MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro — 1958.

Teóricas

4417 — Em que intervalo é decrescente a função $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$?
Justifique a resposta.

4418 — Mostre que toda a função integrável no intervalo (a, b) é limitada.

4419 — Que valores podem ter os elementos de uma matriz hemi-hermítica?
Justifique a resposta.

4420 — Qual a equação de um plano definido por 3 pontos?
Justifique a resposta.

4421 — Mostrar que toda a série convergente goza da propriedade associativa.

Práticas

4422 — Primitive a função $\dfrac{x+4}{x^2+1} + e^{\operatorname{sen} x} \cos x + \sqrt{x^2-1}$.

4423 — Calcule os máximos e mínimos da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 4x + \operatorname{sen} 2x$.

4424 — Escreva os comprimentos dos eixos da cónica $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$, a excentricidade e as equações das directrizes.

F. C. C. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro — 1958.

Teóricas

4425 — Em que intervalo é crescente a função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, quando x varia de zero a 2π?
Justifique a resposta.

4426 — O que entende por infinitamente pequeno? Justifique que $\dfrac{h^n}{n!}$ é infinitamente pequeno com $\dfrac{1}{n}$ sendo $h > 0$.

4427 — O que entende por matriz hemi-simétrica? Em que casos é o seu determinante nulo?
Justifique a resposta.

4428 — Indique alguma propriedade do integral indefinido $\int_a^x f(t)\,dt$.
Justifique a resposta.

4429 — Designando por S_1, S_2, S_3, as raízes da equação em S de uma quádrica, quando teremos um elipsóide?
Justifique a resposta.

Práticas

4430 — Trace a curva $y = e^{\frac{1}{2+x}}$.

4431 — Calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx$.

4432 — Escreva a equação do diâmetro conjugado com a recta $y = 2x + 1$ da cónica $x^2 - 4y^2 = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 21-2-58.

4433 — Defina limites de Weierstrass dum conjunto (u_n).
Enuncie e deduza as condições que caracterizam estes limites.

Considere o conjunto $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ e indique os seus limites de Weierstrass, bem como os pontos de acumulação, os pontos isolados e os pontos fronteiros, caso existam.

Quais as possíveis relações entre os limites de Weierstrass e o mínimo e máximo dum conjunto.

R: $L = \dfrac{5}{4}, l = \dfrac{1}{2}$. *O único ponto de acumulação é* 1. *Todos os pontos do conjunto são isolados no conjunto e fronteiros* (1 *também é ponto fronteiro*).

4434 — 1) Deduza as fórmulas de Girard e aproveite-as para calcular a soma e o produto dos inversos das raízes dum polinómio.

2) Sendo os polinómios A e B primos entre si, mostre que a condição de primigeneidade $AU+BV=1$ só pode ser verificada por um único par de polinómios U e V, inferiores em grau, respectivamente, a B e A.

Determine m por forma que o polinómio z^3+3z+m tenha raízes iguais.

3) Mostre que o polinómio interpolador não depende da seriação dos pares de valores $\begin{cases} x_i \\ u_i \end{cases}$. Como justifica então a aparente diversidade de soluções que surgem da regra do zigue-zague?

Utilize a tabela de diferenças divididas

x	u	δ_u	δ_u^2
x_0	u_0		
x_1	u_1	δ_{01}	δ_{012}^2
x_2	u_2	δ_{12}	

para exemplificar a resposta.

Calcule um polinómio de grau não superior a 3 que represente aproximadamente a função $f(x)=x^4+3x-1$ no intervalo $(-2,1)$.

R: 2) $m=\pm 2i$

3) $-2x^3+x^2+5x-1$

4435 — 1) Indique a condição para que as colunas de uma matriz sejam linearmente dependentes e prove que se as colunas completas são dependentes também o são as colunas incompletas. É a inversa verdadeira?

Justifique a resposta.

2) Considere o sistema $AX=B$, de m equações a n incógnitas, em que A tem característica r e analise o caso $r=m<n$ por meio da teoria dos determinantes.

Determine α por forma que o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=2\\ x+y+z-t&=2\\ x-y+z-t&=2\\ x-y+z-3t&=\alpha \end{aligned}$$

seja indeterminado de grau 1. Apresente neste caso a sua solução.

R: 2) $\alpha=2$ $\begin{cases} x=2-z \\ t=0 \\ y=0 \end{cases}$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 29-3-58.

4436 — Dado o conjunto infinito X, defina ponto de acumulação de X e prove que neste conjunto há pelo menos um ponto de acumulação.

Em que condições admite X mínimo? Justifique a resposta.

4437 — 1) Deduza a fórmula de Moivre e aproveite-a para exprimir $\cos n\theta$ num polinómio em $\cos\theta$ e, se n é ímpar, $\operatorname{sen} n\theta$ num polinómio em $\operatorname{sen}\theta$.

2) Diga em que consiste o problema da interpolação polinomial e mostre que este apenas comporta uma única solução.

Duma função interpoladora são conhecidas as seguintes diferenças finitas:

$$\begin{array}{ll} \Delta^0 f(-1)=-4 & \Delta^0 f(0)=-1\\ \Delta^1 f(-1)=3 & \Delta^1 f(0)=3\\ \Delta^2 f(-1)=0 & \Delta^2 f(0)=4\\ \Delta^3 f(-1)=4 & \Delta^3 f(0)=4 \end{array}$$

Deduza a respectiva tabela de diferenças, calcule o valor de $f(3)$ e determine, por último, a interpoladora.

4438 — 1) Considere o sistema linear e homogéneo $MX=O$, de m equações a n incógnitas, de característica p. Mostre que a condição necessária e suficiente para que os vectores $X^1 X^2 \cdots X^p$ formem um contra-resolvente é que eles permaneçam independentes depois de multiplicados por M.

2) Enuncie o teorema de Laplace e indique o seu préstimo na dedução da regra de Cramer.

