ANO XIX—N.º 70-71 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO/JUNHO—1958

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Uma órbita simétrica de um foguetão para vôo em torno da Lua (*)

por G. A. Tchebotarev

§1. Posição do problema

Neste artigo apresenta-se a solução do seguinte problema: determinação das condições iniciais do movimento, em face das quais um foguetão, encontrando-se para $t=0$ sobre a superfície da Terra, realiza um vôo em torno da Lua e volta à Terra sem dispêndio de combustível durante o percurso.

Tomemos para origem das coordenadas o centro da Terra; além disso consideremos o plano xy como o da órbita da Lua. Desprezando a excentricidade da órbita da Lua, consideremos o movimento da Lua como circular.

As perturbações devidas ao Sol e planetas estão fóra dos limites de exactidão dos cálculos adoptados no presente trabalho. As simplificações feitas não têm carácter essencial e fàcilmente podem ser tidas em conta em caso de necessidade.

Admitamos que no instante inicial t_0, a Lua e o foguetão se encontram sobre o eixo dos x, e que, além disso, a distância x^0 do foguetão à Terra é maior do que a distância x_1^0, da Terra à Lua, sendo também a velocidade do foguetão igual a zero. Na ausência de perturbação devida à Lua, movendo-se o foguetão sobre o eixo dos x, atingirá a superfície da Terra com velocidade que é igual à velocidade necessária para que o foguetão seja atirado até a altura inicial x^0.

As perturbações da Lua deformam a trajectória rectilínea do foguetão, e de modo

(*) No nosso artigo «A criação de um satélite artificial da Terra» (Gaz. Mat. 68-69), prometemos obter, de especialistas competentes, ou artigos ou elementos que permitam desenvolver qualquer pormenor de interesse, relativos aos problemas que se debatem actualmente no campo da Cosmonáutica.

O Académico, Prof. Gleb Alexandrovich Tchebotarev, Doutor em Física-Matemática, Director da Biblioteca da Academia das Ciências da URSS em Leningrado, é um dos mais destacados especialistas dos problemas de determinação das trajectórias de foguetões no espaço cósmico.

Ao Prof. Tchebotarev estamos extremamente gratos por permitir a publicação na Gaz. Mat. da presente tradução do seu artigo «Simmetritchnaja Traectorija Raketi dljá Poleta Vokrug Lúni» do «Bulleten Instituta Teoretitcheskoi Astronomii», Tomo VI, n.º 7-(80) 1957, Izdatelstvo Academii Nauk SSSR.

J. G. T.

geral, o foguetão no seu movimento a partir do ponto x^0, já não toca a superfície da Terra mas passa a certa distância $r_{\min}$ do centro da Terra.

É evidente que, aumentando o valor inicial x^0, aumentamos a distância do foguetão à Lua $\Delta^0 = x^0 - x_1^0$ e por consequência diminuímos as perturbações lunares. Por aproximações sucessivas é possível conseguir-se que seja verificada a desigualdade

$$r_{\min} < R ,$$

onde R é o raio da Terra.

Supunhamos agora que o movimento da Lua é o invertido. Então o foguetão, partindo do ponto x^0, descreve nova trajectória, simétrica da que acaba de ser construída. A posição e velocidade do foguetão no instante da queda dão as condições iniciais indispensáveis para lançar o foguetão para a posição x^0. Nestas condições, o movimento inverso da Lua deve-se substituir, indispensávelmente, pelo directo.

Assim é construída a trajectória, que consiste em dois ramos simétricos, para um vôo do foguetão em torno da Lua com retorno para a superfície da Terra.

Neste trabalho tomam-se os seguintes valores numéricos para as constantes astronómicas

raio médio da órbita da Lua	$a_1 = 384.400$ Km
período da revolução da Lua	$P_1 = 655{,}72$ horas
massa da Lua	$m_1 = 0{,}012277$
raio da Terra	$R = 6.378$ Km.
raio da Lua	$R_1 = 1.740$ Km.

É adoptado o sistema de unidades: kilómetro, hora, massa da Terra. Neste sistema, o valor numérico da constante de Gauss é dado por

$$k = 2{,}2699 \times 10^6 .$$

Todos os cálculos são feitos com cinco decimais exactas.

