

de que os conhecimentos científicos não podem ser do domínio dum só país ou dum conjunto de países mas também à generalização imediata deste princípio: mesmo dentro dum grupo nacional, é impossível, além de anacrónico, a limitação de acesso democrático a todos os lugares, a todos os postos.

A ciência situa-se acima das lutas violentas que dividem os homens e, por esse mesmo facto, é um dos mais eficientes processos, por ser do mais alto nível moral, de impedimento da mesma luta violenta.

O ano civil de 1958 foi fértil em realizações internacionais científicas, nas quais encontramos, com manifesto prazer, as bases de bons entendimentos internacionais no campo científico, técnico e cultural. Pode dizer-se mesmo que é o ano em que a terra estende a mão aos outros mundos...

Na medida das suas possibilidades, a Gazeta de Matemática tem tentado acompanhar tais realizações internacionais desde as do Ano Geofísico Internacional passando pelos diversos congressos científicos até a Exposição Internacional de Bruxelas.

Assim nos n.ºs 68-69; 70-71 foram publicados 3 artigos relativos aos lançamentos dos satélites artificiais um dos quais é a tradução integral do trabalho do prof. TCHEBOTAREV, escrito em 1956, e que serviu de base ao lançamento do primeiro planeta artificial do Sol.

\*  
\* \*  
\*

No seguimento desta orientação e relacionado com a Exposição de Bruxelas, a G. M. organizou entre os estudantes universitários e professores dos diversos ramos de ensino uma visita àquela cidade. Numa apreciação de conjunto várias conclusões se podem tirar: se por um lado os principais pavilhões nacionais são um índice da importância que nos respectivos países se dá à investigação e vida científica; se por outro, o Palácio Internacional da Ciência patenteia o número crescente das descobertas científicas dos últimos anos; sobre tudo se tornam evidentes os resultados de uma lição realizada à escala mundial: os países relativamente atrasados que tomaram a sério o desenvolvimento da ciência e da tecnologia alcançam rapidamente e mesmo ultrapassam, sob certos aspectos, os que neste campo, com mais tradições se deixaram adormecer. A recíproca é evidentemente equivalente.

Em qualquer caso, porém, a visita à Exposição Internacional de Bruxelas deu-nos a certeza de que o futuro próximo da humanidade será coerente com a condição humana: cooperação e bom entendimento internacional no campo da ciência da cultura e da vida.

J. G. T.

## *Sur la définition et la structure des distributions vectorielles*<sup>(\*)</sup>

par J. Sebaslião e Silva

**Introduction et plan général.** M. L. SCHWARTZ appelle distributions vectorielles (i. e., à valeurs dans un espace vectoriel  $E$ ) les applications linéaires continues de l'espace  $\mathcal{D}$  (des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support borné) dans l'espace  $E$ . C'est là une définition synthétique, immédiate, mais elle est à l'origine d'une théorie difficile, qui a exigé la mise en oeuvre de puissantes ressources de l'analyse fonctionnelle moderne (voir [12] et [6], dans la Bibliographie). Comme les distributions vectorielles interviennent couramment dans les importantes recherches de M. SCHWARTZ et de ses

élèves sur les équations aux dérivées partielles et sur d'autres types d'équations fonctionnelles, la lecture de ces travaux est rendue de ce fait assez difficile pour la plupart des physiciens et, même, des mathématiciens.

D'autre part, mon article «Sur une construction axiomatique des distributions» [16], dont l'un des buts était justement de rendre plus accessible la théorie des distributions scalaires, a été écrit beaucoup plus comme un travail de

(\*) Extraído de um trabalho a publicar na revista «Portugaliae Mathematica».

recherche que comme un exposé didactique, ce qui rend peu commode sa lecture, en masquant, par une formulation trop abstraite, le caractère foncièrement élémentaire et facile de cette construction. C'est pourquoi j'expose ici des préliminaires assez détaillés (n.º 2): le lecteur moins informé y trouvera tout l'essentiel de la théorie algébrique des distributions, généralisée au cas des distributions vectorielles.

