15 — Construir gráficamente una parábola con foco en (0, 0) tangente a las curvas

$$\rho = a \frac{\cos \omega/2}{\cos 3\,\omega/2} \quad \text{y} \quad \rho = b \frac{\operatorname{sen} \omega/2}{\operatorname{sen} 3\,\omega/2}$$

$$(b^2 > 3\,a)$$

16 — Construir gráficamente una cónica, conociendose el centro y tres puntos.

17 — Hallar, gráficamente los puntos de interseccion de una elipse y un óvalo de CASSINI que admite los mismos focos.

18 — Consideramos tres parábolas con el mismo foco $O$. Construir gráficamente una cónica con foco en $O$, inscrita en el triángulo curvilineo definido por esas tres parábolas.

19 — Construir gráficamente una elipse conociendose su centro y los vértices de tres hiperbolas equiláteras bitangentes y concèntricas con la elipse.

20 — Hallar, gráficamente, las tangentes comunes a dos hipérbolas equiláteras concèntricas conociendose sus asintotas y un punto de cada hipérbola.

21 — Hallar el máximo y el minimo del angulo compreendido entre dos diametros conjugados de una elipse dada y probar gráficamente, que el máximo corresponde a los semidiámetros conjugados iguales.

22 — Hallar la trayectoria ortogonal de la familia de curvas

$$(x^2 + y^2)^2 = K^2\,(x^2 - y^2)\,.$$

23 — Hallar la trayectoria ortogonal de todas las hipérbolas equiláteras con centro en (0, 0) y que pasan por un punto dado.

24 — Hallar el lugar geométrico de los focos de las hipérbolas equiláteras con centro en (0, 0) y tangentes a la curva

$$\rho^2 = \cos 2\,\omega\,.$$

25 — Hallar las curvas que hacen estacionaria la integral definida

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\,s\,.$$

# Representação das rotações e reflexões no espaço euclideano tridimensional por meio dos parâmetros de Cayley-Klein. (I)

por **Paulo Roberto de Paula e Silva**

**Introdução:** Sabe-se que a rotação de um sólido com um ponto fixo pode ser representada por uma matriz real $(a_{ik})$ $(3 \times 3)$, cujos elementos dependem de 3 parâmetros, em particular, dos 3 ângulos de EULER. Entretanto, a representação por meio dos ângulos de EULER apresenta alguns inconvenientes de ordem prática: a assimetria dos ângulos de EULER, a multiplicidade das suas definições, a dificuldade de guardar de memória (visualisar) cada definição dos mesmos; além disso o uso dos ângulos de EULER não deixa em evidência, na matriz $(a_{ik})$ que representa a rotação, dois elementos essenciais: o eixo de rotação e o ângulo de rotação.

A representação de que trataremos, já de si, deixa em evidência tais elementos. Para caracterizar a rotação usaremos 3 parâmetros reais $b_x, b_y, b_z$. A direcção do vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ dará o eixo de rotação (que passa pela origem) e a intensidade do do vector $\vec{b}$ será proporcional a $\operatorname{sen}(\Phi/2)$, onde $\Phi$ é o ângulo de rotação. Esse vector $\vec{b}$ é algo parecido com uma velocidade angular, com a ressalva de de que $\vec{b}$ representa uma rotação finita (1).

Como é sabido, a rotação dos vectores de um plano pode ser representada pelo «operador de rotação» $e^{i\Phi}$ (2); no fundo é um número complexo $\cos\Phi + i \operatorname{sen}\Phi$. No século passado, Hamilton e outros tentaram generalisar o operador de rotação no plano, para as rotações no espaço tridimensional. Esta tentativa fez surgir na matemática novas entidades chamadas quaterniões (números hiper-complexos) que são uma generalização do conceito de número complexo. Estas quantidades são do tipo $\mathbf{Q} = b + i b_x + j b_y + k b_z$ com $b, b_x, b_y, b_z$ reais, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ijk = -1$. Verificou-se que uma rotação podia ser representada por uma quantidade desse tipo, onde $(b_x, b_y, b_z)$ tem o sentido já mencionado, $b = \cos(\Phi/2)$ e $(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) + b^2 = \operatorname{sen}^2\Phi/2 + \cos^2\Phi/2 = 1$.

