Uma breve história de π

José Carlos de Sousa Oliveira Santos
Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Neste texto conta-se a história do número π, desde o Egipto e da Babilónia da Antiguidade às mais recentes descobertas.

A educação matemática que se recebe no Ensino Secundário deixa demasiadas vezes a impressão de que a Matemática é um assunto «morto», isto é, que a Matemática é obra de alguns grandes matemáticos do passado (Euclides, Arquimedes, Lagrange, Cauchy, …) e que estudar Matemática consiste unicamente em reaprender o que esses autores nos deixaram. Este artigo pretende mostrar com um exemplo concreto como a Matemática é um assunto dinâmico onde o passado, longe de ser um objecto estático feito para ser admirado ou, quando muito, imitado, é uma fonte de inspiração para novos avanços. O exemplo em questão é o número π.

É difícil conceber algum tema matemático que seja mais popular junto de não matemáticos do que o estudo das propriedades do número π. De facto, citando [2, p. v], π «é um dos poucos conceitos matemáticos cuja menção provoca uma reacção de reconhecimento e de interesse por parte de quem não está profissionalmente ligado ao assunto». Quase qualquer pessoa minimamente culta sabe que π é o número que, multiplicado pelo diâmetro de uma circunferência, dá o seu perímetro e que o seu valor é, aproximadamente, 3,14. É também sabido que a área de um círculo pode ser obtida multiplicando π pelo quadrado do raio.

Que o perímetro de um círculo pode ser obtido multiplicando o seu diâmetro por uma constante é um conhecimento antigo; já há cerca de 4000 anos os babilónios afirmavam que aquela constante é $3+\frac{1}{8}$ (=3,125) e os egípcios que o seu valor é $4.\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ($\cong$3,16). Que uma tal constante deveria existir é algo que não é difícil de conjecturar, isto é, é normal que se pense que se se tiver dois círculos e se o diâmetro do primeiro é k vezes o diâmetro do segundo (para algum número positivo k), então o perímetro do primeiro também é igual a k vezes o perímetro do segundo. Por outras palavras, o quociente entre o perímetro e o diâmetro é o mesmo para todos os círculos. O problema está então em determinar o valor daquele quociente. Analogamente, basta alguma prática de cálculo de áreas para que se torne natural pensar que, ao multiplicarmos o raio de um círculo por um número positivo k, estamos a multiplicar a sua área por k^2; consequentemente, o quociente entre a área de um círculo e o quadrado do raio é o mesmo para todos os círculos. Uma questão que se levanta é a seguinte: dado um círculo de raio r, perímetro p e área A, porque é que os quocientes acima mencionados,

$$\frac{p}{2r} \text{ e } \frac{A}{r^2},$$

são iguais? Há várias maneiras de o justificar. A mais simples consiste talvez em observar que se se dividir o círculo num número elevado (e par) de bocados iguais, como na figura 1, então é possível reordenar esses bocados de modo a obter-se algo muito próximo de um rectângulo com altura r e largura igual a metade do perímetro da circunferência, ou seja, igual πr. Logo, a sua área é igual a πr^2.

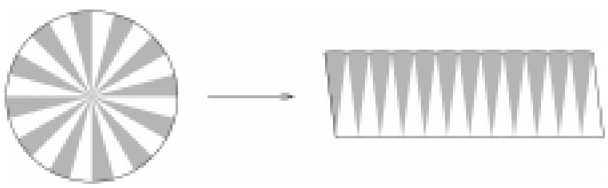

Figura 1

Como se irá ver, os matemáticos ocuparam-se não apenas com o cálculo do *valor* de π mas também com a tentativa de determinar a *natureza* de π.