Discuta o sistema:

$$\begin{aligned} u+x+y \qquad &=3\\ x-y \qquad &=3\\ u \qquad +y+3z&=3\\ u \qquad +y+3z&=0\\ x-y+2z&=1\\ u+x+y+\ z&=\alpha \end{aligned}$$

Soluções dos números 4436 a 4438 de Fernando de Jesus.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 30-6-58.

4439 – Resolva os seguintes problemas:

1) Decompor em quadrados $x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_3$.

2) Dados os planos $\pi_1 \equiv x+z-2\beta=0$, $\pi_2 \equiv -x+\alpha y+z=0$ e $\pi_3 \equiv \alpha x-\beta y-4=0$, determinar as condições para que eles contenham: *a*) um único ponto comum; *b*) uma mesma recta.

3) Calcular $P\, sec^3 x$.

R: 1)

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0
x_3	$\frac{1}{2}$	0	0

$$\longrightarrow f_1 = \frac{1}{2} x_1 + x_2$$

	x_1	x_3
x_1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	0

$$\longrightarrow f_2 = -\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_3$$

	x_3
x_3	$-\frac{1}{4}$

$$\longrightarrow f_3 = -\frac{1}{4} x_3$$

Então será: $f = f_1^2 - 4 f_2^2 + 16 f_3^2 = \left(\frac{1}{2} x_1 + x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2} x_1 - x_3\right)^2 + x_3^2$

2) *Como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -\beta & 0 \end{vmatrix} = 2\beta - \alpha^2$, *a condição para que os três planos tenham um único ponto comum é que* $\Delta \neq 0$ *ou* $2\beta \neq \alpha^2$; *para que contenham uma mesma recta é necessário que* $\Delta = 0$ $(\alpha^2 = 2\beta)$ *e que o característico*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

seja nulo $(\alpha\beta = 4)$. *As duas condições* $\begin{cases} \alpha^2 = 2\beta \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$ *dão fàcilmente* $\alpha = 2$ *e* $\beta = 2$.

3) $\mathrm{P}\sec^3 x = \mathrm{P}\sec x(1 + \mathrm{tg}^2 x) = \mathrm{P}\sec x + \mathrm{P}\sec x\,\mathrm{tg}^2 x = \log\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sec x\,\mathrm{tg} x - \mathrm{P}\sec^3 x$

$$\mathrm{P}\sec^3 x = \frac{1}{2}\log\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\,x$$

4440 — 1) Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão.

Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}}$, enunciando as proposições a que tem de recorrer.

2) A que condição deve obedecer a sucessão a_n para que a série $k a_0 - k a_1 + k a_2 - k a_3 + \cdots$ Seja convergente? Justifique.

Determine o intervalo de convergência da série

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots.$$

Defina série absolutamente convergente e indique algumas das propriedades mais notáveis destas séries.

R: 1) $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}} = \lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{\log n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{\log n}{n^2}} = e^0 = 1$

2) *Sendo* $\lambda = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ *e* $X = \left|\frac{1}{x}\right|$, *a série será absolutamente convergente quando* $X < \frac{1}{\lambda}$ *ou* $x > \lambda$ *e* $x < -\lambda$.

4441 — 1) Prove que $f(x)$, contínua em (a, b) toma neste intervalo todos os valores desde o mínimo ao máximo. Estude a continuidade e derivabilidade de $f(x) = \begin{cases} e^x\ (x \geqslant 0) \\ e^{-x} (x < 0) \end{cases}$ e mostre que em $x = 0$ a função tem um extremo.

2) Se no intervalo (a, b) a sucessão de Fourier é de 5.ª ordem e apresenta as seguintes variações:

	a	b
f	+	+
f^{I}	—	—
f^{II}	+	+
f^{III}	—	0
$f^{(\mathrm{IV})}$	+	+
$f^{(\mathrm{V})}$	—	—

indique, justificando, o número de zeros de $f(x)$ e sucessivas derivadas até $\overset{(\mathrm{IV})}{f(x)}$ no intervalo (a, b).

3) Diga quando é que $f(x, y)$ é função diferenciável e demonstre alguma proposição que garanta a diferenciabilidade.

Utilize a fórmula da derivação da função composta para deduzir a expressão da derivada de $y = \varphi(x)$ definida implìcitamente por $f(x, y) = 0$.

R: 1) *A função* $f(x) = \begin{cases} e^x\ (x \geqslant 0) \\ e^{-x} (x < 0) \end{cases}$ *é contínua em todos os pontos de* $(-\infty, +\infty)$ *e admite derivada em todos os pontos, excepto em* $x = 0$. *Como* $f'_d(0) = 1$ *e* $f'_e(0) = -1$ *a função apresenta um mínimo em* $x = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 7-7-1958.

4442 — Resolva os seguintes problemas:

1) Achar as raízes comuns a $x^4+x^3-x^2+x-2$ e x^3-x^2-4x+4, utilizando a teoria da eliminação.

2) Dada a recta $r\equiv\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+z1=0\end{cases}$ e o plano $\pi\equiv 2x-y-z=0$ determinar o plano α que passa por r e é perpendicular a π.

3) Calcular $P\,log\,(1-x^2)$. Ache o desenvolvimento em série de $log\,(1-x^2)$, segundo as potências de x, e aproveite-o para calcular $\lim\limits_{x=0}\dfrac{log\,(1-x^2)}{x^2}$.

R: 1)

1	−1 −4 4 (0) 1 1 −1 1 −2
$\lambda_1=-1$	2 3 −3 −2
$\lambda_2=-2$	5 5 −10
$\lambda_3=-5$	10 10 −20
$\lambda_4=-10$	20 20 −40

$$R=\begin{vmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 10 & 10 & -20 \\ 20 & 20 & -40\end{vmatrix}=0 \quad R_1=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10\end{vmatrix}=0 \quad R_2=5$$

$R_2^1=5 \quad R_2^2=-10$.