§ 2. Primeira aproximação

Em primeira aproximação, a distância do foguetão à Terra, para $t = 0$, é aceite como igual a 400.000 km. Deste modo, as condições iniciais de integração são definidas pelos seguintes dados

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} x^0 = 400.000\,\text{Km} & \dot{x}_0 = 0 \\ y^0 = 0 & \dot{y}_0 = 0 \end{array}$$

A distância inicial do foguetão ao centro da Lua é $\Delta^0 = 15.600$ km. A integração numérica foi ordenada pelo método de Cowell [1] com as fórmulas bem conhecidas:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} x = f^{-2} + 0{,}083333\,f \\ y = g^{-2} + 0{,}083333\,g \end{array}$$

onde

$$(3) \qquad \begin{array}{l} f = \omega^2 \ddot{x} = -\omega^2 k^2 \dfrac{x}{r^3} + X \\[2ex] g = \omega^2 \ddot{y} = -\omega^2 k^2 \dfrac{y}{r^3} + Y \end{array}$$

$$(4) \qquad \begin{array}{l} X = \omega^2 k^2 m_1 \dfrac{x_1 - x}{\Delta^3} \\[2ex] Y = \omega^2 k^2 m_1 \dfrac{y_1 - y}{\Delta^3} \end{array}$$

Os termos

$$X_1 = -\,\omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1}{{a_1}^3}$$

e

$$Y_1 = -\,\omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1}{{a_1}^3}$$

estão situados fóra dos limites de precisão dos cálculos e consequentemente são regeitados.

O intervalo de integração ω é tomado como igual a uma hora. Para $t > 100$ horas as perturbações tornam-se insignificantes e o movimento ulterior do foguetão pode ser considerado como não perturbado.

Para $t = 100$ horas a integração numérica dá

$$(5) \quad \begin{array}{ll} x = 40.914 \text{ Km} & \dot{x} = -9575 \\ y = 72.431 \text{ Km} & \dot{y} = -3209 \\ r = 83.188 \text{ Km} & \Delta = \quad 301.700 \text{ Km} \end{array}$$

As velocidades são expressas na unidade de tempo, igual a ω de 24 horas; convém dividi-las por ωk antes da dedução dos elementos. Os elementos são calculados pelas seguintes fórmulas:

$$(6) \quad \begin{array}{ll} r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} & e \operatorname{sen} E = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a}} \\ V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & e \cos E = r V^2 - 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2 & M = E - e \operatorname{sen} E \end{array}$$

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{y}{r} \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \operatorname{sen} E$$

$$\cos \pi = \frac{x}{r} \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \operatorname{sen} E .$$

Os parâmetros, que nos interessam, da elipse osculatriz [2] são:

$$(7) \quad \begin{array}{l} a = 235.200 \text{ Km} \\ e = 0{,}85980 \\ r_{\min} = 32.975 \text{ Km} \end{array}$$

Deste modo, o foguetão passa à distância de 26.597 km. da superfície da Terra.

§ 3. Segunda aproximação

Na segunda aproximação aumentamos a distância inicial do foguetão à Lua, considerando-a igual a $\Delta^0 = 31.600$ km.

Como mostra a integração na primeira aproximação, o intervalo ω pode ser substancialmente aumentado. Consideremos assim $\omega = 2$ horas.

As condições iniciais para a segunda aproximação são

$$(8) \quad \begin{array}{ll} x^0 = 416.000 \text{ Km} & \dot{x}_0 = 0 \\ y^0 = 0 & \dot{y}_0 = 0 \end{array}$$

Para $t = 100$ horas a integração numérica dá os seguintes resultados:

$$(9) \quad \begin{array}{ll} x = 169.374 \text{ Km} & \dot{x} = -11920 \\ y = \quad 36.585 \text{ Km} & \dot{y} = +134 \\ r = 173.280 \text{ Km} & \Delta = \quad 282.670 \text{ Km} \end{array}$$