Naturalmente, as primeiras tentativas de determinar o valor de π devem ter tomado a seguinte forma: alguém enrolava uma corda em torno de um objecto circular (uma roda, por exemplo), marcava o ponto onde a corda tocava novamente na sua origem e em seguida via quantas vezes é que esse pedaço de corda (o que ia da origem até ao ponto marcado) era maior do que o diâmetro da roda, eventualmente pegando num pau do tamanho do diâmetro e observando quantos paus daquele tamanho eram precisos para que a soma dos seus comprimentos fosse igual ao comprimento da porção de corda. Facilmente se conclui por este processo que π é ligeiramente superior a 3. Infelizmente, muitos povos antigos não deixaram documentos a explicar como chegaram aos resultados matemáticos que obtiveram, mas por vezes é possível conjecturar quais foram os métodos empregues. Por exemplo (veja-se [4, p. 25] para uma explicação detalhada) é razoável supor que o valor aproximado de π obtido pelos antigos egípcios que foi acima mencionado ($\pi \cong 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$) seja proveniente da seguinte observação: considera-se uma circunferência inscrita num quadrado que está dividido em nove quadrados iguais, como na figura 2. É natural supor que as áreas do círculo e do octógono (irregular) que aí podem ser observados são semelhantes. A área do octógono é igual à área de 7 quadrados pequenos (ou seja, 5 quadrados pequenos mais quatro metades de quadrados). Se cada quadrado pequeno tiver 3 unidades do comprimento, a área do octógono será igual a $7 \times 9 = 63$. Então, a área da circunferência de raio $\frac{9}{2}$ é aproximadamente igual a 63, que, por sua vez, é aproximadamente $64 = 8^2$. Então um valor aproximado para π é

$$\pi \cong \frac{8^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = 4.\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

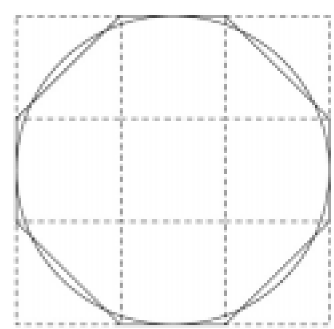

Figura 2

Um grande progresso no que se refere à determinação do valor de π teve lugar simultaneamente (e independentemente) na China e na Grécia no século III a. C. A ideia que surgiu então foi a de considerar dois polígonos regulares com o mesmo número de lados, dos quais um estava dentro do outro de modo que o círculo cuja área se queria determinar estivesse situado entre os dois. Além disso, tal como na figura 3, o polígono mais pequeno deveria estar inscrito na circunferência (ou seja, os vértices deveriam ser pontos da circunferência), enquanto que o polígono maior deveria estar circunscrito (ou seja, os lados deveriam ser tangentes à circunferência). Então a área do círculo seria um valor intermédio entre as áreas dos dois polígonos e, além disso, quanto maior fosse o número de lados mais a área dos polígonos estaria próxima da do círculo.

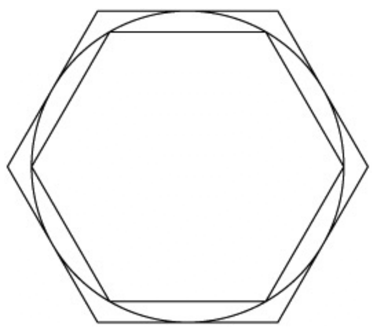

Figura 3

Arquimedes de Siracusa (*ca.* 287–212 a. C.) foi o matemático grego que criou este método de obter valores aproximados de π. Se Arquimedes se tivesse limitado aos hexágonos da figura 3, teria apenas podido chegar à conclusão de que $3<\pi<4$, mas foi duplicando sucessivamente o número de lados dos polígonos envolvidos até chegar a 96 ($=2^4\times 6$), o que lhe permitiu concluir que

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}, \text{ ou seja, } 3{,}14084<\pi<3{,}142858.$$

Na China, Liu Hiu empregou o mesmo método em 264 a. C. mas levou os cálculos mais longe e, recorrendo a um polígono com 192 lados (ou seja, o dobro do número de lados do polígono usado por Arquimedes), concluiu que $3{,}141024<\pi<3{,}142704$.