Segundo assertiva de E. T. Whittaker (3), a ideia dos quaterniões teve origem no século passado em trabalhos independentes de Gauss, O. Rodrigues, Hamilton e Cayley que (segundo nos parece, partindo de ideias da trigonometria esférica) descobriram a seguinte propriedade: definindo:

$$b_x = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right), \qquad b_y = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right),$$

$$b_z = \cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right), \qquad b = \cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right),$$

e de modo análogo $b'_x, b'_y, b'_z, b$ relativamente a duas rotações sucessivas dadas pelos ângulos de Euler $(\theta, \varphi, \psi)$ e $(\theta', \varphi', \psi')$ (4), então a rotação resultante $(\theta'', \varphi'', \psi'')$ será tal que:

$$(b'' + i b''_x + j b''_y + k b''_z) =$$
$$= (b' + i b'_x + j b'_y + k b'_z) \cdot (b + i b_x + j b_y + k b_z)$$

(notar a ordem) com o produto definido pelas regras $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, etc., já vistas.

Assim uma rotação pode ser representada por um quaternião $\mathbf{Q}$. Na representação por quaterniões o raio vector $\rho = \rho_x i + \rho_y j + \rho_z k$ (quaternião sem parte real) se transforma pela lei $\rho' = \mathbf{Q}\rho\mathbf{Q}^{-1}$.

Entretanto, para os estudantes de física, a introdução destas quantidades gera uma certa incerteza, razão pela qual daremos aqui uma representação mais materializada, como faz Cartan (5). Veremos, neste artigo, que a álgebra dos quaterniões, no fundo, é a álgebra das matrizes $2 \times 2$.

Representaremos uma rotação por uma matriz complexa $2 \times 2$ do tipo

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} b_z - b & b_x - i b_y \\ b_x + i b_y & -b_z + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ dá a direcção do eixo de rotação e $b = \cos\Phi/2$.

(1) Queremos ressaltar às pessoas inadvertidas que aqui o termo rotação tem um sentido diferente daquele da cinemática do sólido: as rotações que estamos estudando não dependem do tempo e são finitas.

(2) Veja B. J. Caraça — *Cálculo Vectorial.*

(3) E. T. Whitthaker — *Analytical Dynamics* — Dover, pg. 9.

(4) Veja definição e figura de H. Goldstein — *Classical Mechanics* — pg. 107.

(5) E. Cartan — *Leçons sur la Théorie des Spineurs* — Hermann.

(6) E. T. Whittaker — loc. cit. pág. 13 — estabelece uma correspondência entre as rotações de um sólido no espaço e as transformações homográficas no plano complexo, que são transformações do tipo:

$$z \to z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

O vector $\vec{x}$ será representado por uma matriz $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i\,x_2 \\ x_1 + i\,x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$.

Um vector $\mathsf{X}$ se transforma pela lei $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^{-1}$ (produto de matrizes $(2 \times 2)$.

Esta ideia será generalizada para representar as reflexões no espaço, em particular a transformação:

$$(x_1 \to -x_1,\ x_2 \to -x_2,\ x_3 \to -x_3)\,.$$

### 1) Matriz $(a_{ik})$ de rotação.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Um vector $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$ ($x_i$ reais), neste sistema de referência pode ser escrito na forma:

$$(1) \qquad \vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fixado o sistema de referência, uma vez por todas, podemos considerar a rotação como sendo uma transformação linear que leva o vector $\vec{x}$ num outro vector $\vec{x}'$:

$$(2) \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

onde $x'_1, x'_2, x'_3$ são as componentes de $\vec{x}'$ no sistema $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Como a transformação é linear teremos:

$$(3) \qquad \begin{cases} x'_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 \\ x'_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 \\ x'_3 = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 \end{cases}$$

ou, sintèticamente:

$$(4) \qquad x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,x_k = a_{ik}\,a_k \text{ (índices repetidos somados)}$$

ou:

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$(6) \qquad x' = \mathsf{A}\,x\,.$$

As equações (4), (5), (6) são outras maneiras de escrever as equações (3).

Em (6), $x'$ é uma matriz coluna $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}$ é a matriz $3 \times 3$ $(a_{ik})$ e $x$ é uma matriz coluna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. $\mathsf{A}\,x$ é o produto matricial de uma matriz $3 \times 3$ por uma matriz coluna de 3 elementos: o resultado é uma matriz coluna de 3 elementos.