Calculemos a órbita osculatriz para $t = 100$ horas

$$(10) \quad \begin{array}{ll} a = 215.200 \text{ Km} & M = -23^0{,}70 \\ e = 0{,}97598 & \pi = \quad 176^0{,}72 \end{array}$$

$$n = 1^0{,}303 \text{ (por hora).}$$

Desprezando, como na primeira aproximação, as perturbações para $t = 100$ horas, calculamos a distância do perigeu do foguetão

$$r_{\min} = 5.169 \text{ Km.}$$

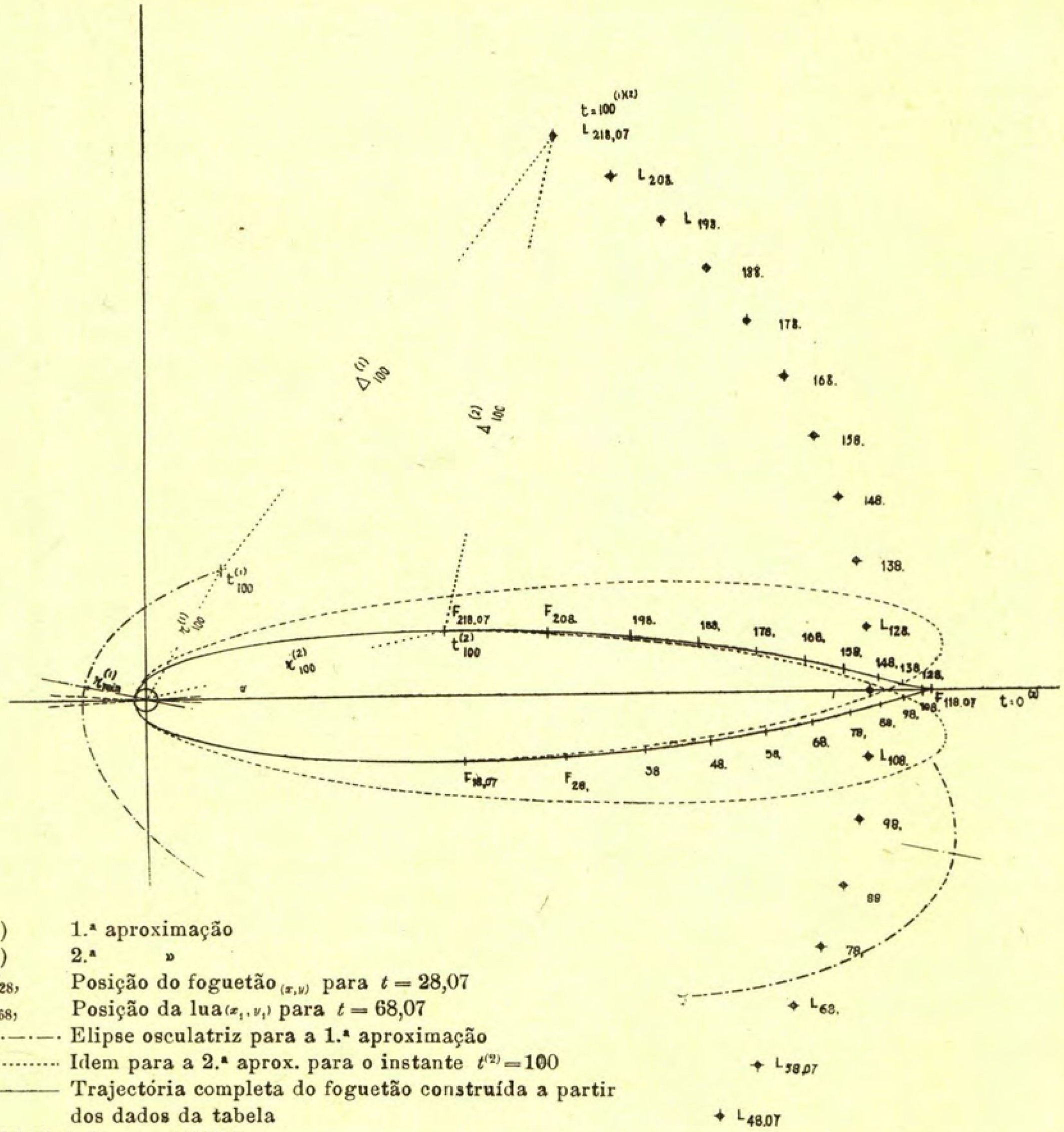
Portanto, o foguetão, no seu movimento, toca obrigatòriamente a superfície da Terra.