É preciso ter em mente que todos estes cálculos foram feitos sem computadores nem trigonometria! Durante quase vinte séculos, este foi o método usado tanto na China como no Ocidente para obter valores aproximados de π. Recorrendo a este método e levando em consideração um polígono com 15×2^{31} lados, o matemático holandês Ludolph van Ceulen (1539–1610) calculou os 20 primeiros dígitos de π em 1596. No entanto, não ficou por aqui e continuou a determinar dígitos de π até ao fim da sua vida, tendo chegado aos 35 dígitos. É necessário deixar claro que isto foi o resultado de uma quantidade monumental de cálculos mas não envolveu nenhuma ideia radicalmente nova relativamente ao trabalho de Arquimedes (a matemática chinesa só se tornaria conhecida no Ocidente vários séculos mais tarde).

O grande avanço que se seguiu veio de uma direcção totalmente nova e resultou do uso de Análise e não de Geometria. Lentamente, a partir do século XVI, os matemáticos começaram a manipular somas e produtos com um número infinito de factores. Um exemplo disto é uma fórmula descoberta pelo matemático francês François Viète (1540–1603). Ele observou que a área de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1 é igual a 2. Em seguida, observou que se se substituísse o quadrado por um octógono regular, a área deste seria igual a

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

se se tivesse um polígono regular de 16 lados a sua área seria

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

e assim sucessivamente. Sendo assim, concluiu Viète, uma vez que à medida que se aumenta o número de lados mais a área do polígono se aproxima da do círculo, que é igual a π, tem-se

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots}.$$

Esta fórmula, embora de origem geométrica, envolve um produto com uma infinidade de factores, que é um conceito tipicamente retirado da Análise. Uma fórmula do mesmo género mas que não envolve raízes quadradas foi descoberta pelo matemático inglês John Wallis (1616–1703):

$$\pi=2\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots$$

Poucas décadas mais tarde, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) descobriu a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Antes de prosseguir, é preciso deixar claro que nenhuma destas fórmulas tornou obsoleto o método de Arquimedes de determinar o valor de π, pois este acaba por exigir menos cálculos ao tentar-se determinar π com um certo número de casas decimais do que se se recorrer a qualquer das três fórmulas anteriores; o próprio Viète determinou π com nove casas decimais recorrendo ao método de Arquimedes e não à sua própria fórmula.

Foi Isaac Newton (1642–1727) quem descobriu uma maneira de escrever π como soma de uma infinidade de números através de uma fórmula que também permitia calcular um grande número de casas decimais de π. A fórmula em questão foi

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} - \cdots\right)$$

(neste caso, a regra sobre como passar de cada termo para o seguinte é um pouco complicada; pode-se ver qual é, descrita pelo próprio Newton, em [2, p. 110] e em [4, p. 143]). Esta fórmula permitiu a Newton determinar as primeiras 16 casas decimais de π com apenas 24 anos de idade! Bastou-lhe somar as 22 primeiras parcelas da sua fórmula; por contraste, somando as 22 primeiras parcelas na fórmula de Leibniz obtém-se apenas 3,096…, ou seja, nem mesmo o primeiro dígito após a vírgula está correcto.

É conveniente neste ponto introduzir alguma terminologia. Uma soma $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ com uma infinidade de parcelas é aquilo que em Matemática se designa por *série*. As séries que nos interessam aqui são as *séries convergentes*, isto é, aquelas para as quais existe um número *s* (a soma da série) tal que a distância entre *s* e a soma $a_1+a_2+\ldots+a_n$ das *n* primeiras parcelas da série se torna tão pequena quanto se queira à medida que *n* cresce. O problema com a série de Leibniz, comparativamente com a de Newton, reside no facto de a primeira convergir lentamente (isto é, é preciso somar muitas parcelas para se obter uma boa aproximação da soma da série) enquanto que a segunda converge rapidamente.