A equação das raízes comuns é $R_2x^2+R_2^1x+R_2^2=0$, *ou seja* $5x^2+5x-10=0$, *cujas raízes são* $x_1=1, x_2=-2$.

2) *O feixe de planos que passa por* r *é representado pela equação* $(m+1)x+(1-m)y+(1-m)z+1=0$. *O que é perpendicular a* π *satisfaz à condição:* $2(1+m)-(1-m)-(1-m)=0$ *ou* $4m=0$ *que dá* $m=0$.

O plano pedido é assim $x+y+z+1=0$ *que é um dos que define* r.

3) $$P\log(1-x^2)=P\log(1-x)+P\log(1+x)=$$
$$=x\log(1-x)+P\frac{x}{1-x}+x\log(1+x)-P\frac{x}{1+x}=$$
$$=x\log(1-x)+P(-1)+P\frac{1}{1-x}+x\log(1+x)-$$
$$-P1+P\frac{1}{1+x}=x\log(1-x)-x-\log(1-x)+$$
$$x\log(1+x)-x+\log(1+x)=x\log(1-x^2)-2x+$$
$$+\log\frac{1+x}{1-x}.$$

O desenvolvimento em série, válido para $|x|<1$, *é*
$$\log(1-x^2)=-x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}-\cdots-\frac{x^{2n+2}}{n+1}-\cdots \text{ e}$$

portanto: $$\lim_{x=0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2}=\lim_{x=0}\frac{-x^2-\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^6}{3}-\cdots}{x^2}$$
$=-1$.

4443 — 1) Enuncie as condições a que deve satisfazer (u_n) para que u_n tenha limite (finito ou infinito).

Quando se confundem os limites mínimo e máximo de uma sucessão, respectivamente, com os limites inferior e superior do conjunto dos seus termos?

Prove que $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$.

2) Enuncie alguma proposição que garanta a convergência uniforme de $\Sigma|u_n|$ e aproveite-a para provar que $\Sigma\alpha_n x^n$ e a sua associada são uniformemente convergentes em qualquer intervalo interior ao intervalo de convergência.

Determine a natureza de $\Sigma\,log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, recorrendo a S_n.

R: 2) $\Sigma\,log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *equivale a* $\Sigma[\log(n+1)-\log n]$ *e esta série é redutível. Fàcilmente se vê que* $S_n=\log(n+1)$.

Portanto $\lim\limits_{n=\infty}S_n=\infty$ *e a série é divergente.*

4444 — 1) Demonstre o teorema de Cauchy para as funções regulares $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ e deduza o método de primitiação formal de um produto.

2) Deduza o teorema dos acréscimos finitos para uma função de duas variáveis $f(x,y)$. Que se deve exigir a $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$ em torno de $P(a,b)$ para que $f(x,y)$ seja contínua nesse ponto.

Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho — (1.ª chamada) — 1958.

4445 — Utilizando a teoria da eliminação, determinar os parâmetros α e β por forma que os polinómios

$$f(x)=x^3-2x^2-x+\alpha$$

e

$$g(x)=x^3-6x^2+11x-\beta$$

admitam duas raízes comuns. Calculá-las.

R: 1	-2	-1	α	
	1	-6	11	$-\beta$
-1	-4	12	$-\alpha-\beta$	
4	4	$-4-\alpha-\beta$	4α	
-4	$4-\alpha-\beta$	$4+4\alpha$	-4α	

Para que existam duas raízes comuns é necessário que $R_1 = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 4 & -4-\alpha-\beta \end{vmatrix} = 0$, *o que dá* $-\alpha-\beta = -8$.

Então terá de ser $R = \begin{vmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 4 & -12 & 4\alpha \\ -4 & 4+4\alpha & -4\alpha \end{vmatrix} = 0$, *o que acontece com* $\alpha = 2$.

Os valores dos parâmetros são então $\alpha = 2$ e $\beta = 6$. *A equação das raízes comuns é* $R_2 x^2 + R_2^1 x + R_2^2 = 0$, *ou* $-4x^2 + 12x - 8 = 0$, *cujas raízes são* $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

4446 – 1) Calcular $P\,\dfrac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2}$.

4447 – 2) Estudar a função $y = \cos(x + a) + \dfrac{x}{2}\ (a > 0)$, no intervalo $(-\pi, \pi)$.

R: 1) *Extraindo-se a parte inteira tem-se*

$$\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2}$$

A teoria da decomposição em elementos simples ensina que $\dfrac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{x^2} + \dfrac{S_0}{x^2+1}$, *com* a_0 *e* a_1 *constantes e* S_0 *um polinómio do 1.º grau* $ax + b$.

Obtem-se fàcilmente $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ *e* $S_0 = 2$.

Então

$$P\,\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2}\ P1 + P\,\frac{1}{x^2} - P\,\frac{1}{x} - 2P\,\frac{1}{x^2+1} =$$

$$= x - \frac{1}{x} - \log x - 2\,\mathrm{arctg}\, x + C.$$

2) *O domínio é* $(-\pi, +\pi)$ *e a função é contínua em todos os pontos. Intercepta o eixo dos* yy *em* $(0, a)$ *e o eixo dos* xx *num ponto entre* $x = -\pi$ $x = \dfrac{\pi}{6} - a$.

A função tem um máximo em $x = \dfrac{\pi}{6} - a$ *e um mínimo em* $\dfrac{5\pi}{6} - a$, *é crescente nos intervalos* $\left(-\pi, \dfrac{\pi}{6} - a\right)$ *e* $\left(\dfrac{5\pi}{6} - a, \pi\right)$ *e decrescente em* $\left(\dfrac{\pi}{6} - a, \dfrac{5\pi}{6} - a\right)$.