A matriz $(a_{ik}) = \mathsf{A}$ constitue uma forma de representar a rotação. Entretanto, nem sempre uma matriz $(a_{ik})$ representa efectivamente uma rotação, para isto a matriz $(a_{ik})$ deverá satisfazer a certas condições, que são:

1 a) A transformação linear deve ser tal que $\vec{x} \cdot \vec{x}$ seja invariante, isto é $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$ ou:

$$(7) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2\,.$$

É fácil verificar que, para isto acontecer, é necessário e suficiente que a matriz $\mathsf{A}$ seja ortogonal, isto é

$$(8) \qquad \sum_i a_{ik}\,a_{il} = \delta_{kl}$$

onde $\delta$ é o símbolo de Kronecher,

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{para } k \neq l \\ 1 & \text{para } k = l\,. \end{cases}$$

Em termos matriciais a equação (8) pode ser traduzida na forma:

$$(9) \qquad \mathsf{A}\widetilde{\mathsf{A}} = \widetilde{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \mathsf{1}$$

onde $\widetilde{\mathsf{A}} \equiv$ transposta da matriz $\mathsf{A}$, e $\mathsf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De (9) segue que:

$$(10) \qquad \det \mathsf{A} \cdot \det(\widetilde{\mathsf{A}}) = (\det \mathsf{A})^2 = +1 \to \det \mathsf{A} = \pm 1$$

uma vez que $\det \mathsf{A} = \det \widetilde{\mathsf{A}}$.

2 a) O facto de que a matriz $\mathsf{A}$ é ortogonal, não é ainda suficiente para podermos

dizer que $\mathsf{A}$ representa uma rotação. Para que isto aconteça é necessário que $\mathsf{A}$ (finita) possa ser obtida como uma sucessão de pequenas rotações infinitesimais, a partir do estado inicial do sólido. Em termos matemáticos, seria necessário que «$\mathsf{A}$ fosse contínua com a unidade», ou que $\det \mathsf{A} = +1$; (as que têm determinante $-1$ não podem ser contínuas com a unidade).

É fácil verificar que a matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, isto é, conserva $\vec{x}^2$ invariante mas não é uma rotação, pois para obtê-la teríamos que «virar o sólido ao avêsso», isto é, deformá-lo.

Chamaremos, por isso, de rotações as transformações ortogonais com determinante $+1$; e de inversões aquelas com determinante $-1$. Uma transformação ortogonal ou é rotação ou é inversão (veja eq. 10).

Aqui convém incluir um parênteses sobre as matrizes ortogonais. O conjunto $\mathsf{O}$ das matrizes ortogonais *forma um grupo*. Diremos que um conjunto $\mathsf{G}$ forma um grupo segundo uma certa lei de associação, se:

G. 1. A cada par $\mathsf{A}, \mathsf{B}$ de elementos de $\mathsf{G}$ corresponde um elemento $\mathsf{C}$ de $\mathsf{G}$ que denotaremos $\mathsf{C} = \mathsf{A}\mathsf{B}$.

G. 2. Existe em $\mathsf{G}$ um elemento, chamado elemento neutro, ou unidade, tal que $\mathsf{I}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{I} = \mathsf{A}$, para qualquer $\mathsf{A}$ de $\mathsf{G}$.

G. 3. Dado um elemento $\mathsf{A}$ de $\mathsf{G}$, existe um elemento $\mathsf{A}^{-1}$ de $\mathsf{G}$ tal que $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{I}$.

O conjunto das matrizes ortogonais forma um grupo segundo a lei de associação «produto de matrizes», pois:

1. O produto de 2 matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Prova: $\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{I}$ e $\mathsf{B}\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{I}$, então $(\mathsf{A}\mathsf{B})(\mathsf{A}\mathsf{B})^{\sim} = \mathsf{A}\mathsf{B}\tilde{\mathsf{B}}\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{I}$.

2. A matriz $\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é ortogonal e $\mathsf{I}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{I} = \mathsf{A}$, para qualquer $\mathsf{A} \in \mathsf{O}$.

3. Qualquer matriz ortogonal $\mathsf{A}$ tem inversa que é $\mathsf{A}^{-1} = \tilde{\mathsf{A}}$.

O conjunto das rotações é um *subgrupo* do grupo das matrizes ortogonais, isto é, o conjunto das matrizes de rotação forma um grupo.