Or, en rédigeant cet article [16], je me suis aperçu que les mêmes méthodes pourraient s'appliquer, avec avantage, au cas des distributions vectorielles. Une seule difficulté essentielle se présentait dans ce cas: tandis que toute distribution scalaire s'exprime, localement, comme dérivée généralisée, d'ordre fini, d'une fonction continue, cela n'est plus vrai, en général, pour les distributions vectorielles. Cependant M. A. GROTHENDIECK [4] s'était trouvé devant une difficulté exactement analogue, dans la recherche des applications linéaires continues de certains espaces de fonctions holomorphes, dans un espace localement convexe  $E$  (complet), et il l'a résolue au moyen de sa notion de «fonction holomorphe au sens large à valeurs dans  $E$ ». Il ne s'agit plus là de vraies fonctions à valeurs dans  $E$ , mais de fonctions à valeurs dans des espaces de BANACH  $E_x$ , dont  $E$  se compose (comme sous-espace du produit des  $E_x$ ); mais cette désignation est suggestive et, au fond, naturelle.

Donc, nous n'avons qu'à suivre un chemin tout à fait parallèle: les distributions  $T$  au sens large, telles que nous les définissons ici (nº 6) résolvent, d'une façon naturelle et directe, le problème de la détermination des applications linéaires continues des espaces  $\mathcal{D}$ ,  $C^\infty$ , etc. dans un espace localement complet  $E$ ; deux formules simples établissent alors une corres-

pondance biunivoque  $\Theta \rightarrow T$  entre ces applications  $\Theta$  et ces distributions  $T$  (voir théorèmes 4.1 et 7.1). Comme conséquence de ces théorèmes on retrouve, d'une façon presque élémentaire, le célèbre «théorème des noyaux» de SCHWARTZ.

Il conviendra de commencer par donner ici un aperçu de cette orientation. Soit d'abord  $E$  un espace de BANACH et considérons l'espace  $\mathcal{D}_K$  des fonctions numériques  $\varphi(x)$  d'une variable, indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'un intervalle borné  $K=[a, b]$ . On démontre alors que l'expression générale des applications linéaires continues  $\Theta$  de  $\mathcal{D}_K$  dans  $E$  est:

$$(1.1) \quad \Theta \varphi = (-1)^n \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}_K$ ,

où  $f$  est une fonction continue dans  $[a, b]$ , à valeurs dans  $E$ , et  $n$  un entier  $\geq 0$ , le couple  $(f, n)$  dépendant de  $\Theta$  (mais pas de façon univoque). En particulier, il peut arriver que la fonction  $f$  soit  $n$  fois continûment différentiable; alors, en intégrant par parties, la formule (1.1) peut s'écrire plus simplement:

$$(1.2) \quad \Theta \varphi = \int_a^b f^{(n)}(x) \varphi(x) dx,$$

puisque  $\varphi$  s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, aux points  $a, b$ . Dans ce cas, l'application  $\Theta$  est représentée, uniquement, par une fonction continue,  $F = f^{(n)} = D^n f$ .

Dans le cas opposé, la formule (1.2) n'est plus applicable, la dérivée  $f^{(n)}$  de  $f$  n'existant pas comme fonction. Mais on peut convenir de désigner par  $f^{(n)}$  la classe de tous les possibles couples  $(f_1, n_1), (f_2, n_2), \dots$  (constitués par une fonction continue dans  $K$  à valeurs dans  $E$  et par un entier  $\geq 0$ ), qui déterminent,

d'après (1.1), la même application  $\Theta$ ; (1) et cette classe de couples  $(f, n)$ , que l'on pourra nommer, par convention, la *dérivée généralisée d'ordre  $n$  de la fonction  $f$* , sera dite une «distribution dans  $K$  à valeurs dans  $E$ ». Dans ces cas, donc, l'application  $\Theta$  sera représentée par la distribution unique  $F = f^{(n)}$ . (Pour commodité, les fonctions continues  $f = f^{(0)}$  seront dites aussi distributions). La formule (1.2) peut maintenant s'interpréter comme une simple abréviation de (1.1); mais on peut aussi la justifier par une généralisation naturelle du concept d'intégrale.