A concavidade está voltada para cima em $\left(a - \pi, -\dfrac{\pi}{2} - a\right)$ *e* $\left(\dfrac{\pi}{2} - a, \pi - a\right)$ *e para baixo em* $\left(-\dfrac{\pi}{2} - a, \dfrac{\pi}{2} - a\right)$. *Apresenta pontos de inflexão em* $x = -\dfrac{\pi}{2} - a$ *e* $x = \dfrac{\pi}{2} - a$. *Não tem assíntotas.*

4448 – Dada a tabela $\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & t^3 & \alpha \end{array}$ utilize a teoria da interpolação para determinar a função $y = f(x, t)$.

Calcular α por forma que a equação $f(x, t) + x + 2 = 0$ defina, na vizinhança de $x = -2$ um função implícita $t(x)$, com um extremo neste ponto.

R: *A fórmula de* Gregory-Newton *dá fàcilmente:*

$$y = (x+1)\,t^3 + x\,(x+1) \cdot \frac{\alpha - 2t^3}{2}.$$

para que $f(x, t) + x + 2 = 0$ *defina uma função* $t(x)$, *na vizinhança de* $x = -2$ *e com um extremo neste ponto, terá de ser:*

$$\begin{cases} f(-2, t) = 0 \\ f_x^1(-2, t) + 1 = 0 \end{cases} \quad \textit{sistema que dá } \alpha = 6 \textit{ e } t = \sqrt[3]{2}.$$

Verifica-se também que $f_y^1\left(-2, \sqrt[3]{2}\right) \neq 0$.

I. S. C. E. F. – Matemáticas Gerais – Exame final – Época de Julho – (2.ª chamada) – 19/7/58.

4449 — Utilize a teoria dos determinantes para estudar o sistema

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 4 \\ x - 3y + 5z &= m \end{aligned}$$

Faça a interpretação geométrica dos resultados para os diferentes valores de m.

R: *Da matriz dos coeficientes* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ *o determinante de maior ordem significativo que se pode extraír (determinante principal) é de 2.ª ordem, por exemplo,* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Podem construir-se dois determinantes característicos:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad e \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & m \end{vmatrix}.$$

O primeiro é nulo e o segundo só é nulo com $m = -2$. *Então o sistema é simplesmente indeterminado se* $m = -2$ *e impossível se* $m \neq -2$.

A interpretação geométrica é óbvia: as duas primeiras equações definem uma recta pela qual passa também o plano $x + 3y - 4z = 4$; *se* $m = -2$, *o plano* $x - 3y + 5z = -2$ *passa pela recta e, se* $m \neq -2$, *será paralelo à recta.*

4450 — Resolva os seguintes problemas:

1) Determinar α, β e γ por forma que a função $y = \dfrac{x^2 + \alpha^2}{\beta x + \gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$ tenha um extremo em $x = 1$, apresente a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -1)$ e para cima em $(-1, +\infty)$ e tenha uma assíntota de coeficiente angular igual à unidade.

Caracterizar o extremo e determinar a ordenada na origem da assíntota.

2) Calcular $P\, tg^4\, x$.

R: 1) $y' = \dfrac{\beta x^2 + 2\gamma x - \alpha^2 \beta}{(\beta x + \gamma)^2}$. *Para que a função tenha um extremo em* $x = 1$ *terá de ser* (1) $\beta + 2\gamma - \alpha^2 \beta = 0$. *Como* $y'' = 2 \cdot \dfrac{\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2}{(\beta x + \gamma)^3}$ *o estabelecido quanto à concavidade exige* (2) $\gamma = \beta$. *O coeficiente angular da assíntota calcula-se do seguinte modo:*

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \alpha^2}{\beta x^2 + \gamma x} = \frac{1}{\beta}.$$

Como $m = 1$, *vem* (3) $\beta = 1$. *As condições* (1), (2) *e* (3) *dão* $\alpha = \pm\sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. *A ordenada na origem da assíntota é* $p = \lim_{x \to \infty} [f(x) - m x] = \lim_{x \to \infty} \dfrac{3 - x}{x + 1} = -1$. *Como* $y''(1) > 0$ *o ponto* $x = 1$ *é abcissa do mínimo.*

2) $P\, tg^4 x = P\, tg^2 x \cdot tg^2 x = P\,(\sec^2 x - 1)\, tg^2 x = P\, tg^2 x \sec^2 x - P\,(\sec^2 x - 1) = \dfrac{tg^3 x}{3} - tg\, x + x + c$.

4451 — Resolva os seguintes problemas:

1) Dada a função $z = sen\,(x + y)$, calcular $\dfrac{\partial^k z}{\partial x^k}$ e $\dfrac{\partial^k z}{\partial x^i\, \partial y^{k-i}}$.

Supondo $x = t + a$ e $y = t - b$, aplicar a regra de derivação da função composto para calcular $\dfrac{d^n z}{d t^n}$.

2) Sendo $f(x, y) = x^2 y^3 + c x^3 + x y^2 + d x + y - 1$, determinar c e d por forma que na vizinhança de $x = 1$ a equação $f(x, y) = 0$ defina uma função implícita $y(x)$ que tem um zero duplo nesse ponto. Em $x = 1$ a função $y(x)$ tem um extremo? Justifique.

R: 1) $\dfrac{\partial^k z}{\partial x^k} = \operatorname{sen}\left(x + y + k\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial^k z}{\partial x^i\, \partial y^{k-i}} = \operatorname{sen}\left(x + y + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n z}{d t^n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\, \partial y} + \binom{n}{2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\, \partial y^2} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 2^n \operatorname{sen}\left(x + y + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2) *Para* $x = 1$ *vem* $y = 0$ *e então terá de ser:*

$$\begin{cases} f(1, 0) = 0 \\ f'_x(1, 0) = 0 \\ f'_y(1, 0) \neq 0. \end{cases}$$

As duas primeiras equações dão $\begin{cases} c + d = 1 \\ 3c + d = 0, \end{cases}$ *sistema cuja solução é* $c = -\dfrac{1}{2}$ $d = \dfrac{3}{2}$. *Como* $f'_y(x, y) = 3x^2 y^2 + 2xy + 1$, *vem* $f'_y(1, 0) \neq 0$. *Em* $x = 1$ *a função* $y(x)$ *tem um mínimo porque* $\left(\dfrac{d^2 y}{d x^2}\right)_1 = -\dfrac{f''_{x^2}(1, 0)}{f'_y(1, 0)} = 3 > 0$.

