de centro na origem e raio unitário (e cujo quadrado do valor absoluto é integrável), são dadas por

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\cdot F_l^m(\theta)$$

onde $F_l^m(\theta)$ estão relacionadas com os polinómios e as funções associadas de LEGENDRE. As funções $Y_l^m(\theta,\varphi)$ são base (orto-normada) de uma variedade linear V do espaço E das funções de quadrado integrável definidas naquela superfície esférica, onde foi introduzido um produto escalar por $(f, g \in E)$

$$(f,g)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\cdot\overline{g(\theta,\varphi)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Construir a melhor aproximação de $f\in E$ em V(*).

(*) Sugere-se a leitura de I. M. GELFAND e Z. YA. SAPIRO, «Representations of the group of rotations in three-dimensional space and their applications», *Amer. Math. Soc. Translations*, Vol. 2 (1956), pag. 207 e ss., principalmente § 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Berlin, 1953.

[2] G. FREUD, «Über einseitige Approxim. durch Polynome», *Acta Sc. Math.*, 16 (1955), p. 12.

[3] P. R. HALMOS, *Finite dimensional vector space*, Princeton, 1948.

[4] P. R. HALMOS, *Introduction to* HILBERT *space and the theory of spectral multiplicity*, New-York, 1951.

[5] L. A. LJUSTERNIK e W. L. SOBOLEW, *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, 1955.

[6] I. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin, 1955.

[7] I. SINGER, «Caracterisation des éléments de meilleure approximation...», *Acta Math. Sc.*, 17 (1956), pag. 181.

[8] I. SINGER, «Supra unicitatii elementerlui de cea mai buna aproximatie in spatii BANACH oarecare», *Studii sier. Math.*, 8 (1957), pag. 235.

[9] K. TATARKIEWICZ, «Une théorie géneralisée de la meilleure approximation», *Ann. Univ. Marie-Curie Sklodowska*, A, 6 (1952), pag. 19.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

3.ª ASSEMBLEIA GERAL DA UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS 1958

De 1 a 13 de Agosto de 1958 teve lugar na cidade escocesa de St. Andrews a 3.ª Assembleia Geral da União Matemática Internacional. Entre os numerosos assuntos discutidos, tratou-se dos planos de futuras actividades (tais como intercâmbio de matemáticos, publicações científicas, ensino matemático, congressos e simpósios, etc.), da revisão dos estatutos e da eleição do novo Comité Executivo, que ficou assim constituído: Presidente, R. NEVANLINNA; Vice-Presidentes, P. ALEXANDROFF e M. MORSE; Secretário, B. ECKMANN; outros membros: K. CHANDRASEKHARAN, C. CHOQUET, K. KNESER, J. F. KOKSMA e C. KURATOWSKI. Foi delegado português a esta Assembleia o signatário.

Seguidamente, de 13 a 21 de Agosto, efectuou-se em Edimburgo o Congresso Internacional de Matemáticos, que decorreu com a animação e o nível peculiares a estes congressos (cerca de 2.000 congressistas). Os trabalhos repartiram-se pelas seguintes secções: I) Lógica e fundamentos; II A) Álgebra; II B) Teoria dos números; III A) Análise clássica; III B) Análise funcional; IV) Topologia; V A) Geometria algébrica; V B) Geometria diferencial; VI) Probabilidades e Estatística; VII A) Matemática aplicada; VII B) Física Teórica; VII C) Análise numérica; VIII) História e Educação. Foram expostas quatro comunicações por congressistas portugueses: *Idéaux demi-premiers; μ et p–systèmes d'idéaux* (A. ALMEIDA COSTA); *Homomorphisms of modular systems* e *Estimation by the minimum discrepancy method* (J. TIAGO DE OLIVEIRA); *Deux généralisations successives de la notion de distribution* (J. S. E SILVA).

O próximo congresso terá lugar, provàvelmente, em Estocolmo (1962).