Soit maintenant  $E$  un espace localement convexe complet, quelconque; alors  $E$  se «compose» d'une infinité d'espaces de BANACH  $E_x$  (n.° 6) et l'expression générale des applications linéaires continues  $\Theta$  de  $\mathcal{D}_K$  dans  $E$  devient un peu plus compliquée: pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}_K$ , la composante  $(\Theta \varphi)_x$  du vecteur  $\Theta \varphi$  de  $E$ , dans chacun des espaces  $E_x$ , sera donnée par une formule du type:

$$(\Theta \varphi)_x = \int_a^b T_x(x) \varphi(x) dx,$$

où  $T_x$  est une distribution dans  $K$  à valeurs dans  $E_x$ , dérivée  $D^{n_x} f_x$  d'une fonction continue dans  $K$  à valeurs dans  $E_x$  ( $n_x$  et  $f_x$  dépendant de  $\Theta$  et de  $x$ ). Dans ce cas général, donc, l'application  $\Theta$  sera représentée par le système  $T = (T_x)$  de distributions, que nous appelons une «distribution au sens large dans  $K$ , à valeurs

(1) On démontre aisément que pour que deux tels couples  $(f, n)$  et  $(g, m)$ , avec  $m \geq n$ , déterminent d'après (1.1) la même application  $\Theta$ , il faut et il suffit que  $g$  admette au sens usuelle dérivée  $g^{(m-n)}$  continue, différant de  $f$  au plus par un polynôme de degré  $> n$ . Le parallèle avec les nombres rationnels, conçus comme classes de couples d'entiers, est toujours ici efficace, par l'analogie frappante des situations.

dans  $E$ ». Nous dirons alors que  $T$  est la «distribution indicatrice» de l'opérateur  $\Theta$ , par analogie avec les «fonctions indicatrices» des fonctionnelles analytiques de L. FANTAPPIÈ.

Cette notion de «distribution au sens large» n'est pas nécessaire pour certaines catégories d'espaces  $E$ : espaces de BANACH, espaces  $(\mathcal{S}_2)$  etc.; mais elle s'impose dans le cas général. D'ailleurs nous abandonnons ensuite, pour commodité, le complément «au sens large», en disant simplement «distribution» en accord avec M. SCHWARTZ.

Voilà l'idée essentielle; tout le rest n'est que détails techniques, pas très compliqués. Il s'agissait donc de résoudre un problème typique d'analyse fonctionnelle. Sa résolution est évidemment une des façons les plus naturelles d'introduire les distributions, considérées cependant comme entités formelles, qu'il convient de distinguer des opérateurs linéaires qu'elles représentent, de même qu'il convient de distinguer les transformations linéaires dans des espaces de dimension finie ou hilbertiens, de leurs représentations matricielles. Cela devient même indispensable lorsqu'il y a des changements de base et, en particulier, dans le cas des distributions sur des variétés sans élément de volume spécifié (cf. [3]).

Ce type de problème de l'analyse fonctionnelle — détermination des applications linéaires continues d'un espace  $U$  dans un autre espace  $E$  — rentre dans une catégorie beaucoup plus générale, concernant une théorie de GALOIS métamathématique, dont j'ai abordé l'étude en 1945 (cf. [14]) (1).

(1) Je n'ai plus retrouvé l'opportunité de poursuivre cette étude, dont une partie seulement est contenue dans [14]. Mais il me semble important d'attirer l'attention des mathématiciens sur l'intérêt de ces méthodes metamathématiques.

Pour le cas considéré des espaces vectoriels topologiques, la méthode de recherche peut s'esquisser rapidement.