Notemos que as inversões, que constituem um subconjunto de $\mathsf{O}$, não formam um grupo (com relação ao produto) por duas razões: primeiro, porque o produto de duas inversões não é uma inversão mas sim uma rotação; segundo, porque a unidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ não pertence ao conjunto das inversões mas sim ao das rotações.

Posto isto, voltando ás rotações, as equações (8) e (11) estabelecem relações entre os 9 elementos da matriz $(a_{ik})$ deixando livres sòmente 3 deles; é possível, portanto, colocá-los em função de 3 parâmetros independentes, em particular dos 3 ângulos de EULER.

## 2. Teorema de Euler [7]

2 *a*. *Eixo de rotação*. Se $\mathsf{A}$ é uma matriz de rotação, a transformação $x' = \mathsf{A}x$ tem um eixo invariante. Isto quer dizer: existe uma recta (que passa pela origem) tal que, qualquer vector $\vec{x}$ paralelo a esta recta, se transforma em $\vec{x}' = \vec{x}$.

Esta recta chama-se eixo de rotação.

2 *b*. *Angulo de rotação*. O ângulo de rotação $\Phi$ em torno do eixo de rotação

(7) Veja demonstração de H. GOLDSTEIN — loc. cit. pg. 118.

é determinado pelo traço de matriz $\mathsf{A}$: $tr(\mathsf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2\cos\Phi$.

### 3) Formalismo de Cartan

Observação: Leia com atenção e guarde os resultados deste parágrafo.

Seguindo E. CARTAN [8] vamos agora associar a cada vector $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, uma matriz complexa $2\times 2$ do tipo [9]

$$(11) \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \text{ onde } i = \sqrt{-1}.$$

$\mathsf{X}$ pode servir para representar o vector $\vec{x}$. Algumas vezes chamaremos $\mathsf{X}$ de «vector». Uma das vantagens do uso desta matriz $\mathsf{X}$, reside no facto de que $\det \mathsf{X} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ o que é particularmente interessante na teoria das transformações ortogonais.

*Definição*: dada uma matriz $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ onde $\alpha_{11}$ etc. são números complexos, à matriz $\begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* \\ \alpha_{12}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix} = (\tilde{\alpha})^* = \alpha^\dagger$ chamaremos de conjugada hermiteana de $\alpha$. A conjugada hermiteana é obtida *transpondo* os elementos da matriz $\alpha$ e depois *conjugando* $(\alpha_{ik} \to \alpha_{kl}^*)$ cada elemento da matriz.

*Definição*: uma matriz $\alpha$ é hermiteana se $\alpha^\dagger = \alpha$.

*Definição*: uma matriz é unitária se $\alpha\alpha^\dagger = \alpha^\dagger\alpha = 1$, isto é, se $\alpha^\dagger = \alpha^{-1}$.

3.1 A realidade do vector $\vec{x}$ é expressa pela hermiticidade da matriz $\mathsf{X}$ (11).

$$\mathsf{X}^\dagger = \begin{pmatrix} x_3^* & (x_1 + i x_2)^* \\ (x_1 - i x_2)^* & -x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3^* & x_1^* - i x_2^* \\ x_1^* + i x_2^* & -x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

se $\vec{x}$ é real, isto é se $x_1, x_2, x_3$ são números reais.

3.2 Se ao vector $\vec{x}$ corresponde a matriz $\mathsf{X}$ $(2\times 2)$, então ao vector $\lambda\vec{x}$ corresponde a matriz $\lambda\mathsf{X}$.

3.3 E se ao vector $\vec{y}$ corresponde a matriz $\mathsf{Y}$, ao vector $(\vec{x} + \vec{y})$ corresponde a matriz $(\mathsf{X} + \mathsf{Y})$.

3.4 Ao vector $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ corresponde $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ao vector $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ corresponde $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Ao vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

As matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são chamados matrizes de PAULI, empregadas para representar o momento angular intrínseco das partículas de spin $1/2$ [10].

3.5 $\mathsf{X} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ (verificar usando $3.2 \cdots 3.4) = \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$

$$3.6 \quad \mathsf{X}^2 = \mathsf{X}\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathsf{X}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{x}\cdot\vec{x})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.7 \quad \det \mathsf{X} = \det\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -x\cdot x.$$

$$3.8 \quad \left.\begin{matrix} \text{Se } \vec{x} \sim \mathsf{X} \\ \text{e } \vec{y} \sim \mathsf{Y} \end{matrix}\right\} \to \vec{x}\cdot\vec{y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathsf{X}\mathsf{Y} + \mathsf{Y}\mathsf{X})$$

(n.º) (matriz) = (matriz)

3.9 Ao vector axial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ *corresponde* a matriz $\frac{1}{2i}(\mathsf{X}\mathsf{Y} - \mathsf{Y}\mathsf{X})$.