Após a descoberta de Newton, outros matemáticos encontraram séries que convergem rapidamente para π. Para se compreender o que se vai seguir, é conveniente conhecer a função tangente; o seu gráfico (ou, mais correctamente, o gráfico da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) está representado na figura 4.1, enquanto que a figura 4.2 representa o gráfico da função inversa da função tangente, ou seja, da função que a um número real *x* faz corresponder o ângulo θ tal que $\tan(\theta)=x$; esta função designa-se por *arco tangente*. Uma vez que $\tan(\frac{\pi}{4})=1$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, onde arctan é uma abreviatura de arco tangente.

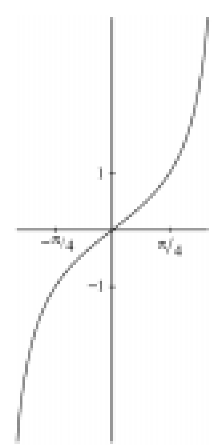

Figura 4.1

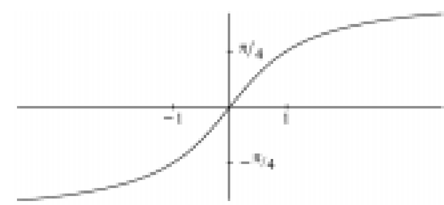

Figura 4.2

O matemático escocês James Gregory (1638–1675) descobriu que, para números reais no intervalo [-1,1], se tem

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Se se substituir x por 1 nesta fórmula obtém-se novamente a fórmula de Leibniz para $\pi/4$ que, como já foi visto, converge lentamente. No entanto, a série que aparece na fórmula de Gregory converge cada vez mais rapidamente à medida que x se aproxima de 0. Esta constatação, juntamente com a igualdade

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6},$$

fez com que o astrónomo Abraham Sharp (1651–1742) conseguisse calcular π com 72 casas decimais. Outro astrónomo, James Machin (1680–1752), obteve π com 100 casas decimais recorrendo à fórmula de Gregory e à igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Antes de se prosseguir, é preciso que fique claro que, nesta fase, já se ultrapassou há muito o grau de precisão com que é preciso conhecer π de modo a podê-lo empregar na prática. Basta ver que que para determinar o perímetro de uma circunferência cujo raio seja igual a 150 milhões de quilómetros (aproximadamente a distância da Terra ao Sol) com um erro inferior a 1 milímetro, basta conhecer o valor de com 16 casas decimais!

Foi afirmado no início deste artigo que os matemáticos também se ocuparam com o estudo da natureza de π. Um resultado importante nesse sentido foi publicado em 1768 pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1721-1777): π é irracional.

Que há números irracionais (isto é, não fraccionários) é algo que já se sabia desde o tempo de Pitágoras (séc. VI a. C.)[1]. Para certos números ($\sqrt{2}$, por exemplo) é fácil demonstrar a irracionalidade, mas por vezes é extraordinariamente difícil fazê-lo. Por exemplo, só em 1978 foi demonstrado que o número

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

é irracional (veja-se [2, p. 434–447]) e ainda não se sabe se a «constante de Euler», isto é, o limite da sucessão

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)_{n \in IN}$$

é ou não racional. A demonstração de Lambert foi um feito notável, seguida pouco tempo depois pela demonstração de que nem mesmo π^2 é racional, da autoria de Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Convém agora examinar o significado da expressão «número racional». Dizer que o número real r é racional é o mesmo que dizer que é possível escrever $r = \frac{m}{n}$ para dois inteiros m e n, com $n \neq 0$. Outra maneira de pôr isto é dizer que r é raíz da equação $nx - m = 0$. Sendo assim, afirmar que um número é racional é o mesmo que afirmar que é solução de alguma equação do primeiro grau com coeficientes inteiros. Postas assim as coisas, vê-se que a irracionalidade de $\sqrt{2}$ acaba por não ser um «defeito» muito grave; afinal, embora $\sqrt{2}$ não seja raíz de nenhuma equação do primeiro grau com coeficientes inteiros, é raíz de uma do segundo, nomeadamente $x^2=2$. Isto leva naturalmente à seguinte pergunta: haverá números reais que não são raízes de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros? Um tal número diz-se *transcendente*; caso contrário, diz-se que se trata de um número *algébrico*. Acontece que efectivamente há números transcendentes (aliás, por razões que vão além do âmbito deste texto, um número real escolhido aleatoriamente tem incomparavelmente mais probabilidades de ser um número transcen-