Determinando as condições da queda a partir da igualdade $r = R = 6378$ Km, vem:

$$(11) \quad \begin{array}{l} M = -0^0{,}16 \\ V = \quad 11.080 \text{ m/s} \end{array}$$

Conhecendo a velocidade angular média, n, do foguetão, fàcilmente se calcula que a distância é $\Delta M = 23^0{,}54$, no caso da trajectória não perturbada, contada a partir do instante t_{100} até o instante da queda; isto é o foguetão leva então $\Delta t = 18{,}07$ horas.

Assim, o tempo total do movimento, desde o ponto x^0 até o instante de queda na superfície da Terra totaliza 118,07 horas, ou sejam 4,92 dias.



(1) 1.ª aproximação
(2) 2.ª »
F_{28}, Posição do foguetão $_{(x,y)}$ para $t=28,07$
L_{68}, Posição da lua $_{(x_1,y_1)}$ para $t=68,07$
—·—·—· Elipse osculatriz para a 1.ª aproximação
·········· Idem para a 2.ª aprox. para o instante $t^{(2)}=100$
———— Trajectória completa do foguetão construída a partir dos dados da tabela
ESCALA 1 mm ~ 4.000 Km

Em virtude da simetricidade do segundo ramo da trajectória em relação ao eixo dos x, as condições iniciais de lançamento do foguetão para o vôo em torno da Lua são definidas pelos seguintes parâmetros:

$$(12)\qquad \begin{array}{ll} a=215.200\ \text{Km} & M=+0^0{,}16 \\ e=0{,}97598 & \pi=183^0{,}18 \end{array}$$

Velocidade inicial, $V_0=11.080\ \text{m/s}$. A duração total do vôo do foguetão é de 236,14 horas ou 9,84 dias. A menor distância do foguetão à superfície da Lua é de 29.860 Km.

Neste trabalho é dada apenas a solução esquemática do problema posto.

t Horas	x (1.000 Km)	y (1.000 Km)	r (1.000 Km)	x_1 (1.000 Km)	y_1 (1.000 Km)	Δ (1.000 Km)
18,07	169,4	−36,6	173,3	221,0	−314,5	282,7
28,07	221,9	−34,6	224,6	250,1	−291,9	258,8
38,07	264,1	−31,1	265,9	276,9	−266,6	235,3
48,07	299,0	−26,7	300,2	301,1	−238,9	212,1
58,07	328,1	−22,0	328,8	322,6	−209,0	187,1
68,07	352,4	−17,2	352,8	341,1	−177,2	160,3
78,07	372,6	−12,4	372,8	356,5	−143,8	132,0
88,07	389,0	− 7,8	389,1	368,6	−109,0	103,0
98,07	401,9	− 3,8	401,9	377,4	− 73,2	73,6
108,07	411,1	− 0,9	411,0	382,6	− 36,8	45,7
118,07	414,9	0	414,9	384,4	0	30,5
128,07	410,3	+ 0,5	410,3	382,6	+ 36,8	45,6
138,07	400,4	+ 3,5	400,4	377,4	+ 73,2	73,4
148,07	386,8	+ 7,6	386,8	368,6	+109,0	103,0
158,07	369,6	+12,3	369,8	356,5	+143,8	132,0
168,07	348,6	+17,2	349,0	341,1	+177,2	160,2
178,07	323,3	+22,2	324,5	322,6	+209,0	186,8
188,07	293,2	+27,0	294,8	301,1	+238,9	212,0
198,07	257,0	+31,4	259,3	276,9	+266,6	236,0
208,07	213,2	+34,9	216,4	250,1	+291,9	259,5
218,07	158,2	+36,7	162,7	221,0	+314,5	284,7

As investigações ulteriores devem seguir em três direcções:

1 — Estudo da estabilidade da trajectória teórica relativamente às condições iniciais do movimento.

2 — Estudo da influência dos erros das constantes astronómicas adoptadas no movimento do foguetão.

3 — Passagem ao problema real em resultado da renúncia às simplificações feitas no presente trabalho.

§ 4. Cálculo de controle.

Em conclusão do trabalho, foi feito o cálculo de controle de todo o percurso do foguetão desde a partida da superfície da Terra até o regresso inverso à Terra. Como dados de partida serviram os elementos elípticos (12).

