Um vector $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$ se transforma pela lei: $\mathsf{X}' = \mathsf{Q}\,\mathsf{X}\,\mathsf{Q}^{-1}$; chamaremos de *spinor* uma matriz coluna do tipo $s = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $u$ e $v$ são números complexos, e que, numa rotação se transforma pela lei: $s' = \mathsf{Q}\,s$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases}$$

É possível estabelecer uma correspondência entre um triedro ortogonal e um spinor (11) (12).

Restam agora 2 problemas:

1) Dada a representação $(a_{ik})$ da rotação, determinar $\mathsf{Q}$, isto é, em termos geométricos, determinar o eixo e o ângulo de rotação.

2) Dada a matriz $\mathsf{Q}$ determinar a matriz $(a_{ik})$, isto é, dado o eixo e o ângulo de rotação determinar $(a_{ik})$.

Estes 2 problemas, com a respectiva discussão sobre os sinais, serão examinados no próximo artigo II, em que trataremos também o problema das reflexões e simetrias.

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
SÃO PAULO, S. P. — BRASIL

(11) Veja Cartan — loc. cit.

(12) O conceito de spinor é da maior importância prática em física teórica, pois as partículas com spin 1/2, isto é com o momento angular intrínseco, são usualmente descritas por funções de onda do tipo $\psi = \begin{pmatrix} u(xyz) \\ v(xyz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ se transforma como um spinor.

# Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por Luís G. M. de Albuquerque

(Conclusão)

## 11. Observações e exemplos.

O teorema da existência da melhor aproximação $x_0$ de $y \in E$ numa variedade linear $V \subset E$, demonstrado para o caso de ser $E$ um espaço vectorial normado (§ 7), não é construtivo nem foi possível até hoje estabelecer um método geral para a determinação de $x_0$ em tais espaços.

Tatarkiewicz e Singer, o primeiro estudando as propriedades do conjunto dos elementos $x_0$ (para qualquer $y \in E$) e o segundo passando ao espaço $E^*$ das funcionais lineares definidas em $E$, procuraram recentemente resolver este problema em espaços de Banach quaisquer. Se é certo que os resultados atingidos pelo segundo dão, como casos particulares, alguns teoremas já encontrados para certos espaços conhecidos, é também verdade que o alcance das conclusões obtidas é limitado enquanto se não entra na concretização de $E$.

O leitor interessado poderá informar-se sobre a situação actual do problema nos trabalhos citados na bibliografia sob os números [1], [6] e [7].

Passaremos agora a enumerar como exemplos alguns dos casos mais importantes da teoria da aproximação funcional, com o que se encerrará esta exposição.

I. Aproximação por Polinómios Trigonométricos. No espaço de Hilbert completo $L^2[-\pi, \pi]$ (ver § 5, exemplo VI), tome-se a variedade linear $V$ gerada pelos vectores

$$x_k = \sin k\,t \qquad (k = 1, 2, \cdots m).$$

Atendendo à expressão (5.7) do produto escalar, tem-se:

$$(x_k\,,x_j)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin k\,t\cdot\sin j\,t\,d\,t=\begin{cases}0 \text{ se } k\neq j\\ \pi \text{ se } k=j\end{cases}$$

Consideremos a função $y(t)\in L^2[-\pi\,,\pi]-V$. As equações do sistema

$$(y\,,x_k)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^0\cdot(x_i\,,x_k)=0\qquad(k=1\,,\cdots m),$$

que determina as componentes $\alpha_i^0$ da melhor aproximação $y_0(t)$ de $y(t)$ em $V$, simplificam-se neste caso, tomando a forma:

$$(y\,,x_k)=\pi\cdot\alpha_k^0\,.$$

Assim, é:

$$\alpha_k^0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cdot\sin k\,t\cdot d\,t$$

e, portanto:

$$y_0(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sin k\,t\cdot\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cdot\sin k\,t\;d\,t\,.$$