J. S. e Silva

XXIV CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIENCIAS

Realizou-se em Madrid, de 14 a 19 de Novembro de 1958, o XXIV Congresso Luso Espanhol para o progresso das Ciências.

Os trabalhos da secção de matemática, que reuniu na ausência do presidente designado (Prof. JÚLIO REY PASTOR), iniciaram-se com um discurso inaugural do prof. Dr. JOSÉ M. ORTS, que se ocupou das *Directrices actuales de los estudios e investigaciones sobre la teoría de las funciones en la Peninsula Iberica*.

Foram apresentadas cerca de três dezenas de comunicações de matemáticos espanhois e portugueses, por vezes discutidas com muito interesse.

Pela parte espanhola colaboraram neste congresso, entre outros, os professores SAN JUAN, PI CALLEJA, RODRIGUEZ SALINAS E GARCIA RODEJA. A representação portuguesa, presidida pelo Prof. Dr. VICENTE GONÇALVES, apresentou estudos dos Profs. Drs. ALMEIDA COSTA, SEBASTIÃO E SILVA, RIOS DE SOUSA E J. P. PACHECO DE AMORIM, E DE J. TIAGO DE OLIVEIRA, PEDRO BRAUMANN, GUSTAVO DE CASTRO, SANTOS GUERREIRO, CAMPOS FERREIRA e LUIZ ALBUQUERQUE.

L. M. Albuquerque

A 7.ª OLIMPIADA DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS DAS ESCOLAS SECUNDÁRIAS DA POLÓNIA

Revistas norte-americanas, nestes últimos anos, tem mostrado interesse pela preparação matemática dada aos alunos das escolas secundárias da Russia e da Polónia, países com organisação análoga quanto a estudos científicos e de preparação para a investigação. Em especial as revistas «The American Mathematical Monthly» e «The Mathematics Teacher» publicaram em 1957 e 1958, respectivamente nos vol. 64, n.º 6 e vol. LI, n.º 8, os problemas saídos nas Olimpíadas de Matemática, na Russia (11.ª Olimpíada) e na Polónia (7.ª Olimpíada), e delas extraimos a presente notícia.

As Olimpíadas de Matemática, em qualquer daqueles dois países, destinam-se, como bem se compreende, a fazer uma selecção entre alunos de escolas secundárias com o intuito de os encaminharem para a investigação.

Os alunos são estimulados a produzir trabalho extra-escolar, para o que os próprios educadores organizam programas de actividades procurando desenvolver qualidades onde quer que elas existam. A actividade de *clubs* científicos contribue grandemente para esse fim.

A Polónia, país de tradições matemáticas, onde se faz efectivamente investigação e onde existe uma escola matemática bem conhecida, organisa as suas Olimpíadas colaborando nelas as escolas secundárias e superiores e a Sociedade Polaca de Matemática.

Para esse fim a Comissão Executiva da Olimpíada organizou sete Comissões Regionais nos distritos de Varsóvia, Krakov, Wroclau, Poznan, Torun, Lublin e Lodz. O Presidente da Comissão Regional de Varsóvia foi, na 7.ª Olimpíada, o notável matemático Professor W. Sierpinlky, decano dos matemáticos polacos.

A Olimpíada consiste em três provas.

A primeira realiza-se nas escolas locais.

A segunda, a que concorrem aqueles que obtiveram classificação *satisfatória* na prova anterior, realiza-se nas sete regiões dos distritos mencionados.

A terceira prova, (final), para a qual os concorrentes foram selecionados na segunda, é prestada em Varsóvia.

No final são distribuidos diplomas aos alunos vencedores e aos seus professores.

Alem destes diplomas recebem os vencedores prémios utilitários.

Na 7.ª Olimpíada polaca a primeira prova (preparatória), teve lugar no período de 1 de Outubro de 1955 a 10 de Janeiro de 1956, e a ela concorreram 1642 alunos, de escolas de educação geral (1379) e de escolas semiprofissionais (263).