Resoluções de Fernando de Jesus.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Prova prática — Epoca de Outubro — 15-10-1958.

4452 — *a*) Calcule as raízes de $\varphi(x) = 2x^4 - 13x^3 + 12x^2 + 17x - 10$ e determine a expressão lagrangeana do polinómio que para esses valores de x (por ordem crescente) se reduz a 1, 2, 6 e 3, respectivamente.

4453 — *b*) Prove a independência das formas $a_i^{\alpha} x_{\alpha}$ que têm por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e resolva o sistema $a_i^{\alpha} x_{\alpha} = b_i$.

R: a) *As possíveis raízes racionais* $\frac{p}{q}$ *são as seguintes:*

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$$

Como, $\begin{cases}\varphi(1) = 8\\ \varphi(-1) = 0\end{cases}$ *verifica-se imediatamente que* -1 *é raiz. Efectuando a divisão de* $\varphi(x)$ *por* $(x+1)$, *obtem-se o cociente* $\varphi_1(x) = 2x^3 - 15x^2 + 27x - 10$, *sobre o qual vai incidir a pesquisa das raízes. Como*

$\begin{cases}\varphi_1(1) = 4 = \overline{p \dot{-} q} \\ \varphi_1(-1) = -54 = \overline{p + q}\end{cases}$ *permanecem possíveis raízes os seguintes valores:*

$$2, 5, \frac{1}{2}$$

Pela regra de Ruffini, *aplicada a* $\varphi_1(x)$, *conclui-se fàcilmente que as raízes são efectivamente* $2, 5$ e $\frac{1}{2}$.

A segunda parte do problema corresponde a determinar o polinómio interpolador (forma lagrangeana), dada a tabela $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 5 \\ \hline u & 1 & 2 & 6 & 3 \end{array}$. *Esse polinómio é*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=3} \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} u_i \quad \textit{em que:}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi(x)}{x+1} = 2x^3 - 15x^2 + 27x - 10, \quad \varphi_0(-1) = -54$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{x - \frac{1}{2}} = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{x-2} = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5, \quad \varphi_2(2) = -27$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\varphi(x)}{x-5} = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2, \quad \varphi_3(5) = 162$$

Então,

$$f(x) = \frac{2x^3 - 15x^2 + 27x - 10}{-54} \cdot 1 + \frac{2x^3 - 12x^2 + 6x + 20}{\frac{81}{4}} \cdot 2 + \frac{2x^3 - 9x^2 - 6x + 5}{-27} \cdot 6 + \frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{162} \cdot 3 = -\frac{20}{81}x^3 + \frac{28}{27}x^2 + \frac{37}{27}x + \frac{88}{81}.$$

b) *Como o determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, *de* A *é* 4 *e as formas são linearmente independentes. O sistema é indeterminado de grau* 1 *e a solução é a seguinte:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - x_5 & 1 & 1 & 1 \\ b_2 - x_5 & -1 & -1 & -1 \\ b_3 - x_5 & 1 & -1 & 1 \\ b_4 - x_5 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - x_5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 - x_5 & 1 & 1 \\ 1 & b_2 - x_5 & -1 & -1 \\ 1 & b_3 - x_5 & -1 & 1 \\ 1 & b_4 - x_5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8}$$

etc.

4454 — *a*) Calcule $P\,x \cdot \operatorname{arctg} x$.

4455 — *b*) Desenvolva $\frac{1}{(1-x)^3}$ em série de Mac-Laurin.

R: a) $P\,x \cdot \mathit{arctg}\, x = \frac{x_2}{2} \cdot \mathit{arctg}\, x - P\,\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\,\mathit{arctg}\, x - \frac{1}{2} P\,1 + \frac{1}{2} P\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\,\mathit{arctg}\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\mathit{arctg}\, x + C.$

b) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_0^\infty x^n, \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + n\,x^{n-1} + \cdots = \sum_0^\infty (n+1)\,x^n, \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}(2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)\,x^{n-2} + \cdots) = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \ |x| < 1.$$

4456 — *a*) Em que condições define

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

uma rotação de eixos rectangulares?

4457 — *b*) Supondo tais condições satisfeitas, mostre que se tem sempre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} \quad (z=f(x,y))$$

R: a) *Com* $a_1^1=\cos\alpha$, $a_1^2=\operatorname{sen}\alpha$, $a_2^1=\operatorname{sen}\alpha$ *e* $a_2^2=-\cos\alpha$.

b) $x=x'\cos\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha$

$y=x'\operatorname{sen}\alpha-y'\cos\alpha$ *e portanto:*

$$\frac{\partial z}{\partial x'}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial y'}=\frac{\partial z}{\partial x}\operatorname{sen}\alpha-\frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha$$

As derivadas de 2.ª ordem calculam-se ràpidamente, uma vez que as relações de transformação são lineares. Assim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\operatorname{sen}^2\alpha-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\alpha$$

e, somando membro a membro, obtem-se a igualdade proposta.

Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de Frequência.**

4458 — *a*) Enuncie o teorema relativo à existência e derivabilidade de um sistema de funções implícitas e deduza as expressões das suas derivadas de 1.ª ordem em relação às variaveis de que dependem.

4459 — *b*) Enuncie as propriedades que respeitam à função $F(y)=\int_a^y f(x)\,dx$ onde a se considera constante. Indique qual a derivada em ordem a t da função $y(t)=\int_t^{\beta} f(x)\,dx$ onde β se considera cons- e defina integral indefinido.