Se no mesmo espaço $L^2[-\pi\,,\pi]$ tomarmos o sistema de vectores

$$1\,,\cos x\,,\sin x\,,\cdots,\cos m\,x\,,\sin m\,x$$

e o ortogonalizarmos, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos m x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin m x}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Seja $V'$ a variedade linear gerada por este sistema de vectores, e de novo se considere uma função $y(t)\in L^2[-\pi\,,\pi]-V'$. A melhor aproximação de $y(t)$ em $V'$ tem as componentes (ver § 8):

$$\alpha_j^0=(y\,,x_j)\qquad(j=1\,,2\,,\cdots,2\,m+1)$$

onde é $(k=1\,,2\,,\cdots,m)$:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,,x_{2k}=\frac{\cos k\,x}{\sqrt{2\,\pi}}\,,x_{2k+1}=\frac{\sin k\,x}{\sqrt{2\,\pi}}\,,$$

isto é:

$$\alpha_1^0=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)d\,t\,;\alpha_{2k}^0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos k\,t\,d\,t$$

e

$$\alpha_{2k+1}^0=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}y\,(t)\sin k\,t\,\mathrm{dt}\,,$$

que são os primeiros coeficientes de Fourier relativos à função $y(t)$. Assim, a melhor aproximação $y_0(t)$ de $y(t)$ em $V'$ é dada por:

$$y_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)d\,t+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}\left(\cos k\,t\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos k\,t\,d\,t+\right.$$
$$\left.+\sin k\,t\int_{-\pi}^{\pi}y\,(t)\sin k\,t\,d\,t\right).$$

Chamando, como é habitual, polinómio trigonométrico de ordem $m$ a qualquer dos elementos da variedade linear $V'$, podemos dizer que: *a melhor aproximação de qualquer* y (t) e L²[− π , π] *dada por um polinómio trigonométrico de ordem* m *é construída com os coeficientes de* Fourier *respeitantes àquela função.*

II. O Teorema de Haar. Seja $C$ o espaço das funções contínuas definidas sobre o conjunto limitado e fechado $D$ (Ver exemplo II, §§ 3 e 4); e

$$x_i(t)\in C\qquad(i=1\,,2\,,\cdots,m)$$

$m$ funções linearmente independentes de $C$, gerando a variedade linear $V$. Como $C$ é um espaço linear normado, considerando a função $y\,(t)=C-V$ existe (Teorema de existência, § 7) em $V$ ao menos um elemento

$$y_0(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^0\cdot x_k\,(t)\in V$$

à mínima distância de $y\,(t)$

$$\sup_{t\in D}|\,y\,(t)-y_0\,(t)\,|=$$

$$= \inf_{\alpha_k} \sup_{t \in D} \left| y(t) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot x_k(t) \right| .$$

O teorema de HAAR dá as condições em que a melhor aproximação é única, e enuncia-se deste modo:

TEOREMA. *A melhor aproximação de* y(t) *em* V *é única, quando cada elemento da variedade linear* V *não tem em* D *mais do que* m − 1 *raízes distintas* (1).

O teorema aplica-se, em particular, quando se considera o caso da variedade linear de $C$ constituída pelas funções linearmente independentes $1, t, t^2, \cdots t^{m-1}$. É usado com êxito no problema da solução aproximada de um sistema incompatível de um número infinito de equações lineares (2).

III. O PROBLEMA DE TCHEBICHEV. Consideremos o intervalo $[a, b]$ e os polinómios

$$A(x) = a_0 x^{m-\mu} + \cdots + a_{m-\mu} \quad (a_0 \neq 0)$$
$$B(x) = b_0 x^{n-\nu} + \cdots + b_{n-\nu},$$

não tendo o primeiro zeros naquele intervalo. Com $\varphi(x) \in C[a, b]$, considere-se o conjunto $\mathfrak{R}$ das funções

$$R(x) = \varphi(x) \cdot \frac{B(x)}{A(x)} .$$

Dada qualquer função $f(x) \in C[a, b]$ o problema de TCHEBICHEV consiste em saber se existe (e no caso afirmativo, construí-la) uma função $R_0(x) \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - R_0(x)| =$$
$$= \min_{R(x) \in \mathfrak{R}} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - R(x)| = \delta(f, \mathfrak{R})$$

(1) HAAR demonstrou este teorema em «Die Minkowski Geometrie und die Annahrung an stetige Funktion», in *Math. Ann.*, 78 (1918). Ver ACHIESER *Vorlesungen über Appr.*, ed. cit., pag. 67 e ss.

(2) ACHIESER, *op. cit.*

TCHEBICHEV provou que (1):

*a*) existe sempre uma função $R_0(x) \in \mathfrak{R}$ nas condições exigidas;

*b*) aceites como indistintas as fracções $\frac{B(x)}{A(x)}$ com a mesma expressão mais simples, $R_0(x)$ é única e caracterizada pela seguinte propriedade: *a sucessão de pontos de* [a, b] *onde a diferença* $f(x) - R_0(x)$ *toma o valor* $\delta(f, R)$ *com sinais alternados não pode ser excedido pelo número* m + n + 2 − d, *com* d = *min.* $(\mu, \nu)$.