---

[8] E. CARTAN: loc. cit. pg. 54.

[9] GOLDSTEIN, loc. cit. usa a notação $\mathsf{P}$ no lugar de $\mathsf{X}$.

[10] Veja D. BOHM: *Quantum theory* — Prentice Hall — 4.ª ed. — pg. 391.

3.10 As propriedades das matrizes de Pauli podem ser obtidas de maneira imediata usando os itens anteriores, que são de fácil verificação. As matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ têm quadrado igual a $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e anticomutam entre si:

$$\begin{array}{l|l} \vec{i} \sim \sigma_1 & \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 = \sigma_1^2 \\ \vec{j} \sim \sigma_2 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 = \sigma_2^2 \\ \vec{k} \sim \sigma_3 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 = \sigma_3^2 ; \end{array}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 = \frac{1}{2} (\sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = - \sigma_2 \sigma_1 ;$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ dá: } \sigma_2 \sigma_3 = - \sigma_3 \sigma_2 ;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \text{ dá: } \sigma_1 \sigma_3 = - \sigma_3 \sigma_1 .$$

3.11 De $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ teremos, usando os itens 3.9 e 3.10:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2i} (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = \frac{1}{2i} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2) =$$

$$= \frac{1}{i} \sigma_1 \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 ;$$

e anàlogamente, $\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1$, $\sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2$.

3.12 As quatro matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, e qualquer matriz complexa $2 \times 2$ pode ser escrita como uma combinação linear de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e $1$.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $c_1, c_2, c_3, c$ são números complexos.

## 4. Parâmetros de Cayley-Klein.

Veremos adiante que é possível representar, de uma maneira muito simples, uma rotação, por meio de 4 parâmetros complexos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ chamados parâmetros de Cayley-Klein. Entre estes 4 números complexos (8 reais) podemos impor 5 condições, uma vez que só necessitamos de 3 para caracterizar a rotação.

Consideremos então uma matriz $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Esta matriz poderia *eventualmente* ser empregada para operar sobre entidades do tipo $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ onde $u$ e $v$ são números complexos: $\left[ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \text{spinor} \right]$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha u + \beta v \\ \gamma u + \delta v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases}$$

Queremos dar um jeito que torne possível $\mathbf{Q}$ representar uma rotação. Para isto $\mathbf{Q}$ deveria actuar sobre os vectores. Mas, $\mathbf{Q}$ sendo $2 \times 2$, não pode operar sobre um vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Teríamos que construir uma matriz $2 \times 2$, que pudesse representar o vector. Ora, isto nos é fornecido pelo parágrafo precedente, onde, ao vector $\vec{x}$, associamos a matriz $\mathbf{X}$.

O vector transformado $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{X}$ seria $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - i x'_2 \\ x'_1 + i x'_2 & - x'_3 \end{pmatrix}$.

Faremos $\mathbf{Q}$ actuar sobre $\mathbf{X}$ na forma:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^{-1} \tag{14}$$

Porque isto é conveniente? A razão disto é que o determinante de $\mathbf{X}$ é $-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Tirando o determinante da equação (14) teremos:

$$\begin{gathered} \det \mathbf{X}' = \det \mathbf{Q} \cdot \det \mathbf{X} \cdot (\det \mathbf{Q})^{-1} = \det \mathbf{X} \\ - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = - (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \end{gathered} \tag{15}$$

isto é a transformação (14) conserva $\vec{x}^2$, como é preciso.