À segunda prova, que se realizou em 2 e 3 de Março de 1956, compareceram 326 alunos, apurados na primeira prova.

À terceira e última, realizada em 16 e 17 de Abril de 1956, concorreram 59 dos 60 alunos classificados na segunda prova.

Damos a seguir, extraídos do n.º 8, vol. LI, Dezembro de 1958, da revista *The Mathematics Teacher*, os enunciados dos problemas propostos em cada uma das fases daquela 7.ª Olimpíada de Matemática.

PROBLEMAS DA 1.ª SÉRIE (preparatória) *

1. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$(x^3 + y^3)\ (x^2 + y^2) = 2\,a^5$$
$$x + y = a\,.$$

2. Prove que, para quaisquer dois inteiros a e b, o número

$$N = ab\,(a^2 - b^2)\ \ (a^2 + b^2)$$

é divisível por 30.

3. Num quadrado $A\,B\,C\,D$, da área S, une-se o vértice A com o ponto médio do lado $B\,C$, por meio de um segmento de recta, o vértice B com o ponto médio do lado $C\,D$, o vértice C com o ponto médio do lado $D\,A$, e o vértice D com o ponto médio do lado $A\,B$. Achar a área da parte do quadrado que contém o centro do quadrado.

4. Prove que os pontos médios dos segmentos de recta que unem o centro da circunferência inscrita num triângulo com os centros das três circunferências, cada uma das quais é tangente a um lado do triângulo e ao prolongamento dos outros dois lados, existem sobre a circunferência circunscrita ao triângulo.

5. Prove que, se os números reais p_1, p_2, q_1, q_2 verificam a igualdade

$$(1) \qquad p_1\,p_2 = 2\ \ (q_1 + q_2)$$

então pelo menos uma das equações

$$x^2 + p_1\,x + q_1 = 0\,, \qquad x^2 + p_2\,x + q_2 = 0$$

tem raizes reais.

6. Resolva a equação

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$$

7. São dados um rectângulo $A\,B\,C\,D$ e um ponto M no espaço tridimensional. Ache a distância $M\,D$, conhecidas as distâncias $M\,A$, $M\,B$, $M\,C$.

8. É dado um triângulo acutângulo $A\,B\,C$ e um ponto M do interior de um dos seus lados. Construir o triângulo de perímetro mínimo tal que um dos seus vértices seja o ponto M e os outros dois existam nos outros dois lados do triângulo.

9. Prove que pode construir-se um triângulo a partir de segmentos de comprimentos a, b, c, se e sòmente se

$$a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2 > \frac{1}{2}\,(a^4 + b^4 + c^4)\,.$$

10. Prove que se $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, e $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$, então

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1\,.$$

11. Num triângulo de lados a, b, c traçam-se os segmentos m, n, p tangentes à circunferência inscrita no triângulo, de modo que os seus extremos existam sobre os lados do triângulo e sejam paralelos respectivamente aos lados a, b, c.

Mostre que

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 1\,.$$

12. Prove que:

a) a soma das distâncias de um ponto arbitrário M, do interior ou dos lados de um triângulo equilátero, aos três lados do triângulo é constante, isto é, é independente da posição do ponto M no triângulo.

b) a soma das distancias de um ponto arbitrário, do interior ou da superfície de um tetraedro regular, às faces do tetraedro é constante.

* Os problemas de geometria deviam ser resolvidos sòmente com métodos da geometria sintética euclidiana (sem uso da geometria analítica).

PROBLEMAS DA 2.ª SÉRIE (regional)

1. Para que valores de m o polinómio $x^3 + y^3 + z^3 + m\,x\,y\,z$ é divisível por $x + y + z$?

2. Prove que se H é o ponto de intersecção das alturas de um triângulo escaleno $A\,B\,C$, então as circunferências circunscritas aos triângulos $A\,H\,B$, $B\,H\,C$, $C\,H\,A$ e $A\,B\,C$ são congruentes.

