ANO XIX—N.º 72-73 GAZETA DE MATEMÁTICA SET./DEZ.—1958

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Rua General Sinel de Cordes, 11-A — Telef. 77 19 43 — LISBOA 1

Sobre la geometria de $\Omega = Z^2$

por *J. Gallego-Diaz*

El objeto de este trabajo es estudiar una aplicacion geométrica de la funcion de variable compleja $\Omega = Z^2$. A pesar de su sencillez no hemos encontrado tal aplicacion estudiada en ninguno de los libros que hemos consultado ni siquiera en el excelente «*Dictionary of conformal representations*» by H. KOBER (Dover Publications, 1952).

Suponemos dada una cónica en el plano de los Ω, con centro, con un foco en el polo y con uno de sus ejes coincidiendo con el eje polar.

Asumiremos que los puntos del plano Ω estan dados ya por sus coordenadas cartesianas (u, v) o por sus coordenadas polares (ρ_1, w_1). Analogamente los puntos del plano de las Z estan dados por sus coordenadas cartesianas (x, y) ó por sus coordenadas polares (ρ, w).

La ecuacion en coordenadas polares de una cónica, con un foco en $(0, 0)$, y con el eje mayor en el eje polar, dada en el plano Ω es, como se sabe

$$(1) \qquad \rho_1 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos w_1}.$$

Las fórmulas correspondientes a la funcion de variable compleja que estamos considerando $\Omega = Z^2$, son:

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned}\right\}$$

ó

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \rho^2 \\ w_1 &= 2w \end{aligned}\right\}.$$

Utilizando las últimas la ecuacion (1) se convierte en

$$(2) \qquad \rho^2 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos 2w}$$

o lo que es lo mismo:

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\dfrac{p_1}{1 - e_1}} + \frac{y^2}{\dfrac{p_1}{1 + e_1}} = 1$$

Lo que nos dice que la correspondiente curva transformada en el plano Z es otra cónica cuyo centro es el origen de coordenadas $(0, 0)$ y cuyos ejes de simetria son los ejes coordenados.

Llamando a y b a los semiejes de la cónica dada por (3) y a_1 y b_1 a los semiejes de la cónica dada por (1) encontramos fàcilmente:

$$(4) \qquad b^2 = a_1 - c_1$$

$$(5) \qquad a^2 = a_1 + c_1$$

(6) $$a^2+b^2=2\,a_1$$
(7) $$a\,b=\pm b_1\,.$$

Análogamente obtenemos

(8) $$c_1=\frac{c^2}{2}$$

(9) $$e_1=\frac{e^2}{2-e^2}$$

donde e_1 y e son las respectivas excentricidades. Se ve sin dificultad que

$$\text{si } e_1>1\,,\quad e>1 \text{ y si}$$
$$e_1<1\,,\quad e<1 \text{ es decir}$$

que: «La transformacion conserva la naturaleza de la cónica».

Teniendo en cuenta las fórmulas (4), (5), (6), (7), (8) y (9) podemos establecer fácil y rapidamente un gran nùmero de teoremas y resolver diferentes problemas de lugares geométricos, envolventes, máximos y mínimos, trayectorias ortogonales, construcciones gráficas, etc, etc.

En algunos casos conviene recordar que la transformada de una linea recta, dada en el plano Ω es una hipérbola equilátera en el plano Z con centro en $(0,0)$. Puesto que de: $Mu+Nv+P=0$ pasamos a $M(x^2-y^2)+2\,Nxy+P=0$. Tambien es interesante el caso inverso, es decir, que la curva transformada de una linea recta dada en el plano de los Z, es una parábola, con foco en $(0,0)$, en el plano Ω. Ello se prueba fácilmente pues de:

$$\frac{1}{\rho}=A\cos\omega+B\operatorname{sen}\omega \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}=A\cos\frac{\omega_1}{2}+B\operatorname{sen}\frac{\omega_1}{2}\,,\text{ es decir}$$

$$\frac{2}{\rho_1}=A^2+B^2+(A^2-B^2)\cos\omega_1+$$
$$+2\,A\,B\operatorname{sen}\omega_1\,.$$

La transformacion es conforme y sus puntos criticos son $Z=0$, $Z=\infty$.

Otras importantes propiedades de la transformacion que estudiamos, igualmente fáciles de establecer son:

a) A puntos diametralmente opuestos en la cónica dada en el plano Ω corresponden en la cónica transformada en el plano Z, extremos de pares de semidiámetros conjugados.

b) Los dos focos, F y F' de la cónica del plano Z corresponden al otro foco O' de la conica dada en el plano Ω.

c) Los extremos de dos semidiámetros ortogonales de la cónica del plano Z corresponden a los extremos de una cuerda focal de la cónica dada en el plano Ω.

Con el fin de dar una idea de las sencillas demostraciones que pueden obtenerse por nuestro mètodo damos a continuacion dos ejemplos:

1 — Sean OP y OQ dos semidiámetros conjugados de una elipse dada en el plano de las Z cuyos focos F y F' corresponden al foco O' de la elipse transformada en el plano Ω.

Puesto que $|MO'|=|OL|$ se deduce que

$$PF\cdot PF'=O\,Q^2\,.$$

Es decir que: «El producto de los radios vectores de una elipse que parten de P es igual el cuadrado del semidiámetro conjugado con el OP».

2 — Puesto que $O\,M+O\,L=2\,a_1$ se deduce que

$$\overline{O_2P}^2+\overline{O_2Q}^2=a^2+b^2 \text{ (Teorema de Apolónio).}$$

Finalmente damos a continuacion una lista de ejercicios, en su mayor parte originales, cuya solucion dejamos como ejercicio al lector:

1 — Hallar el lugar geométrico de los focos de la familia de elipses que admiten una circunferencia dada como circunferencia de MONGE (curva ortóptica) y que pasan por un punto dado.