On cherche d'abord une *base vectoriel-topologique* de  $U$ , c'est-à-dire un système  $(u_\lambda)$ , fini ou infini, de vecteurs  $u_\lambda, u_{\lambda'}, \dots$  de  $U$ , en fonction desquels on puisse exprimer tout vecteur  $v$  de  $U$ , au moyen d'une «*formule de représentation*»

$$(1.3) \quad v = F[(u_\lambda)],$$

construite exclusivement à l'aide de notions vectoriels-topologiques définies dans  $U$  («*somme*», «*produit par scalaires*» et «*limite*»). On vérifie ensuite si cette formule est respectée, dans sa structure logique, par n'importe quelle application linéaire continue  $\Phi$  de  $U$  dans  $E$ . Cela étant, si l'on pose  $e_\lambda = \Phi u_\lambda$  (pour toute valeur de  $\lambda$ ), la formule de représentation (1.3) donne aussitôt

$$(1.4) \quad \Phi v = F[(e_\lambda)], \text{ pour tout } v \in U.$$

Toute application  $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$  sera donc, nécessairement, de cette forme<sup>(2)</sup>. Il reste à voir réciproquement, quelles conditions devra vérifier un système  $(e_\lambda)$ , donné d'avance dans  $E$ , pour que la formule (1.4) définisse une application  $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$ ; ces conditions on les trouvent, évidemment, en cherchant les propriétés vectoriel-topologiques de la base  $(u_\lambda)$  de  $U$  qui sont respectées par toute application  $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$  et que l'on devra, par suite, retrouver dans  $(e_\lambda)$ .

Dans le cas fini (espaces  $R^n$  ou  $C^n$ ) la formule de représentation la plus simple est donnée par

$$(1.5) \quad x_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta_{i\alpha} x_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où  $\delta_{i\alpha}$  est le symbole de KRONECKER ( $\delta_{i\alpha} = 1$  si  $i = \alpha$ ,  $\delta_{i\alpha} = 0$  si  $i \neq \alpha$ ). Ici le paramètre générique  $\lambda$  devient l'indice  $\alpha$ , prenant les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , auxquelles correspondent les *vecteurs de base*

$$(\delta_{i1}) = (1, 0, \dots, 0), (\delta_{i2}) = \\ = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (\delta_{in}) = (0, \dots, 0, 1).$$

Dans la formule (1.5), que l'on peut écrire  $x = \sum_1^n x_\alpha e_\alpha$ , en posant  $x = (x_i)$  et  $e_\alpha = (\delta_{i\alpha})$ , pour  $\alpha = 1, \dots, n$ , il n'y a que la somme des  $n$  produits des vecteurs de base par les scalaires  $x_\alpha$  (coordonnées de  $x$ ). Mais, dans le cas des espaces de dimension infinie, on ne peut plus éviter l'opération de limite, souvent déguisée sous un signe d'intégrale remplaçant celui de somme finie.

On sait que, dans un passage hardi du fini à l'infini, dans sa systématisation de la mécanique ondulatoire, M. DIRAC a substitué au  $\delta_{i\alpha}$  de KRONECKER sa fameuse «*fonction*» (qui n'est plus d'ailleurs une fonction)  $\delta(x - \alpha)$ , où  $x$  est la variable réelle et  $\alpha$  un paramètre réel, jouant resp. les rôles de  $i$  et de  $\alpha$  dans  $\delta_{i\alpha}$ ; et il a introduit intuitivement la *formule de représentation*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

pour toute «*fonction*»  $f$  définie dans  $R$ . Simplement, comme ces  $\delta(x - \alpha)$  ne sont pas des fonctions de  $x$ , mais des distributions, ce que M. DIRAC a obtenu est en réalité une formule de représentation pour les distributions (cf. [16], §3) exactement analogue à la formule intégrale de CAUCHY pour les fonctions analytiques (cf. [8], [4], [5], [15], [18] et [19]).

