[17] J. S. e Silva, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni.* Rend. Mat. Univ. Roma, série V, **14**, p. 388-410 (1955).

[18] J. S. e Silva, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite.* Portugaliae Math., **17**, p. 1-17 (1958).

[19] J. S. e Silva, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel.* À paraître dans «Math. Annalen».

Observation. La méthode des couples (f, m) pour la définition des distributions a été adoptée, indépendamment de moi, dans le cas d'une seule variable, par M. R. Sikorski dans [13].

Sobre um problema de cinemática gráfica

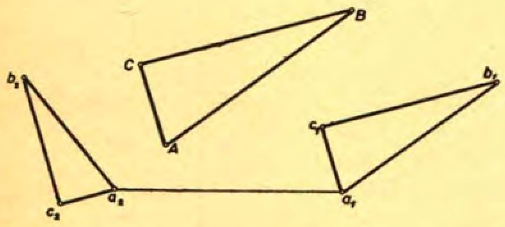
por **M. Arala Chaves**

1. Gráfico das acelerações.

Para representar gràficamente os vectores-acelerações do movimento de um sistema rígido plano S no seu plano, é cómodo utilizar um diagrama — o gráfico das acelerações, cuja construção se indica a seguir. Ela é baseada na expressão que relaciona a aceleração de dois pontos quaisquer de um sistema rígido num mesmo instante:

$$a)\quad \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\omega'} \wedge \overline{B-A} - \omega^2 \cdot \overline{B-A}.$$

Designemos por a_1 e a_2 respectivamente a origem e extremidade do vector, que, numa certa escala, representa a aceleração do ponto $A \in S$.



Visto que $\overline{\omega'}$ é perpendicular ao plano de S, o vector $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$ pertence a esse plano e é, além disso, perpendicular a $\overline{B-A}$ (1). O ângulo de $\overline{B-A}$ com esse vector será 90° ou 270° conforme ω' for positivo ou negativo. Sejam b_1 e b_2 pontos tais que $\overline{b_2 - a_2}$ e $\overline{b_1 - a_1}$ representem, na escala anteriormente escolhida, respectivamente os vectores $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$ e $\omega^2 \cdot \overline{B-A}$. Atendendo à expressão *a*) reconhece-se imediatamente que $\overline{b_2 - b_1}$ representa naquela escala a aceleração de B. Pelo mesmo processo, dado qualquer outro ponto C do sistema rígido S, se determinará o par (c_1, c_2). Por este processo de construção se vê que a cada figura F de S correspondem duas figuras F_1 e F_2 semelhantes a F, se $\omega \neq 0$ e $\omega' \neq 0$. Vemos ainda que os segmentos correspondentes de F e F_1 são paralelos e os correspondentes de F e F_2 são perpendiculares. De uma maneira geral designaremos o par (x_1, x_2) correspondente a um ponto $X \in F$ por *imagem* de X no *gráfico das acelerações.*

É claro que o gráfico fica bem determinado, conhecidas as imagens de 2 pontos distintos, de F(1). Supô-lo-emos sempre definido pelos dois pares (a_1, a_2) e (b_1, b_2). Atendendo a propriedades de semelhança e proporcionalidade é ainda fácil ver que dados dois pontos quaisquer X, Y, e construídos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), $\overline{x_1 - y_1}$ representa $\omega^2 \cdot \overline{X-Y}$ e $\overline{x_2 - y_2}$ representa $\overline{\omega'} \wedge \overline{X-Y}$.

(1) Supõe-se o sentido positivo de medida dos ângulos escolhido de acordo com o sentido do versor de $\overline{\omega'}$.

2. Imagem do centro de acelerações. Discussão geométrica.

Admitindo a construção anterior, pretendemos, como exercício, discutir *geomètricamente* a existência e unicidade de um ponto $\Gamma \in S$ tal que:

1.º) $\bar{a}_\Gamma = 0$;

2.º) a distribuição das acelerações de S seja a mesma que a de uma rotação de centro Γ e velocidade e aceleração angulares respectivamente $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}'$.

1.º CASO. $a_1 \neq b_1$; $a_2 \neq b_2$ (isto é: $\omega \neq 0$; $\omega' \neq 0$).

