contínuas ordinárias e do cálculo diferencial levou à noção de derivada de função de linha de VOLTERRA. Mais tarde M. FRECHET deu a definição de diferencial, válida nos casos em que o domínio e o contradomínio de tais correspondências são espaços de Banach. A generalização destes estudos às diferentes classes de funções e equações, e a investigação das propriedades da análise clássica válidas para tais correspondências, foi o trabalho a que se dedicou, entre outros, A. MICHAL. O índice do volume fornece uma visão dos assuntos tratados neste primeiro volume:

Cap. I: Noção de função geral e de funcional. Equações integrais. Cap. II: Espaços lineares normados. Polinómios. Funções analíticas. Cap. III: Diferenciais de funções de variável abstracta. Cap. IV: Equações F — diferenciais na teoria das equações integrais de VOLTERRA. Cap. V: Equações integrais de FREDHOLM generalizadas. Cap. VI: Soluções de equações diferenciais como funcionais dos seus coeficientes. Cap. VII. Equações diferenciais verificadas pela função exponencial em espaços abstractos.

J. S. P.

132 — A. J. POMERANS — Worked examples in Mathematics — Hutchison of London, 1959.

Trata-se de um livro de exercícios sobre os vários capítulos de matemática que fazem parte do General Certificate of Education (Advanced Level) e dirige-se aos alunos que trabalham para obter esse grau ou se preparam para exames universitários do mesmo nível. Os exercícios resolvidos nem sempre o são, como o autor admite, sob a forma mais simples e o facto deve-se sem dúvida aos conhecimentos que se supõe possuir os candidatos a quem se destinam. Os exercícios ou são baseados nos problemas saídos em recentes exames da Universidade de Londres, ou são mesmo

questões propostas nesses exames. É um livro útil a quem se prepara para tal espécie de exame, mas não dispensa como o próprio autor indica, o uso de um bom livro de texto. Eis os vários capítulos sobre que versam os exercícios: Geometria analítica plana; trigonometria; geometria pura; teorema do binómio; análise combinatória; equações do 2.º grau, propriedades dos polinómios e gráficos; propriedades dos triângulos; trigonometria esférica; geometria no espaço; calculo integral e diferencial; volumes dos solidos de revolução.

O livro, que tem 219 páginas, pode ser útil mesmo aos nossos alunos do 7.º ano dos liceus e do primeiro ano das Faculdades de Ciências. A edição é bastante cuidada e aparentemente apresenta poucas gralhas.

J. S. P.

133 — L. D. LANDAU e E. M. LIFSHITZ — Quantum Mechanics — Pergamon Press — London, Paris.

O Tratado de Física Teórica publicado em 9 volumes pelos professores e académicos da Academia das Ciências da URSS LANDAU e LIFSHITZ, é talvez das obras do género, a que mais se tem imposto internacionalmente, quer pela extensão e profundidade quer ainda pela clareza de exposição e meticulosidade de pormenores, não obstante «um dos princípios que guiou a escolha de material tenha sido o de não incluir assuntos que necessitem de apresentação de resultados experimentais».

Assim, vários tem sido os volumes já traduzidos em línguas estrangeiras. *The Classical Theory of Fields* é a tradução inglesa do vol. 2 — *Teoria dos Campos*, o primeiro apresentado ao público científico não conhecedor da língua russa, primeiramente publicada por ADDISON-WESLEY PUB. Co. e agora por PERGAMON PRESS. Seguiram-se-lhe o vol. 3 — *Quantum Mechanics (non-relativistic Theory)* e o vol. 5 — *Statistical Physics*, ambos editados por esta segunda editora. *Quantum Mechanics* é um volume 516 + XII pág. distribuídas por 16 cap. e 6 apêndices com 96 problemas propostos e inteiramente resolvidos.

No primeiro capítulo a apresentação dos «conceitos básicos da mecânica quântica» faz-se de forma que as noções quânticas são introduzidas o mais intuitivamente possível (sob o aspecto matemático); de resto, em toda a obra, os Autores provam soberbamente que o uso e o desenvolvimento dos conceitos e instrumentos matemáticos, quando devidamente empregados, longe de encobrirem ou deformarem os aspectos físicos, os esclarecem e completam.