Por outro lado, como sabemos de 3.1, a realidade do vector $\vec{x}$ é assegurada pela hermiticidade da matriz $\mathbf{X}$. Para que $\vec{x}'$ seja também real é necessário que $\mathbf{X}'$ seja hermiteana. Para que isto aconteça é conveniente escolher $\mathbf{Q}$ unitária, pois, sendo $\mathbf{Q}$ unitária teremos $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{+}$ e então:

$$\begin{gathered} \mathbf{X}' = \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^{+} \therefore \mathbf{X}'^{+} = [\mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^{+}]^{+} = \\ = (\mathbf{Q}^{+})^{+} \mathbf{X}^{+} \mathbf{Q}^{+} = \mathbf{Q} \mathbf{X}^{+} \mathbf{Q}^{+} = \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^{+} = \mathbf{X}' \therefore \mathbf{X}'^{+} = \mathbf{X}' \end{gathered} \tag{16}$$

Vemos assim que, se $\mathbf{Q}$ é unitária, o transformado de um «vector» real é também real. A escolha de $\mathbf{Q}$ unitária é pois conveniente porque conserva a realidade do vector $\vec{x}'$, se $x$ é real. (Veja 3.1).

### 5) Forma de Q

A unitariedade de $\mathbf{Q}$ impõe relações entre os 4 números complexos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Por razões que não vamos expôr, podemos escolher a matriz $\mathbf{Q}$ do tipo:

$$(17) \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

Qual a condição que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ deve satisfazer para que seja unitária?

$$(18) \qquad \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^+ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* & 0 \\ 0 & \alpha\alpha^* + \beta\beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$

Portanto: para $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ ser unitária é necessário e suficiente que $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ isto é, que $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = 1$.

Assim teremos: $\mathbf{Q}$ é caracterisada por 2 números complexos $\alpha$ e $\beta$ (4 reais), entre os quais existe uma relação (18). Teremos, assim sòmente 3 números reais livres que são o necessário e suficiente para resolver o nosso problema.

### 6. Desenvolvimento de Q como uma combinação linear de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 1$.

$$(19) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando o item 3.12 teremos:

$$(20) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + a\,1$$

onde $a_1, a_2, a_3, a$, são 4 números complexos. Dada a particular forma de $\mathbf{Q}$ que estamos usando, é fácil de ver (verificar como exercício usando (19)) que $a_1, a_2, a_3$ são imaginários puros e $a$ é real. Teremos então:

$$(21) \quad \mathbf{Q} = i\,(b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3) + b\,1 = i\,\mathbf{B} + b$$

onde $b_1, b_2, b_3, b$ são reais e $\mathbf{B} = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 = \vec{b}\cdot\vec{\sigma}$ é, no formalismo de CARTAN, a matriz $2\times 2$ associada ao vector real $\vec{b}$ (veja item 3.5). É fácil de ver que valem as expressões:

$$(22) \quad \begin{cases} b = \dfrac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \\ b_1 = \dfrac{1}{2i}(\beta - \beta^*) \\ b_2 = \dfrac{1}{2}(\beta + \beta^*) \\ b_3 = \dfrac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) \end{cases}$$

Exercício: verificar (22) usando (19).

A condição $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ pode ser traduzida em termos dos $b's$; usando (22) teremos:

$$(23) \qquad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b^2 = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$

Podemos considerar $b_1, b_2, b_3$ como independentes e $b$ como função dos $b_i$.

Com isto estamos armados para tratar o problema da representação da rotação.

### 7. Representação das rotações.

TEOREMA: *A transformação* $\mathbf{X}' = \mathbf{Q}\,\mathbf{X}\,\mathbf{Q}^+$, *onde* $\mathbf{Q} = \mathrm{i}\,\mathbf{B} + \mathrm{b} = \mathrm{i}\,\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\sigma} + \mathrm{b}$,

$\mathbf{X} = \vec{\mathrm{x}}\cdot\vec{\sigma} = \mathrm{x}_1\sigma_1 + \mathrm{x}_2\sigma_2 + \mathrm{x}_3\sigma_3 =$ *matriz* $2\times 2$ *associada ao vector* $\vec{\mathrm{x}}$,

$\mathbf{X}' = \vec{\mathrm{x}}'\cdot\vec{\sigma} = \mathrm{x}'_1\sigma_1 + \mathrm{x}'_2\sigma_2 + \mathrm{x}'_3\sigma_3 =$ *matriz* $2\times 2$ *associada ao vector* $\vec{\mathrm{x}}'$,

*representa uma rotação com:*

*1.º) eixo de rotação na direcção do vector* $\vec{\mathrm{b}} = \mathrm{b}_1\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{b}_2\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{b}_3\vec{\mathrm{k}}$.