4460 — *c*) Defina curvatura e torsão de uma curva torsa num dos seus pontos e escreva na forma vectorial e na forma cartesiana as fórmulas de Frenet-Serret, indicando o significado das grandezas que nelas figuram.

II

4461 — *a*) Classifique a quádrica de equação

$$2x^2-2z^2+2xy-2yz-x-z=0.$$

Em seguida determine uma equação canónica da superfície

$$xy^2-2z^2\pm x=0$$

4462 — *b*) Determine os pontos de coordenadas extremas da curva de equações

$$x^3+y^3-3a^2xy=0 \qquad (a\neq 0,\ c^{te}).$$

4463 — *c*) Dada a expressão diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2(1-y)\frac{dy}{dx}.$$

Mude as variáveis x e y nas variáveis u e v (u ind., v dep.), sabendo que as equações de ligação são

$$x=\log u,\quad y=\frac{v}{u^2}.$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final — 1.ª época — Julho 1958.**

4464 — *a*) Defina envolvente duma família de superfícies, características e aresta de reversão, enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies cilíndricas.

4465 — *b*) Escreva a equação vectorial das superfícies regradas, indique o significado das grandezas que nela figuram, escreva a equação do plano tangente num ponto de tal superfície e deduza a partir dela uma condição para que a superfície seja planificável.

4466 — *c*) Defina equação diferencial de ordem n; considere o caso particular da equação diferencial linear e homogénea e enuncie as suas propriedades.

II

4467 — *a*) Ache uma equação cartesiana da envolvente da família de superfícies de equação

$$x-y+3\lambda z+\lambda(\lambda^2+1/3)=0.$$

aonde λ é o parâmetro da família.

4468 – *b*) Calcule o volume da região do espaço limitado pela superfície

$$z=0\,,\ x^2-4x+y^2=0\,,\ x^2+y^2-4y=0\,,\ z=xy\,.$$

4469 – *c*) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''+2y'+y=x\,.$$

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — (2.ª chamada) — Fevereiro de 1958.

4470 – Calcule o comprimento do arco da ciclóide $x=\theta-\operatorname{sen}\theta$, $y=1-\cos\theta$ compreendido entre $\theta=0$ e $\theta=2\pi$.

R: $$s=2\int_0^{2\pi} sen\,\frac{1}{2}\,\theta\,d\,\theta=-4\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$

4471 – Determinar a série de Mac-Laurin para $\operatorname{arc\,sen} x$ utilizando $\operatorname{arc\,sen} x=\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

R: $$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{z^2}{2}+\frac{3z^4}{8}+\cdots$$

$$arc\,sen\,x=\int_0^x\left(1+\frac{z^2}{2}+\frac{3z^4}{8}+\cdots\right)dz=$$

$$=\left[\left(z+\frac{1}{2\cdot 3}\,z^3+\frac{3}{8\cdot 5}\,z^5+\cdots\right)\right]_0^x=$$

$$=x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4x^5}+\cdots.$$

4472 – Desenvolva em série de Fourier $f(x)=|x|$ para $x\,\epsilon\,[-\pi,\pi]$.

R: $$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

4473 – Determinar os máximos e mínimos da função

$$f(x,y)=x^3+y^3+3xy$$

R: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ *são satisfeitas para* $x=y=0$ e $n=y=-1$. *No ponto* $(0,0)$ *não existe nem máximo nem mínimo. No ponto* $(-1,-1)$ *existe um máximo cujo valor é* $f(-1,-1)=1$.

4474 – Calcular o comprimento do arco da curva

$$x=t^3\,,\ y=t^2 \text{ de } t=0\ \ t=4$$

R: $$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}t^2}\,2\,t\,dt=$$

$$=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}\,t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}\,(37\sqrt{37}-7)$$

4475 — Desenvolver em série de Mac-Laurin $e^x \operatorname{sen} x$ e derivar para obter a série de $e^x\cos x$.

R: $$e^x\,sen\,x=\left(1+x+\frac{x^2}{21}+\frac{x^3}{32}+\cdots\right)$$

$$\left(x-\frac{x^3}{31}+\frac{x^5}{51}+\cdots\right)=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\cdots$$

$$\frac{d}{dx}\,(e^x\,sen\,x)=e^x\,sen\,x+e^x\cos x=1+2x+x^2-$$

$$-\frac{x^4}{6}-\cdots.\ Então\ e^x\cos x=\left(1+2x+x^2-\frac{x^4}{6}-\cdots\right)-$$

$$-\left(x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\cdots\right)=1+x-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

4476 — Desenvolva em série de Fourier $f(x)=x^2$ no intervalo $0<x<2\pi$.

R: $$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\,sen\,nx}{n}\right)$$

4477 – Determinar o gradiante no ponto $P(0,3)$ da função $z=ye^x$.

R: *No ponto* $(0,3)$ *na direcção* θ, $\frac{dz}{ds}=3\cos+$ $+\,sen\,\theta$. *Para determinar* θ *para o qual* $\frac{dz}{ds}$ *seja máximo resolve-se* $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)=-3\,sen\,\theta+\cos\theta=0$ *o que dá* $tg\,\theta=\frac{1}{3}$ *e* θ *ou é do primeiro ou do terceiro quadrante. E como* $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)=-3\cos\theta-sen\,\theta$ *é negativo no primeiro quadrante, o gradiante é* $\frac{dz}{ds}=\sqrt{10}\ (\theta=18°\,26')$.

Enunciados e soluções de A. S. do Carmo Moral

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 2.º Exame de frequência — 28-6-57.

4478 — Deduza a fórmula de Taylor para uma função escalar de ponto dum espaço R_n.

Diga como a utiliza para caracterizar um extremo relativo da função escalar num ponto interior do seu domínio; enuncie condições necessárias e suficientes de extremo, em termos diferenciais.

Diga em que consiste o método dos multiplicadores de Lagrange e demonstre o teorema em que ele se fundamenta.