O cap. II trata dos operadores de energia e momentos e formas matriciais de mecânica quântica.

A equação de SCHRÖDINGER e os diversos tipos dos espectros dos respectivos valores próprios da energia; os potenciais mais frequentes — poços e barreiras — e problemas correlativos são estudados no cap. III. As noções de momento angular, valores próprios e funções próprias e adição de momentos angulares, são largamente tratados no cap. IV.

Os cap. V, VI, VII e VIII tratam respectivamente de: movimentos de uma partícula nos diversos campos de simetria central, incluindo o coulombiano; a teoria perturbações (dependentes e independentes do tempo); o método de aproximação KBW (o caso quase clássico); a noção de spin, e partículas de spin $\frac{1}{2}$ e de spin diferente de $\frac{1}{2}$.

Até o presente, o programa exposto é o de qualquer vulgar tratado de mecânica quântica não relativista (o vol. 4 da obra tem o nome *Teoria quântica relativista*); o valor da obra, no que respeita a estes 8 capítulos, está na originalidade, clareza e rigor matemático da exposição.

O cap. IX trata dos sistemas com grande número de partículas idênticas, das respectivas estatísticas FERMI-DIRAC e BOSE-EINSTEIN e do método de segunda quantificação aplicado a estas duas estatísticas. O cap. X estuda o átomo: níveis de energia, estados electrónicos, átomos de hidrogénio e hidrogenoides, estruturas finas, método HARTREE-FOK, equação THOMAS-FERMI para átomos complexos com grande número de electrões, estados quase-estacionários, efeito STARK, etc.

A molécula diatómica é estudada no que respeita aos seus termos electrónicos e respectiva interacção, relações entre os termos atómicos e moleculares, valência, vibração e rotação das estruturas moleculares, etc. O estudo da interacção spin-eixo de rotação é feito com desenvolvimento e pormenor nos casos que HUND classificou de *a* e *b* e os Autores de *c* e *d*. As propriedades de simetria dos termos da molécula diatómica são caracterizadas pelo comportamento das funções de onda em face da simetria das coordenadas dos núcleos atómicos; o estudo dos elementos de matriz da molécula é já caso particular do assunto do capítulo seguinte a teoria da simetria. Antes de

terminarem o capítulo da molécula diatómica, os Autores examinam cuidadosamente os fenómenos de HILL, e VAN VLECK e KRONIG, a teoria das forças de VAN DER WAALS e a pré-dissociação. A grande importância da teoria dos grupos como aplicação à mecânica quântica é posta em relevo no cap. XII. Pode mesmo dizer-se que esta obra é particularmente notável por este objectivo plenamente atingido.

A bem dum necessário prestígio da matemática nas suas aplicações, aconselhamos a leitura atenta deste capítulo a todos os que tomam posição de incompreensível exagero, uns apresentando certos ramos da Álgebra como de extrema importância na física e geometria, outros negando essa importância num racional e actualizado estudo da *física da molécula* e da *física do sólido*. Estamos certos que essa leitura seria o começo de uma racionalização e actualização do ensino da matemática em escolas que muito dele necessitam.

O cap. XIII completa o anterior, estudando a molecular poliatómica terminando com a discussão do movimento do electrão num campo eléctrico periódico.

Em dois capítulos, o XIV e XV, dá-se a devida atenção ao problema fundamental em física nuclear da teoria das colisões-elásticas e inelásticas: a teoria geral das colisões elásticas, aproximação de BORN, método dos desfasagens, caso do potencial de COULOMB, fórmula de RUTHERFORD; colisão de partículas idênticas; colisão entre electrões e átomos. Teoria geral das colisões inelásticas Fórmulas de BREIT e WIGNER. Colisões inelásticas entre electrões e átomos, partículas pesadas e átomos, entre moléculas, etc.

Finalmente o livro termina estudando o movimento no campo magnético, efeito de ZEEMAN, etc.

Os apêndices tratam dos polinómios de HERMITE e LEGENDRE, função de AIRY e funções hipergeométricas e aplicações.

Tencionamos publicar nos próximos números da G. M. referências a outros volumes do tratado e algumas indicações biográficas dos Autores.

Fá-lo-emos convictos de contribuímos um pouco para a divulgação entre o público português de um dos melhores tratados actuais de Física Teórica.

J. G. T.