No caso particular de $A(x) \equiv 1$, cai-se na determinação da melhor aproximação de funções contínuas por polinómios de *determinado grau* (em dado intervalo $[a, b]$).

Seja $f(x) \in C[a, b]$ e designemos por $\pi_n$ o conjunto dos polinómios de grau $n$ e coeficientes reais:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n ;$$

pode ser $a_0 = 0$, e portanto

$$\pi_0 \subset \pi_1 \subset \cdots \subset \pi_n \subset \cdots ;$$

sendo

$$(11.1) \quad 0 < \Delta_n = \inf_{P \in \pi_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)|$$

tem-se

$$\Delta_0 \geqslant \Delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \Delta_n \geqslant \cdots$$

e um teorema de WEIERSTRASS (2) estabelece que:

$$\lim_n \Delta_n = 0 ;$$

e assim, fixado $\varepsilon > 0$, é sempre possível escolher um número $n_0(\varepsilon)$ e um polinómio de grau $n > n_0(\varepsilon)$ de tal modo que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_0(x)| < \varepsilon$$

O ponto de vista de TCHEBICHEV era, porém,

(1) ACHIESER, *op. cit.*, cap. 2.°.

(2) NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen,* Berlin, 1954, pág. 107 e ss.

diferente: interessava-lhe estudar, *para cada* $n$, a existência de um polinómio $P_0(x) \in \pi_n$ tal que

$$(11.2) \qquad \Delta_n = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_0(x)|$$

com $\Delta_n$ dado por (11.1).

Chamando *sucessão alternante* de TCHEBICHEV em $[a,b]$ e relativa a um polinómio $P(x) \in \pi_n$ qualquer sucessão (finita)

(11.3) $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < x_{n+2}, x_i \in [a,b]$

onde a diferença $P(x) - f(x)$ toma o valor comum $\Delta_n$ com sinais alternados, pode-se provar que:

1.º) *Em cada* $\pi_n$ *existe um e um só polinómio que verifica* (11.2) *e*

2.º) *Sendo*

$$\Delta_Q = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q(x)|$$

*para* $Q(x) \in \pi_n$, *se relativamente a este polinómio existe uma sucessão alternante* (11.3) *com* $n+2$ *pontos e tal que*

$|f(x_i) - Q(x_i)| = \Delta_Q \quad (i = 1, 2, \cdots, n+2)$

*então é* $\Delta_Q = \Delta_n$ *e* $Q(x)$ *é o polinómio de melhor aproximação:* $Q(x) \equiv P_0(x)$ (*).

Este resultado, se ainda não aponta um método de rotina para a determinação de $P_0(x)$, pode orientar o caminho que leva a construir aquele polinómio. Vamos concretizar esta afirmação procurando o polinómio de 1.º grau que é melhor aproximação da função $f(x) \in C[a,b]$, supondo esta duas vezes derivável e com sinal constante (por exemplo: $f''(x) > 0$) em $[a,b]$.

Seja $P(x) = Ax + B$, com os coeficientes $A$ e $B$ a determinar, o polinómio de melhor aproximação, e $x_1 < x_2 < x_3$ a sucessão alternante a respeito de $P(x)$, tendo-se certamente $x_2 \in (a,b)$. Como a diferença $f(x) - P(x)$ é máxima ou mínima nos pontos da sucessão alternante e $x_2$ é um ponto interior de $[a,b]$, tem-se:

$$f'(x_2) - P'(x_2) = 0$$

donde resulta

$$(11.4) \qquad A = f'(x_2)$$

Como $f''(x) > 0$ em $[a,b]$, é $f'(x)$ monótona crescente nesse intervalo, e só uma vez pode nele atingir o valor $A$; e como se existisse algum outro extremante $x_0$ de $f(x) - P(x)$ interior ao intervalo, ele imporia, como $x_2$, $f'(x_0) = A$, segue-se que os outros pontos da sucessão alternante são $a$ e $b$, isto é

$$x_1 = a < x_2 < x_3 = b.$$

Sendo $f''(x) > 0$ em $[a,b]$, o extremo atingido em $x_2$ é com certeza um mínimo; $f(x) - P(x)$ tem portanto máximos em $a$ e $b$, e fica

$$f(a) - Aa - B = f(b) - Ab - B = \\ = -|f(x_2) - P(x_2)|$$

e portanto

$$A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad B = \frac{f(a)+f(x_2)}{2} - \\ - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{a+x_2}{2}$$

e sendo $x_2 \in [a,b]$ determinado pelo teorema de LAGRANGE, pois (11.4) e a primeira destas últimas igualdades mostram que

$$f'(x_2) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(como exemplo o leitor pode aplicar estas indicações ao caso de ser $f(x) = \sqrt{x}$, em $[0,1]$; o polinómio obtido será $P(x) = x + \frac{1}{8}$).