4479 — Defina integral curvilíneo e enuncíe as principais propriedades.

Indique as fórmulas de redução dos integrais curvilíneos dx, dy e ds, da função $f(x,y)$ ao longo do arco AB duma curva Γ, tanto no caso desta estar representada por uma equação do tipo $y=g(x)$, como, paramètricamente, representada por $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Deduza uma das fórmulas de Riemann.

Calcule, reduzindo-o a integrais cursilíneos, o integral duplo

$$\iint_\Delta x^2\,dx\,dy$$

onde o domínio Δ é limitado por $y=x^2$ e $y=2+\dfrac{x^2}{2}$.

4480 — O que é a série de Fourier duma função $F(x)$?

Deduza a fórmula de Liouville e mostre a sua utilidade.

Enunciado geral do problema do Cálculo das Variações.

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Exame final — 2.ª chamada — 20-7-57.

4481 — Reduza a primitivação de

a) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}$$

b) $$\frac{1}{x+1+\sqrt{-2x-x^2}}$$

c) $$\frac{1}{\operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}}$$

à primitivação de fracções racionais. Complete o cálculo para uma delas.

R: *Para a primeira fracção, definida em* $(-1,+\infty)$, *faça-se* $1+x=t^6$. *A função* $x=t^6-1$ *que se vai supor definida apenas em* $(0,+\infty)$, *é crescente e tem derivada* $\dfrac{dx}{dt}=6t^5$; *sendo monótona em* $(0,+\infty)$ *admite uma inversa unívoca* $t=+\sqrt[6]{1+x}$. *Vem:*

$$\frac{6t^5}{t^3-t^2}=\frac{6t^3}{t-1}=6t^2+6t+6+\frac{6}{t-1}.$$

Em qualquer intervalo fechado, contido no intervalo aberto $(-1,+\infty)$ *tem se*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}=2\sqrt{1+x}+3\sqrt[3]{1+x}+$$
$$+6\sqrt[6]{1+x}+6\log\left(\sqrt[6]{1+x}-1\right)+C.$$

Na segunda fracção faça-se $x+1=t$ *e obtém-se* $\dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}$ *definida para* $|t|<1$. *Faça-se a substituição* $\sqrt{1-t^2}=(1-t)u$ *ou melhor* $t=\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$; *supondo esta função definida em* $(0,+\infty)$ *ela é crescente com derivada* $\dfrac{dt}{du}=\dfrac{4u}{(u^2+1)^2}$; *esta função transforma o intervalo* $(0,+\infty)$ *no intervalo* $(-1,1)$ *e admte uma inversa unívoca* $u=+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}$. *Vem:*

$$\frac{4u}{(u^2+2u-1)(1+u^2)}=\frac{4u}{(u-a)(u-b)(1+u^2)}=$$
$$=\frac{A}{u-a}+\frac{B}{u-b}+\frac{M+Nu}{1+u^2}$$

com $a=-1-\sqrt{2}$, $b=-1+\sqrt{2}$, $A=\dfrac{4a}{(a-b)(1+a^2)}$,

$B=\dfrac{4b}{(b-a)(1+b^2)}$, $M=\dfrac{A}{a}+\dfrac{B}{b}$, $N=-(A+B)$.

Finalmente a terceira fracção está definida só para valores de x *que não anulem* $\operatorname{sen} x$ *nem tornem nulo ou negativo* $\cos x$: *por exemplo, o intervalo aberto* $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ *e uma infinidade numerável doutros intervalos.*

Pondo $\cos x=t^2$, *isto é,* $x=\operatorname{arc\,cos} t^2$, *função definida para* t *no intervalo* $(0,1)$, *é uma função decres-*

cente que transforma o intervalo $(0,1)$ *no intervalo* $\left(\frac{\Pi}{2},0\right)$; *a derivada é* $\frac{dx}{dt}=\frac{-2t}{\sqrt{1-t^4}}$. *Vem:*

$$\int\frac{dx}{sen\,x\sqrt{cos\,x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^4}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+1)(t-1)(t^2+1)}=2\int\frac{1/2\cdot dt}{(t+1)(t-1)}-$$

$$-2\int\frac{1/2\cdot dt}{t^2+1}=1/2\int\frac{dt}{t-1}-1/2\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$\int\frac{dx}{sen\,x\sqrt{cos\,x}}=log\,c\sqrt{\frac{\sqrt{cos\,x}-1}{\sqrt{cos\,x}+1}}-arctg\sqrt{cos\,x}$$

4482 — Calcule o volume do sólido limitado por $z=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$

a) Utilizando coordenadas esféricas; *b*) por qualquer outro processo.

R: *A equação* $z=x^2+y^2$ *representa um paraboloide de revolução em torno de* Oz *com vértice na origem;* $z^2=x^2+y^2$ *representa uma superfície cónica de revolução em torno de* Oz *com vértice na origem. É a folha superior do cone que intersecta o paraboloide, segundo uma circunferência situada no plano* $z-1=0$ *de centro no eixo* Oz.

As coordenadas esféricas são

$$x=\rho\cos\varphi\,sen\,\theta \qquad y=\rho\,sen\,\varphi\,sen\,\theta \qquad z=\rho\cos\theta$$

e tem-se

$$\frac{\partial(x\,y\,z)}{\partial(\rho\,\theta\,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\,sen\,\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\,sen\,\varphi\,sen\,\theta\\ sen\,\varphi\,sen\,\theta & \rho\,sen\,\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\,sen\,\theta\\ \cos\theta & -\rho\,sen\,\theta & 0\end{vmatrix}=\rho^2\,sen\,\theta$$

Para o volume vem

$$V=\iiint dx\,dy\,dz=\iiint\rho^2\,sen\,\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}sen\,\theta\,d\theta\int_0^{\frac{cos\,\theta}{sen^2\theta}}\rho^2\,d\rho$$

visto que se tem:

$$z=x^2+y^2 \quad ou \quad \rho\cos\theta=\rho^2\cos^2\varphi\,sen^2\theta+\rho^2\,sen^2\varphi\,sen^2\theta$$
$$ou \quad \cos\theta=\rho\,sen^2\theta$$

segue-se o cálculo:

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}sen\,\theta\,d\theta\cdot\frac{1}{3}\frac{cos^3\theta}{sen^6\theta}=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}cotg^3\theta\cdot cosec^2\theta\cdot d\theta=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\left[-\frac{1}{4}cotg^4\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=+\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

Para calcular por outro caminho, é de escolher, evidentemente, aquele que resulta do facto de os planos $z=k$ *com* $0<k<1$, *cortarem o sólido segundo coroas circulares de área* $A(z)=\pi(z-z^2)$.