Vejamos em primeiro lugar o seguinte problema:

Definido o gráfico pelas imagens de dois pontos A, B de F e dados dois pontos quaisquer c, d, em geral (c, d) não pertence ao gráfico, isto é, não é imagem de nenhum ponto de F.

Uma condição necessária e suficiente para que (c, d) pertença ao gráfico é que a figura $\{a_1\, b_1\, c\}$ — formando triângulo ou três pontos colineares — e a figura $\{a_2\, b_2\, d\}$ sejam semelhantes e, no caso de triângulo, também igualmente orientadas.

Convém-nos utilizar contudo outras condições:

$b)$ $\overline{c\,a_1} \perp \overline{d\,a_2}$ e $\overline{c\,b_1} \perp \overline{d\,b_2}$ se $c \notin \overline{a_1\,b_1}$;

$c)$ $d \in \overline{a_2 b_2}$ e $\dfrac{|\overline{c - a_1}|}{|\overline{d - a_2}|} = \dfrac{|\overline{c - b_1}|}{|\overline{d - b_2}|} = \dfrac{|\overline{a_1 - b_1}|}{|\overline{a_2 - b_2}|}$

se $c \in \overline{a_1\,b_1}$. [2]

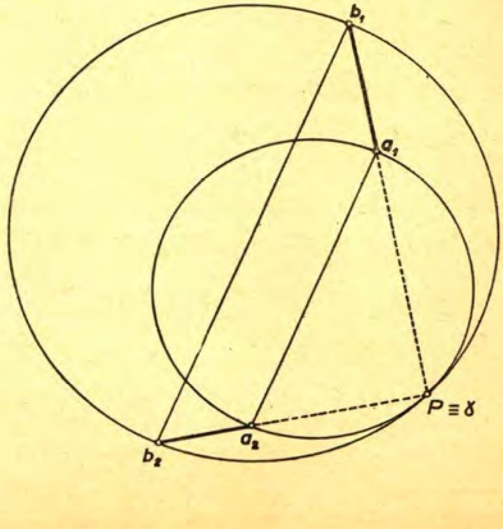
Estas condições são perfeitamente equivalentes à condição anterior. Com efeito, se $c \in \overline{a_1\,b_1}$, a equivalência da condição anterior e de $c)$ é evidente. Se $c \notin \overline{a_1\,b_1}$, a semelhança $\{a_1\, b_1\, c\} \sim \{a_2\, b_2\, d\}$ implica em particular que $\sphericalangle(\overline{b_1 - a_1}, \overline{c - a_1}) = \sphericalangle(\overline{b_2 - a_2}, \overline{d - a_2})$; mas, por hipótese $\overline{a_1\,b_1} \perp \overline{a_2\,b_2}$ e então também $\overline{c\,a_1} \perp \overline{d\,a_1}$. Do mesmo modo concluo que $\overline{c\,b_1} \perp \overline{d\,b_2}$. Está, pois, provado que a condição de semelhança e igual orientação implica $b)$. O recíproco prova-se sem dificuldade seguindo um caminho inverso.

Vejamos então se existe um ponto γ, tal que o par (γ, γ) pertença ao gráfico. Se existir, então o original Γ terá aceleração nula pois ela será representada pelo vector $\overline{\gamma - \gamma} = \bar{0}$.

Construamos as circunferências de diâmetro $\overline{a_1\,a_2}$ e $\overline{b_1\,b_2}$. Elas têm um ponto P comum, que é a intersecção de $\overline{a_1\,b_1}$ e $\overline{a_2\,b_2}$, pois por hipótese $\overline{a_1\,b_1} \perp \overline{a_2\,b_2}$. Portanto, ou são tangentes em P ou intersetam-se num segundo ponto Q.

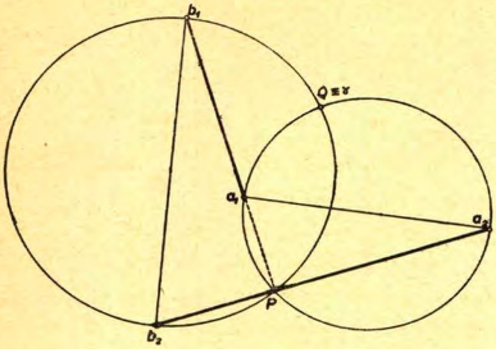
No primeiro caso, e só nesse, é $\overline{a_1\,a_2} \parallel \overline{b_1\,b_2}$ e verifica-se então $c)$ para o par (P, P) (T. de Thales).