[1] É preciso ter em conta que Pitágoras foi, acima de tudo, o fundador de uma religião na qual os números tinham um lugar de destaque. Como sempre nestes casos, os adeptos nunca admitem posteriormente que tenha sido introduzida no seu conjunto de crenças qualquer ideia nova relativamente às expostas pelo fundador e, consequentemente, qualquer inovação acaba por lhe ser atribuída. Assim sendo, atribuir um resultado matemático a Pitágoras significa apenas que este resultado circulava entre os pitagóricos.

dente do que de não o ser). Em 1873, o matemático francês Charles Hermite (1822–1901) demonstrou que o número de Neper *e* é transcendente e, 9 anos mais tarde, o matemático alemão Ferdinand Lindmann (1852–1939) demonstrou a transcendência de π. Só por curiosidade, refira-se que isto permitiu resolver um problema com mais de 2000 anos de existência. Este problema, o da quadratura do círculo, surgiu na Grécia antiga e era posto assim: dado um círculo, desenhar, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área. Embora não seja possível explicar aqui a relação entre os dois problemas, já se sabia desde a primeira metade do século XIX que se uma tal construção geométrica existisse, então π seria algébrico. Logo, o resultado demonstrado por Lindmann permitiu concluir que o problema da quadratura do círculo não tem solução.

Como se pode imaginar, os computadores permitiram calcular π com um enorme número de casas decimais. Em 1949 o computador ENIAC calculou π com 2037 casas decimais, recorrendo à fórmula de James Machin (e a 70 horas de cálculos!). Em Setembro de 1999 já se tinha calculado π com 206 158 430 000 casas decimais.

Há mais alguma coisa a descobrir relativamente a π? Certamente! Uma descoberta recente e inesperada foi publicada em 1997 ([3]). Trata-se da seguinte fórmula:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

Esta fórmula converge muito rapidamente; a soma dos 10 primeiros termos já coincide com π até à décima quarta casa decimal! Outras fórmulas surgiram baseadas nesta, das quais a mais simples talvez seja:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

(veja-se [1] para mais detalhes). Surgirão no futuro fórmulas ainda mais simples? Seria desejável que se descobrisse uma com o factor 10^{-n} antes do parêntesis, mas é muito pouco provável que uma tal fórmula exista.

E quanto à natureza de π? O grande problema que resta por resolver nesta área é o seguinte: π é normal? Diz-se que um número real *x* é *normal* se, na sua expansão decimal, cada um dos algarismos surge, em média, uma vez em cada dez, se cada sequência formada por dois algarismos (51, por exemplo) surge, em média, uma vez em cada cem, cada sequência de três algarismos surge, em média, uma vez em cada mil e assim sucessivamente.[2] Posto de uma maneira mais vaga, um número é normal se os seus dígitos estiverem distribuídos aleatoriamente. Embora, em termos probabilísticos, quase todos os números sejam normais, o facto é que não se conhece nenhum exemplo de um número que surja «naturalmente» e que seja normal. Podem-se encontrar mais informações sobre este problema em [5].

Bibliografia:

[1] V. Adamchik e S. Wagon, *A simple formula for π*, American Mathematical Monthly **104** (1997), p. 852–855

[2] L. Berggren, J. Borwein e P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1997

[3] D. Bailey, P. Borwein e S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Mathematics of Computation **66** (1997), 903–913 (reproduzido em [2, p. 663–674])

[4] P. Beckmann, *A History of π*, St. Martin's Griffin, Nova Iorque, 1971

[5] S. Wagon, *Is π normal?*, The Mathematical Inteligencer, **7** (1985), 65–67 (reproduzido em [2, p. 557–559])

[2] De facto, esta é a definição de *número normal na base* 10; a definição geral de número normal envolve saber trabalhar com outras bases.