*2.º) ângulo de rotação, no sentido dextrógiro com respeito a* $\vec{\mathrm{b}}$, *dado por* $\operatorname{sen}\Phi/2 = |\vec{\mathrm{b}}|$ (*nota:* $\mathrm{b} \neq |\vec{\mathrm{b}}|$).

Para demonstrar este teorema podemos usar os resultados do parágrafo 3.

LEMA 7.1 *A transformação* $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^+$ *deixa invariante* $\mathsf{X}^2$, isto é $\mathsf{X}'^2 = \vec{x}' \cdot \vec{x}' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{X}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*Prova:* Calcule $\mathsf{X}'^2 = (\mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^+)(\mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^+)$, use a unitariedade de $\mathsf{Q}$ e a propriedade 3.8.

LEMA 7.2 *Para provar que* $\vec{\mathrm{b}}$ *é o eixo de rotação basta provar que o transformado* $\mathsf{B}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{B}\,\mathsf{Q}^+$ *do «vector»* $\mathsf{B}$ *(associado a* $\vec{\mathrm{b}}$*) coincide com* $\mathsf{B}$.

*Prova:* Calcule $\mathsf{B}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{B}\,\mathsf{Q}^+ = (i\mathsf{B} + b)\,\mathsf{B}(-i\mathsf{B} + b)$ e use a propriedade 3.8: $\mathsf{B}^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, notando que $\mathsf{B}^2$ comuta com $\sigma_1, \sigma_2$ e $\sigma_3$.

LEMA 7.3 *Sendo* $\vec{\mathrm{b}}$ *o eixo de rotação, se* $\vec{\mathrm{x}} \perp \vec{\mathrm{b}}$, *o transformado* $\vec{\mathrm{x}}'$ *de* $\vec{\mathrm{x}}$ *deverá ser perpendicular a* $\vec{\mathrm{b}}$. *Em termos das matrizes de* CARTAN:

*Se* $\frac{1}{2}(\mathsf{X}\,\mathsf{B} + \mathsf{B}\,\mathsf{X}) = \vec{\mathrm{x}} \cdot \vec{\mathrm{b}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ então $\frac{1}{2}(\mathsf{X}'\,\mathsf{B} + \mathsf{B}\,\mathsf{X}) = 0$, *onde* $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^+$.

LEMA 7.4 *Para calcular o ângulo de rotação, basta calcular o produto escalar dos vectores* $\vec{\mathrm{x}}$ *e* $\vec{\mathrm{x}}'$ *do lema anterior:* $\vec{\mathrm{x}} \cdot \vec{\mathrm{x}}' = \frac{1}{2}(\mathsf{X}\,\mathsf{X}' + \mathsf{X}'\,\mathsf{X})$.

É fácil de ver que:

$$\cos\Phi = -\mathsf{B}^2 + b^2 = -(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + b^2 \tag{24}$$

$$= 1 - 2\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \tag{25}$$

uma vez que $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b^2 = 1$, (23).

*Nota*: A realidade do ângulo $\Phi$ de rotação é assegurada pela condição (23): $\mathsf{B}^2 + b^2 = 1$; pondo $b^2 = \cos^2\alpha$ e $\mathsf{B}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$ teremos:

$$b^2 - \mathsf{B}^2 = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\,\alpha) \tag{26}$$

Comparando (24) com (26) vemos que $2\alpha = \Phi$ ou $\alpha = \Phi/2$ donde:

$$b = \cos\alpha = \cos\Phi/2 \ \text{ e } \ +\sqrt{\mathsf{B}^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = |\vec{b}| = \operatorname{sen}\Phi/2 \tag{27}$$

*Resumindo:* $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^+$ com $\mathsf{Q} = i\mathsf{B} + b = i\vec{b} \cdot \vec{\sigma} + b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ representa uma rotação com eixo $\vec{b}$ e ângulo $\Phi$ dado por $\operatorname{sen}(\Phi/2) = |\vec{b}|$.

Observação: o problema dos sinais será discutido no artigo II.

Aqui convém compararmos $\mathsf{Q}$ com os quaterniões. Colocando $i = \sqrt{-1}\,\sigma_1$, $j = \sqrt{-1}\,\sigma_2$, $k = \sqrt{-1}\,\sigma_3$ as propriedades das matrizes de PAULI do parágrafo 3 nos darão: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ijk = 1$ etc., que são as propriedades necessárias para construirmos um quaternião. Teremos então:

$$\mathsf{Q} = i\,(b_1\,\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\,\sigma_3) + b \cdot 1 = b \cdot 1 + b_1\,i + b_2\,j + b_3\,k \tag{28}$$

Vemos assim, em suma, que a álgebra dos quaterniões é a álgebra das matrizes $2 \times 2$ complexas.