IV. PROBLEMA PROPOSTO. As funções esféricas principais de ordem $l$, $Y_l^m(\theta, \varphi)$ $(m = -l, \cdots, +l)$, definidas sobre a esfera

(*) NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlim, 1955, Cap. 2.º.

de centro na origem e raio unitário (e cujo quadrado do valor absoluto é integrável), são dadas por

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \cdot F_l^m(\theta)$$

onde $F_l^m(\theta)$ estão relacionadas com os polinómios e as funções associadas de LEGENDRE. As funções $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são base (orto-normada) de uma variedade linear $V$ do espaço $E$ das funções de quadrado integrável definidas naquela superfície esférica, onde foi introduzido um produto escalar por $(f, g \in E)$

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \cdot \overline{g(\theta, \varphi)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Construir a melhor aproximação de $f \in E$ em $V$(*).

(*) Sugere-se a leitura de I. M. GELFAND e Z. Ya. SAPIRO, «Representations of the group of rotations in three-dimensional space and their applications», *Amer. Math. Soc. Translations*, Vol. 2 (1956), pag. 207 e ss., principalmente § 3.

### BIBLIOGRAFIA


[1] N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Berlin, 1953.

[2] G. FREUD, «Über einseitige Approxim. durch Polynome», *Acta Sc. Math.*, 16 (1955), p. 12.

[3] P. R. HALMOS, *Finite dimensional vector space*, Princeton, 1948.

[4] P. R. HALMOS, *Introduction to* HILBERT *space and the theory of spectral multiplicity*, New-York, 1951.

[5] L. A. LJUSTERNIK e W. L. SOBOLEW, *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, 1955.

[6] I. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin, 1955.

[7] I. SINGER, «Caracterisation des éléments de meilleure approximation...», *Acta Math. Sc.*, 17 (1956), pag. 181.

[8] I. SINGER, «Supra unicitatii elementerlui de cea mai buna aproximatie in spatii BANACH oarecare», *Studii sier. Math.*, 8 (1957), pag. 235.

[9] K. TATARKIEWICZ, «Une théorie géneralisée de la meilleure approximation», *Ann. Univ. Marie--Curie Sklodowska*, A, 6 (1952), pag. 19.


# MOVIMENTO MATEMÁTICO

## 3.ª ASSEMBLEIA GERAL DA UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS 1958

De 1 a 13 de Agosto de 1958 teve lugar na cidade escocesa de St. Andrews a 3.ª Assembleia Geral da União Matemática Internacional. Entre os numerosos assuntos discutidos, tratou-se dos planos de futuras actividades (tais como intercâmbio de matemáticos, publicações científicas, ensino matemático, congressos e simpósios, etc.), da revisão dos estatutos e da eleição do novo Comité Executivo, que ficou assim constituído: Presidente, R. NEVANLINNA; Vice-Presidentes, P. ALEXANDROFF e M. MORSE; Secretário, B. ECKMANN; outros membros: K. CHANDRASEKHARAN, C. CHOQUET, K. KNESER, J. F. KOKSMA e C. KURATOWSKI. Foi delegado português a esta Assembleia o signatário.

Seguidamente, de 13 a 21 de Agosto, efectuou-se em Edimburgo o Congresso Internacional de Matemáticos, que decorreu com a animação e o nível peculiares a estes congressos (cerca de 2.000 congressistas). Os trabalhos repartiram-se pelas seguintes secções: I) Lógica e fundamentos; II A) Álgebra; II B) Teoria dos números; III A) Análise clássica; III B) Análise funcional; IV) Topologia; VA) Geometria algébrica; V B) Geometria diferencial; VI) Probabilidades e Estatística; VII A) Matemática aplicada; VII B) Física Teórica; VII C) Análise numérica; VIII) História e Educação. Foram expostas quatro comunicações por congressistas portugueses: *Idéaux demi--premiers; $\mu$ et p−systèmes d'idéaux* (A. ALMEIDA COSTA); *Homomorphisms of modular systems* e *Estimation by the minimum discrepancy method* (J. TIAGO DE OLIVEIRA); *Deux généralisations successives de la notion de distribution* (J. S. E SILVA).

O próximo congresso terá lugar, provàvelmente, em Estocolmo (1962).

J. S. e Silva