3. Um disco circular horizontal de densidade uniforme e peso Q kg apoia-se em três pontos A, B, C da circunferência do disco, sendo $A\,C = B\,C$ e $\sphericalangle A\,B\,C = 2\,\alpha$. Que peso x kg deve colocar-se na segunda extremidade D do diâmetro que passa por C, para que a pressão exercida pelo disco no apoio C seja igual a zero?

4. Prove que a equação $2\,x^2 - 215\,y^2 = 1$ não tem soluções inteiras.

5. Prove que os números A, B, C definidos pelas fórmulas $A = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + 5$, $B = \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha + 5$, $C = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + 5$, onde $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, satisfazem a desigualdade

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leq 4\sqrt{3}$$

6. Suponha que num tetraedro $ABCD$ os segmentos que unem os vértices do tetraedro com os centros das circunferências inscritas nas faces opostas se intersectam um ponto. Prove que

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC},$$

e que o recíproco do teorema é válido.

PROBLEMAS DA 3.ª SÉRIE (finais)

1. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$x^2y^2+x^2z^2=axyz$$
$$y^2z^2+y^2x^2=bxyz$$
$$z^2x^2+z^2y^2=cxyz\,.$$

2. Prove que se

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \tag{1}$$

e se n um número natural ímpar, arbitrário, então

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}\,. \tag{2}$$

3. Sobre uma recta são dados três pontos distintos M, D, H. Contruir um triângulo rectângulo para o qual M seja o ponto médio da hipotenusa; D o ponto de intersecção da bissectriz do ângulo recto com a hipotenusa; H o pé da altura relativa à hipotenusa.

4. Prove que se os números naturais a, b, c satisfazem a igualdade

$$a^2+b^2=c^2$$

então:

1) pelo menos um dos números a ou b é divisível por 3;
2) pelo menos um dos números a ou b é divisível por 4;
3) pelo menos um dos números a, b, c é divisível por 5.

5. Prove que qualquer polígono de perímetro $2a$ pode ser completamente coberto por um disco circular de diâmetro a.

6. É dada uma esfera de raio R e um plano α sem pontos comuns com a esfera. Seja S um ponto do plano α. Considere o cone de vértice S e tangente à esfera. Se C é o centro da circunferência de tangência, ache o lugar de C quando S se desloca livremente no plano α.

J. S. P.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS DE 1962

O Comité autorizado pela sessão plenária final do Congresso de Edinburgh para determinar o local do Congresso Internacional de 1962 aceitou o convite do Comité Nacional Sueco para a Matemática e da Sociedade Matemática Sueca redigido nos termos seguintes:

«Aos Matemáticos de todos os países:

O Comité Nacional Sueco para a Matemática e a Sociedade Matemática Sueca têm a honra de convidar-vos para o próximo Congresso Internacional de Matemáticos que terá lugar em Stockholm no Verão de 1962.

Faremos o possível por tornar o Congresso cientìficamente eficiente e agradável, desejando que esse facto estimule o intercâmbio cultural entre os matemáticos dos diferentes domínios da matemática e dos diferentes países».

Ake Pleijel
Presidente do Comité Nacional Sueco para a Matemática

Göran Borg
Presidente da Sociedade Matemática Sueca

B. Eckmann
Secretário da IMU

A Redacção da G. M. congratula-se com o facto de poder transmitir aos seus Leitores o convite anterior num momento em que ainda estão bem vivos os reflexos da última reunião congénere.

J. G. T.

CONGRESSOS, REUNIÕES E INTERCAMBIO CIENTÍFICO

O Ano Geofísico Internacional, iniciado em Julho de 1957, depois de cinco anos de preparação, é o exemplo mais flagrante de uma ampla cooperação científica internacional, jamais realizada, se bem que limitada, a um domínio relativamente restrito. O seu sucesso extraordinário põe perante todos os cientistas, professores e educadores, o dever de algumas reflexões, públicas ou íntimas, mas necessárias, sobre o interesse de realizações deste tipo ou de outro semelhante.