Do ponto de vista prático, uma forma muito empregada de $\mathsf{Q}$ é a seguinte: em $\mathsf{Q} = b + i\sigma \cdot b$ notando que $|\vec{b}| = \operatorname{sen}\Phi/2$ e $b = \cos\Phi/2$ teremos:

$$\mathsf{Q} = \cos(\Phi/2) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\Phi/2)\,\vec{\sigma} \cdot \vec{g} = e^{i\frac{\Phi}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{q}} \tag{29}$$

onde $\vec{g} \equiv \dfrac{\vec{b}}{\operatorname{sen}\Phi/2} \equiv$ versor do eixo de rotação. Para verificar a relação (29), formalmente, basta desenvolver $e^{i\frac{\Phi}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}$ em série de potências de $\Phi$, notando que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})^2 = \vec{g}^2 = 1$ e que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})^3 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{q})$.

Finalmente queremos, a título de informação, encaixar aqui um conceito muito importante: o de spinor.

Um vector $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i\,x_2 \\ x_1 + i\,x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$ se transforma pela lei: $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^{-1}$; chamaremos de *spinor* uma matriz coluna do tipo $s = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $u$ e $v$ são números complexos, e que, numa rotação se transforma pela lei: $s' = \mathsf{Q}\,s$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u' = \alpha\,u + \beta\,v \\ v' = \gamma\,u + \delta\,v \end{cases}$$

É possível estabelecer uma correspondência entre um triedro ortogonal e um spinor (11) (12).

Restam agora 2 problemas:

1) Dada a representação $(a_{ik})$ da rotação, determinar $\mathsf{Q}$, isto é, em termos geométricos, determinar o eixo e o ângulo de rotação.

2) Dada a matriz $\mathsf{Q}$ determinar a matriz $(a_{ik})$, isto é, dado o eixo e o ângulo de rotação determinar $(a_{ik})$.

Estes 2 problemas, com a respectiva discussão sobre os sinais, serão examinados no próximo artigo II, em que trataremos também o problema das reflexões e simetrias.

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
SÃO PAULO, S. P. — BRASIL

(11) Veja CARTAN — loc. cit.

(12) O conceito de spinor é da maior importância prática em física teórica, pois as partículas com spin 1/2, isto é com o momento angular intrínseco, são usualmente descritas por funções de onda do tipo $\psi = \begin{pmatrix} u\,(x\,y\,z) \\ v\,(x\,y\,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ se transforma como um spinor.

# Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

*por* **Luís G. M. de Albuquerque**

**(Conclusão)**

## 11. Observações e exemplos.

O teorema da existência da melhor aproximação $x_0$ de $y \in E$ numa variedade linear $V \subset E$, demonstrado para o caso de ser $E$ um espaço vectorial normado (§ 7), não é construtivo nem foi possível até hoje estabelecer um método geral para a determinação de $x_0$ em tais espaços.

TATARKIEWICZ e SINGER, o primeiro estudando as propriedades do conjunto dos elementos $x_0$ (para qualquer $y \in E$) e o segundo passando ao espaço $E^*$ das funcionais lineares definidas em $E$, procuraram recentemente resolver este problema em espaços de BANACH quaisquer. Se é certo que os resultados atingidos pelo segundo dão, como casos particulares, alguns teoremas já encontrados para certos espaços conhecidos, é também verdade que o alcance das conclusões obtidas é limitado enquanto se não entra na concretização de $E$.

O leitor interessado poderá informar-se sobre a situação actual do problema nos trabalhos citados na bibliografia sob os números [1], [6] e [7].

Passaremos agora a enumerar como exemplos alguns dos casos mais importantes da teoria da aproximação funcional, com o que se encerrará esta exposição.

I. APROXIMAÇÃO POR POLINÓMIOS TRIGONOMÉTRICOS. No espaço de HILBERT completo $L^2[-\pi, \pi]$ (ver § 5, exemplo VI), tome-se a variedade linear $V$ gerada pelos vectores

$$x_k = \sin k\,t \qquad (k = 1, 2, \cdots m).$$