Or, tandis que notre méthode générale de recherche s'ajuste parfaitement à ces espaces de distributions et à certains espaces de fonctions analytiques, on ne

<sup>(2)</sup> Je désigne par  $\mathcal{L}(U, E)$ , avec BOURBAKI, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $U$  dans  $E$ .

peut l'appliquer que par des détours inattendus, au cas d'espaces  $U$  de fonctions indéfiniment dérivables. La raison en est que, pour la représentation des éléments de  $U$ , il devient plus commode, dans ce cas, de pendre pour vecteurs de base, des éléments, étrangères à  $U$ , des espaces de BANACH  $U_n$  dont  $U$  se «compose». Et c'est là bien la vraie origine du concept de distribution.

Dans une deuxième partie de ce travail je m'occupe de la topologie et de la théorie de l'intégration, pour les distributions vectorielles considérées au point de vue direct. Cela conduit à définir l'espace vectoriel topologique  $C_\infty(K, E)$ , des distributions dans un intervalle compact  $K$ , à valeurs dans un espace de BANACH  $E$ , comme la limite inductive des espaces normés  $C_n(K, E) = D^n C(K, E)$ , et l'espace  $\bar{C}_\infty(K, E)$ , des distributions (au sens large) dans  $K$  à valeurs dans un espace localement convexe complet  $E$ , comme limite projective des espaces  $C_\infty(K, E_x)$ . Alors on pourra aussi justifier la désignation «distribution au sens large à valeurs dans  $E$ », chacune de ces distributions étant exprimable comme limite de dérivées formelles de fonctions continues à valeurs dans  $E$ . En particulier on démontre, d'une façon tout à fait simple et directe, que les espaces de distributions scalaires considérés sont nucléaires.

Enfin, ces résultats s'appliquent à l'étude des transformations de FOURIER et de LAPLACE, pour les distributions vectorielles. En particulier, on pourra définir l'espace des fonctions holomorphes au sens large, à valeurs dans  $E$  et à croissance lente à droite (cf. [18]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitres I-II. Act. Scient. Ind., n° 1141, Hermann, Paris (1951).
- [ 2 ] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I-V, Act. Scient. Ind., n.°s 1189 (1953), 1229 (1955), Hermann, Paris.
- [ 3 ] J. GUERREIRO, *Distribuições sobre uma variedade*. À paraître.
- [ 4 ] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*. J. Reine Angew. Math., **192**, p. 35-64, 77-95 (1953).
- [ 5 ] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*. J. d'Analyse Math., **2**, p. 243-280, Jérusalem (1952-53).
- [ 6 ] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Memoirs Amer. Math. Soc. (1955).
- [ 7 ] H. KÖNIG, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. SCHWARTZ*. Math. Nachrichten, **9**, p. 129-148 (1953).
- [ 8 ] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*. J. Reine Angew. Math., **191**, p. 29-49 (1953).
- [ 9 ] J. MIKUSINSKI — R. SIKORSKI, *The elementary theory of distributions*. (I). Panstwowe Wydwnictwo Naukowe, Varsóvia (1957).
- [ 10 ] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. I (1950), II (1957), Hermann, Paris.
- [ 11 ] L. SCHWARTZ, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*. J. d'Analyse Math., **4**, p. 88-148, Jérusalem (1954-55).
- [ 12 ] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I. Ann. Inst. FOURIER, Grenoble, **7** (1957), p. 1-141.
- [ 13 ] R. SIKORSKI, *A definition of the notion of distribution*. Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, **2**, p. 209-211 (1954).
- [ 14 ] J. S. E SILVA, *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque*. Comm. Pontificia Academia Scientiarum, **9**, p. 327-357 (1945).
- [ 15 ] J. S. E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*. Thèse, 1948. Portugaliae Math., **9**, p. 1-130 (1950).
- [ 16 ] J. S. E SILVA, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. Rev. Fac. Cienc. Lisboa, 2.<sup>a</sup> série A, **4**, p. 79-186 (1954-55).  
Rectifications : Ibidem, **5**, p. 169-170 (1956).