Os cientistas, professores e educadores da época actual estão firmemente convictos, por evidência, de que o lugar comum «a ciência não conhece fronteiras» aplica-se singèlamente não só à interpretação directa de que os conhecimentos científicos não podem ser do domínio dum só país ou dum conjunto de países mas também à generalização imediata deste princípio: mesmo dentro dum grupo nacional, é impossível, além de anacrónico, a limitação de acesso democrático a todos os lugares, a todos os postos.

A ciência situa-se acima das lutas violentas que dividem os homens e, por esse mesmo facto, é um dos mais eficientes processos, por ser do mais alto nível moral, de impedimento da mesma luta violenta.

O ano civil de 1958 foi fértil em realizações internacionais científicas, nas quais encontramos, com manifesto prazer, as bases de bons entendimentos internacionais no campo científico, técnico e cultural. Pode dizer-se mesmo que é o ano em que a terra estende a mão aos outros mundos...

Na medida das suas possibilidades, a Gazeta de Matemática tem tentado acompanhar tais realizações internacionais desde as do Ano Geofísico Internacional passando pelos diversos congressos científicos até a Exposição Internacional de Bruxelas.

Assim nos n.os 68-69; 70-71 foram publicados 3 artigos relativos aos lançamentos dos satélites artificiais um dos quais é a tradução integral do trabalho do prof. TCHEBOTAREV, escrito em 1956, e que serviu de base ao lançamento do primeiro planeta artificial do Sol.

*

* *

No seguimento desta orientação e relacionado com a Exposição de Bruxelas, a G. M. organizou entre os estudantes universitários e professores dos diversos ramos de ensino uma visita àquela cidade. Numa apreciação de conjunto várias conclusões se podem tirar: se por um lado os principais pavilhões nacionais são um índice da importância que nos respectivos países se dá à investigação e vida científica; se por outro, o Palácio Internacional da Ciência patenteia o número crescente das descobertas científicas dos últimos anos; sobre tudo se tornam evidentes os resultados de uma lição realizada à escala mundial: os países relativamente atrasados que tomaram a sério o desenvolvimento da ciência e da técnologia alcançam ràpidamente e mesmo ultrapassam, sob certos aspectos, os que neste campo, com mais tradições se deixaram adormecer. A recíproca é evidentemente equivalente.

Em qualquer caso, porém, a visita à Exposição Internacional de Bruxelas deu-nos a certeza de que o futuro próximo da humanidade será coerente com a condição humana: cooperação e bom entendimento internacional no campo da ciência da cultura e da vida.

J. G. T.

Sur la définition et la structure des distributions vectorielles (*)

par J. Sebastião e Silva

Introduction et plan général. M. L. SCHWARTZ appelle distributions vectorielles (i. e., à valeurs dans un espace vectoriel E) les applications linéaires continues de l'espace $\mathfrak{D}$ (des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support borné) dans l'espace E. C'est là une définition synthétique, immédiate, mais elle est à l'origine d'une théorie difficile, qui a exigé la mise en oeuvre de puissantes ressources de l'analyse fonctionnelle moderne (voir [12] et [6], dans la Bibliographie). Comme les distributions vectorielles interviennent couramment dans les importantes recherches de M. SCHWARTZ et de ses élèves sur les équations aux dérivées partielles et sur d'autres types d'équations fonctionnelles, la lecture de ces travaux est rendue de ce fait assez difficile pour la plupart des physiciens et, même, des mathématiciens.

D'autre part, mon article «Sur une construction axiomatique des distributions» [16], dont l'un des buts était justement de rendre plus acessible la théorie des distributions scalaires, a été écrit beaucoup plus comme un travail de

(*) Extraído de um trabalho a publicar na revista «Portugaliae Mathematica».