É $\gamma \equiv P$ o ponto procurado.



[1] Trata-se no fundo de uma aplicação: $\varphi(F) = F_1 \times F_2$.
E é esta aplicação φ que fica definida se forem dadas as imagens por φ de dois pontos de F.

[2] Consideram-se os valores absolutos dos vectores, pelo que não basta uma igualdade.



No segundo caso P não verifica $c)$; mas o ponto Q e só esse, por construção verifica $b)$.

Em qualquer dos casos, há no gráfico um único par da forma (γ, γ) e, portanto, em S um único ponto de aceleração nula.

Vejamos agora que o ponto Γ satisfaz à segunda condição de definição do centro de acelerações. Para qualquer ponto X, $\overline{\gamma - x_1}$ representa (vidé § 1.º) em direcção e sentido e, na escala adoptada, também em grandeza, a aceleração centrípeta de X numa rotação de velocidade angular ω em torno do original de (γ, γ); e $\overline{x_2 - \gamma}$ a aceleração tangencial de uma rotação em torno do original de (γ, γ), de aceleração angular ω'. Portanto $\overline{x_2 - x_1} = \overline{x_2 - \gamma} + \overline{\gamma - x_2}$, representa efectivamente a aceleração da X numa rotação (ω, ω') em torno do original de (γ, γ) c. q. d.

2.º CASO. $a_1 \not\equiv b_1$; $a_2 \equiv b_2$ (isto é: $\omega \neq 0$; $\omega' = 0$).

Neste caso, uma condição necessária e suficiente para (c, d) pertencer ao gráfico é $d \equiv a_2$. Então o ponto procurado é $\gamma \equiv a_2$, e Γ o original de (γ, γ).

3.º CASO. $a_1 \equiv b_1$; $a_2 \not\equiv b_2$ (isto é: $\omega = 0$; $\omega' \neq 0$).

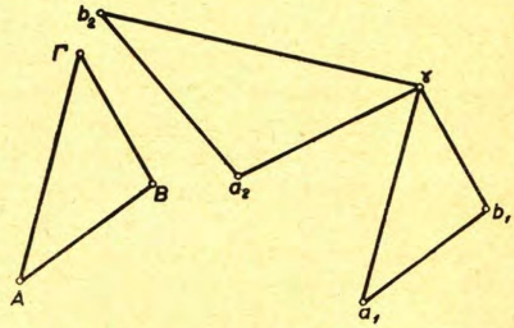
De maneira análoga à hipótese anterior, condição necessária e suficiente para (c, d) pertencer ao gráfico é $c \equiv a_1$. Então a imagem de Γ será (γ, γ), com $\gamma \equiv a_1$.

Ainda nestes dois últimos casos existe e está univocamente determinado um centro de acelerações.

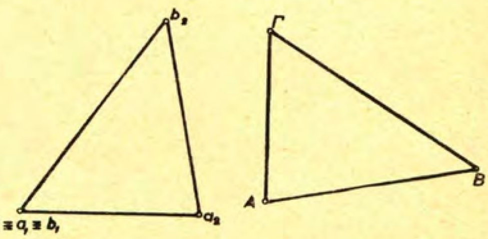
4.º CASO. $a_1 \equiv b_1$; $a_2 \equiv b_2$ (isto é $\omega = 0$; $\omega' = 0$).

Neste caso, para qualquer X e S se tem $x_1 \equiv a_1$, $x_2 \equiv a_2$, o que traduz a igualdade de aceleração de todos os pontos. Portanto, ou $a_1 \not\equiv a_2$ e não há nenhnm ponto de aceleração nula, ou $a_1 \equiv a_2$ e todos os pontos de S têm aceleração nula.

3. Determinação geométrica de Γ, conhecida a imagem (γ, γ).



Nos dois primeiros casos Γ é a intersecção das paralelas por A e B respectivamente a $\overline{\gamma a_1}$ e $\overline{\gamma b_1}$.



No terceiro caso Γ é a intersecção das perpendiculares por A e B respectivamente a $\overline{\gamma a_1}$ e $\overline{\gamma b_1}$.