PROBLEMAS PROPOSTOS

No n.º 51 da G. M., em 1952, iniciou-se a secção de Problemas sob a forma de concurso entre os leitores da Gazeta. O concurso e a secção terminaram no n.º 58 de 1954, em virtude do reduzido número de concorrentes. A G. M. concluiu, então, que não tinha sabido despertar o interesse entre os seus leitores e daí a sua resolução. Faltaram-nos indicações da parte dos leitores que nos permitisse modificar a orientação que seguiamos. Apesar disso recomeçamos agora e procuraremos, de novo, o interesse dos leitores de quem solicitamos o envio de soluções dos problemas e indicações sobre a natureza dos problemas que gostariam fossem tratados, assim como quaisquer outras que possam melhorar esta secção. As críticas que nos forem feitas serão recebidas com toda a nossa bôa vontade e atenção, no sentido de fazer da secção um elemento de trabalho que interesse e seja últil ao leitor. Das soluções que nos forem enviadas escolheremas as melhores que serão publicadas.

4496 — Determinar todas as soluções do sistema:
$$x(x+y)(x+y+z)=y(x+y)(x+y+1)=$$
$$=(x+y+z)^2(y+z)+y(x+y+z)=z$$

4497 — Determine os inteiros a e n para os quais a^n+1 é divisível por 10.

4498 — Mostre que, se n é múltiplo de 6, tem-se:
$$\sum_{m=0}^{n/2}\binom{n}{2m}(-3)^m=2^n$$

4499 — Mostre que, se a,b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, então:

$A)$ $a^3+b^3+c^3+2abc<ab(a+b)+bc(b+c)+$ $+ca(c+a)$

$B)$ $a^4+b^4+c^4<(2a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

5000 — Considere-se o segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida 1. Tomemos sucessivamente os pontos A_3 meio de $\overline{A_1A_2}$; A_4 meio de $\overline{A_2A_3}$; A_5 meio de $\overline{A_3A_4}$ e assim por deante.

Determine o limite da sucessão cujos termos são as abscissas, contadas a partir de A_1, dos pontos A_2, A_3, $A_4\cdots$.

5001 — Mostre que se for p o semi-perímetro do triângulo $[ABC]$ e r o raio da circunferência inscrita no triângulo, se tem
$$r=p\,tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}.$$

5002 — Demonstre que um polígono de n lados é regular se e sòmente se
$$r=R\cos\frac{\pi}{n}$$
sendo r o raio da circunferência inscrita no polígono e R o raio da circunferência circunscrita ao mesmo polígono.

5003 — Seja $[ABCD]$ um tetraedro e P um ponto qualquer. Considerem-se os segmentos PA', PB' e PC', perpendiculares, respectivamente, às faces $[BCD]$, $[ACD]$ e $[ABD]$ e de comprimentos iguais aos produtos de uma constante b pelas áreas das respectivas faces. Supõe-se ainda que os segmentos são dirigidas para o lado em que ficam os vértices opostos.

Considere o paralelipípedo que tem para arestas PA', PB' e PC'. Mostre que a diagonal do paralelipípedo que parte de P é perpendicular à face $[ABC]$ e que o seu comprimento é igual ao produto de b pela área de $[ABC]$.

Rectificação:

Os enunciados dos pontos n.os 4360 a 4379, publicados no número 70/71 da Gazeta de Matemática, são da autoria do Dr. A. Almeida e Costa e do Dr. F. Almeida e Sá e não, como por lapso se escreveu, exclusivamente de F. Almeida e Sá. Do lapso pedimos desculpa aos nossos colaboradores.