Então

$$V=\int_0^1\pi(z-z^2)\,dz=\pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Pode ainda calcular-se como a diferença de volumes de dois cilindroides de base $x^2+y^2=1$ *e determinados pelo cone e parabolóide. Vem*

$$V=\iint_c\left(\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right)dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^1dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_c(\rho-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\alpha=\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^1(\rho^2-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\alpha\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

4483 — Procurar na curva $x^2-xy+y^2-1=0$, o ponto mais próximo e também o mais afastado da recta $3x-4y=12$.

R: *Valores extremos da distância de* (x,y) *à recta, com a condição de* (x,y) *pertencer à curva.*

A função a extremar pode ser antes $(3x-4y-12)^2$ *com a condição* $x^2-xy+y^2-1=0$.

Com o método dos multiplicadores de Lagrange

$$g(x,y)=(3x-4y-12)^2+\lambda(x^2-xy+y^2-1)$$

e determinam-se os multiplicadores com o sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}=6(3x-4y-12)+2\lambda x-\lambda y=0\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y}=-8(3x-4y-12)-\lambda x+2\lambda y=0\\[2mm] x^2-xy+y^2-1=0\end{cases}$$

A primeira equação dá $\lambda=\frac{6(3x-4y-12)}{y-2x}$ *que* *se elimina nas outras; vem o sistema*

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2x-y}=\dfrac{4}{2y-x} \\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}x \\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{\sqrt{39}} \\ y_1=\dfrac{5}{\sqrt{39}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{2}{\sqrt{39}} \\ y_2=-\dfrac{5}{\sqrt{39}} \end{cases}.$$

Estudam-se agora os extremos livres das funções

$$g_1(x,y)=(3x-4g-12)^2+\frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2-xy+y^2-1)$$

$$\text{no ponto}\quad\left(-\frac{2}{\sqrt{39}},\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

$$g_2(x,y)=(3x-4g-12)^2-\frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2-xy+y^2-1)$$

$$\text{no ponto}\quad\left(\frac{2}{\sqrt{39}},-\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

Tem-se

$$\frac{\partial^2 g}{d x^2}=18+2\lambda=9\left(2\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-24-\lambda=-\left(2\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=32+2\lambda=2\left(16\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right).$$

sendo os sinais superiores para a função $g_1(x,y)$ *e os inferiores para* $g_2(x,y)$. *Como se tem*

$$\left(24\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right)^2-18\left(2\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right)\left(16\pm\frac{1}{3\sqrt{39}}\right)=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{17}{117}-\dfrac{276}{3\sqrt{39}}<0 \\ -\dfrac{17}{117}+\dfrac{372}{3\sqrt{39}}>0 \end{cases}$$

A função $(3x-4y-12)^2$ *tem extremos da mesma qualidade e nos mesmos pontos onde os têm as funções* $g_1(x,y)$ *e* $g_2(x,y)$; *vem então*

$$\text{máximo em}\left(-\frac{2}{\sqrt{39}},\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

$$\text{mínimo em}\left(\frac{2}{\sqrt{39}},-\frac{5}{\sqrt{39}}\right).$$

Fernando de Jesus

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Fisico--Quimicas e em Ciências Geográficas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geografo — Ano de 1958 — (1.ª chamada). F. C. L.

4484 — Determinar todos os números naturais que divididos por 17 dão resto igual ao quadrado do cociente respectivo.

R. *Os números serão da forma* $17x+x^2$ *sendo* x *um inteiro maior que zero e tal que* $x^2<17$. *Conclue-se então que* x *só pode ser os valores* 1, 2, 3 *e* 4 *e os correspondentes números são* 18, 38, 60 *e* 84.

4485 — Determinar os valores de m para os quais a equação $x^2-3x+6=m(x-6-m)$ tem as raízes reais e desiguais.

R. *A equação proposta è equivalente a* $x^2-(3+m)x+6+6m+m^2=0$. *Para que as raízes sejam reais e desiguais è necessário que o descriminante seja positivo. Será então* $(m+3)^2-4(m^2+6m+6)>a$ *desigualdade equivalente a* $m^2+6m+5<0$; *esta como se reconhece fácilmente tem como soluções os valores de* m *tais que* $-5<m<-1$, *visto* -5 *e* -1 *serem os zeros do trinómio primeiro membro da desigualdade.*

4486 — Derivar a função $y=x/\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ e simplificar o resultado.

R. *Será* $\quad y'=(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}+x.\left(-\frac{1}{2}\right).$

$$.(1-x^3)^{-\frac{1}{2}-1}.(-3x^2)=(2+x^3):2\sqrt{(1-x^3)^3}.$$

4487 — Sem usar tábuas, resolver o triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 14 metros e um dos catetos 7 metros. (usar $\sqrt{3}=1{,}732$).

R. *Como a hipotenusa é o dobro de um dos catetos, então o ângulo oposto a esse cateto mede* $\frac{\pi}{6}$ *radianos e o outro ângulo agudo* $\frac{\pi}{3}\cdot$ *Seja* $b=7$ *e* $a=14$; *como sabemos é sen* $\widehat{C}=c/a$ *e como* $\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$ *temos*