2 — Hallar el lugar geométrico de los vèrtices de la familia de hiperbolas equiláteras concentricas con una elipse dada y tangentes a la elipse.

3 — Hallar el lugar de los focos de la familia de cónicas que admiten por centro un punto dado y que pasan por dos puntos dados.

4 — Hallar el lugar geométrico de los vértices de la familia de elipses que admiten por centro un punto dado y que son tangentes a dos hiperbolas equiláteras dadas, concentricas con la elipse.

5 — Hallar el lugar geométrico de los focos de la familia de elipses que admiten un semidiámetro fijo en longitud y posicion y el semidiámetro conjugado con el, fijo solo en magnitud.

6 — Hallar el lugar geométrico de los vértices de las parábolas que admiten como foco un foco de una elipse dada y son tangentes a la elipse.

7 — Hallar el lugar geométrico del segundo foco de las elipses que tienen un punto dado como foco que pasan por un punto dado y tales que: $a + c = K$.

8 — En un sistema de ejes coordenados cartesianos rectangulares Ox, Oy, tenemos dos circunferencias concèntricas (O_1) y (O_2) cuyo centro comun es O. Por O pasa una semi-recta OV que corta a la circunferencia (O_1) en M y a la circunferencia (O_2) en N.

Sea (P_1) la parábola cuyo foco es O, que admite Ox como eje y que pasa por M y sea (P_2) la parábola cuyo foco es O, que admite OY como eje y que pasa por N. Hallar el lugar geométrico del punto de corte de (P_1) y (P_2) cuando OV varia.

9 — Hallar la envolvente de la familia de elipses que admiten como centro un punto dado A, cuyos focos pertenecen a una hiperbola equilátera dada de centro A y tales que la circunferencia de MONGE de todas esas elipses sea la misma.

10 — Hallar la envolvente de las parábolas que admiten como foco uno de los focos de una elipse dada y que pasan por los extremos de un diámetro variable de la elipse dada. Hallar, tambien, el lugar geométrico de sus vértices.

11 — Hallar la envolvente de una familia de elipses de la misma área y coaxiales.

12 — Hallar la envolvente de la familia de hipérbolas equiláteras que admiten como centro el centro de una elipse dada y que pasan por los extremos A y B de dos semidiámetros conjugados de la elipse.

13 — Consideramos dos semi-rectas OA y OB $(\widehat{AOB} = 45°)$. Marcamos sobre OA un punto M y sobre OB otro punto N tales que $OM \cdot ON = K^2$. Hallar la envolvente de la familia de hiperbolas equiláteras que admiten como centro el punto O y que pasan por los puntos M y N.

14 — Construir gráficamente una hipérbola equilátera cuyo centro es el centro de una elipse dada, que pasa por los focos de la elipse y que corta ortogonalmente a la elipse.

15 — Construir gráficamente una parábola con foco en $(0, 0)$ tangente a las curvas

$$\rho = a\,\frac{\cos \omega/2}{\cos 3\,\omega/2} \quad \text{y} \quad \rho = b\,\frac{\operatorname{sen} \omega/2}{\operatorname{sen} 3\,\omega/2}$$

$$(b^2 > 3\,a)$$

16 — Construir gráficamente una cónica, conociendose el centro y tres puntos.

17 — Hallar, gráficamente los puntos de interseccion de una elipse y un óvalo de Cassini que admite los mismos focos.

18 — Consideramos tres parábolas con el mismo foco O. Construir gráficamente una cónica con foco en O, inscrita en el triángulo curvilineo definido por esas tres parábolas.

19 — Construir gráficamente una elipse conociendose su centro y los vértices de tres hiperbolas equiláteras bitangentes y concèntricas con la elipse.

20 — Hallar, gráficamente, las tangentes comunes a dos hipérbolas equiláteras concèntricas conociendose sus asintotas y un punto de cada hipérbola.

21 — Hallar el máximo y el minimo del angulo compreendido entre dos diametros conjugados de una elipse dada y probar gráficamente, que el máximo corresponde a los semidiámetros conjugados iguales.

22 — Hallar la trayectoria ortogonal de la familia de curvas

$$(x^2 + y^2)^2 = K^2\,(x^2 - y^2)\,.$$

23 — Hallar la trayectoria ortogonal de todas las hipérbolas equiláteras con centro en $(0, 0)$ y que pasan por un punto dado.

24 — Hallar el lugar geométrico de los focos de las hipérbolas equiláteras con centro en $(0, 0)$ y tangentes a la curva

$$\rho^2 = \cos 2\,\omega\,.$$

25 — Hallar las curvas que hacen estacionaria la integral definida

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\,s\,.$$

Representação das rotações e reflexões no espaço euclideano tridimensional por meio dos parâmetros de Cayley-Klein. (I)

por *Paulo Roberto de Paula e Silva*

Introdução: Sabe-se que a rotação de um sólido com um ponto fixo pode ser representada por uma matriz real (a_{ik}) (3×3), cujos elementos dependem de 3 parâmetros, em particular, dos 3 ângulos de Euler. Entretanto, a representação por meio dos ângulos de Euler apresenta alguns inconvenientes de ordem prática: a assimetria dos ângulos de Euler, a multiplicidade das suas definições, a dificuldade de guardar de memória (visualisar) cada definição dos mesmos; além disso o uso dos ângulos de Euler não deixa em evidência, na matriz (a_{ik}) que representa a rotação, dois elementos essenciais: o eixo de rotação e o ângulo de rotação.

A representação de que trataremos, já de