- [17] J. S. E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. Rend. Mat. Univ. Roma, série V, **14**, p. 388-410 (1955).
- [18] J. S. E SILVA, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. Portugaliae Math., **17**, p. 1-17 (1958).
- [19] J. S. E SILVA, *Les fonctions analytiques comme*

*ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. À paraître dans «Math. Annalen».

*Observation.* La méthode des couples  $(f, m)$  pour la définition des distributions a été adoptée, indépendamment de moi, dans le cas d'une seule variable, par M. R. SIKORSKI dans [13].

## Sobre um problema de cinemática gráfica

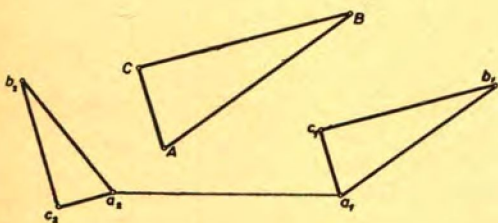
por M. Arela Chaves

### 1. Gráfico das acelerações.

Para representar graficamente os vectores-acelerações do movimento de um sistema rígido plano  $S$  no seu plano, é cómodo utilizar um diagrama — o gráfico das acelerações, cuja construção se indica a seguir. Ela é baseada na expressão que relaciona a aceleração de dois pontos quaisquer de um sistema rígido num mesmo instante:

$$a) \quad \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\omega'} \wedge \overline{B-A} - \omega^2 \cdot \overline{B-A}.$$

Designemos por  $a_1$  e  $a_2$  respectivamente a origem e extremidade do vector, que, numa certa escala, representa a aceleração do ponto  $A$  e  $S$ .



Visto que  $\overline{\omega'}$  é perpendicular ao plano de  $S$ , o vector  $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$  pertence a esse plano e é, além disso, perpendicular a  $\overline{B-A}$ <sup>(1)</sup>. O ângulo de  $\overline{B-A}$  com esse

<sup>(1)</sup> Supõe-se o sentido positivo de medida dos ângulos escolhido de acordo com o sentido do versor de  $\overline{\omega'}$ .

vector será  $90^\circ$  ou  $270^\circ$  conforme  $\omega'$  for positivo ou negativo. Sejam  $b_1$  e  $b_2$  pontos tais que  $\overline{b_2-a_2}$  e  $\overline{b_1-a_1}$  representem, na escala anteriormente escolhida, respectivamente os vectores  $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$  e  $\omega^2 \cdot \overline{B-A}$ . Atendendo à expressão a) reconhece-se imediatamente que  $\overline{b_2-a_1}$  representa naquela escala a aceleração de  $B$ . Pelo mesmo processo, dado qualquer outro ponto  $C$  do sistema rígido  $S$ , se determinará o par  $(c_1, c_2)$ . Por este processo de construção se vê que a cada figura  $F$  de  $S$  correspondem duas figuras  $F_1$  e  $F_2$  semelhantes a  $F$ , se  $\omega \neq 0$  e  $\omega' \neq 0$ . Vemos ainda que os segmentos correspondentes de  $F$  e  $F_1$  são paralelos e os correspondentes de  $F$  e  $F_2$  são perpendiculares. De uma maneira geral designaremos o par  $(x_1, x_2)$  correspondente a um ponto  $X$  e  $F$  por *imagem* de  $X$  no gráfico das acelerações.

É claro que o gráfico fica bem determinado, conhecidas as imagens de 2 pontos distintos, de  $F$ <sup>(1)</sup>. Supô-lo-emos sempre definido pelos dois pares  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$ . Atendendo a propriedades de semelhança e proporcionalidade é ainda fácil ver que dados dois pontos quaisquer  $X, Y$ , e construídos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ ,  $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$  representa  $\omega^2 \cdot \overline{X-Y}$  e  $\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}$  representa  $\overline{\omega'} \wedge \overline{X-Y}$ .