Durante as primeiras 18,07 horas de vôo, o movimento foi considerado como não perturbado. As medidas fundamentais que caracterizam o movimento perturbado são indicados na tabela junta. Pelos dados numéricos desta tabela fàcilmente se vê [3] o efeito da acumulação de erros no processo de integração numérica. É necessário notar também a inexactidão dos dados iniciais (12), que são obtidos como resultado da integração numérica.

A órbita elíptica osculatriz calcula-se para o instante t_{100}:

$$\begin{aligned} a &= 214.247 \text{ Km} \\ e &= 0{,}97524 \\ r_{\min} &= 5.313 \text{ Km} \end{aligned} \tag{13}$$

Deste modo, o foguetão no seu movimento pela órbita não perturbada toca a superfície da Terra.

Os cálculos de controle são feitos pelo colaborador científico do Instituto, M. C. Volkov.

§ 5. Etapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário.

Que significado prático tem o problema examinado no presente trabalho?

Para responder a esta questão, é necessário dizer algumas palavras sobre as étapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário. É possível marcar três étapas fundamentais na organização dos vôos interplanetários:

I etapa — vôos de foguetões não dirigidos;

II etapa — vôos de foguetões automáticos dirigidos;

III etapa — vôos de foguetões dirigidos com passageiros.

Para lançar no espaço interplanetário um foguetão, privado de combustível próprio (e, consequentemente, não dirigido), com alguns quilogramas de peso, é necessário construir um foguetão de três andares, cujo peso inicial será igual a 16,8 *t*. Mas já para o peso útil dum terceiro andar de 100 kg o peso inicial do foguetão sobe a 62,4 *t*. (em outra variante — 90,9 *t*). Para criar um satélite artificial de 36 *t* de carga útil o peso total do foguetão de três andares deve ser igual a 7.000 *t*, das quais 90 % é de combustivel (projecto Brown). Para comparação, indicaremos que o peso inicial das *V*-2 é ao todo 12,9 *t*.

Deste modo, as possibilidades da técnica contemporânea não vão fora dos limites de realização da I etapa das comunicações interplanetárias (foguetões não dirigidos).

A realização das II e III etapas requer, sem dúvida, em princípio, uma solução nova para o problema do combustivel do foguetão. Além disso, a realização da III etapa está ligada a uma série de problemas difíceis, e ainda não esclarecidos, de carácter biológico e médico (complexidade especial representa a defesa da actividade biológica contra as radiações cósmicas).

Que problemas podem ser solucionados na I etapa com o auxílio dos foguetões não dirigidos?

Indicaremos três desses problemas:

1 — problema: — Criação dum satélite artificial da Terra. As órbitas dos satélites podem ser muito variadas.

2 — problema: — Embora o vôo à Lua dum foguetão não leve consigo qualquer carga útil e não possa impedir a sua queda na superfície da Lua, o significado científico de tal vôo é extraordinariamente importante.

3 — problema: — Vôo à volta da Lua com regresso à Terra. Para frenar o foguetão na atmosfera empregam-se planadores e paraquedas. A realização deste projecto torna possível fotografar o hemisfério lunar invisivel da Terra.

Todos estes três problemas, de dificuldade técnica aproximadamente idêntica, serão provàvelmente resolvidos uns após outros no decurso dos próximos 5-10 anos.

Contudo, do ponto de vista da mecânica celeste, o segundo e especialmente o terceiro são problemas muito mais úteis de que o primeiro. Para a atenção destes problemas deve voltar-se a atenção dos astrónomos que se interessam pelas questões de cosmonáutica.

Na lista bibliográfica são indicados os trabalhos fundamentais publicados em russo.

LITERATURA

Kondratiuk, Y. V., 1947 — *A conquista do espaço interplanetário*. Defesa, 84 págs.

Kvoi, I. e I. Yutenbogart, 1950 — *O foguetão dinâmico*. Defesa, 232 págs.

Oberth, T., 1948 — *Meios de realização dos vôos cósmicos.* Defesa, 232 págs.

Rinin, N. A., 1928-1932 — *Comunicações interplanetárias.* Publicações 1-9.

Tsander, F. A., 1947 — *O problema do vôo por meio de foguetões.* Defesa, 240 págs.

Tsiolkowsky, K. E., 1951 — *Aerodinâmica. Obras completas* 1. AN CCCR, 268 págs.

Tsiolkowsky, K. E., 1954 — *Aparelhos de vôo de reacção Obras Completas* 2. AN CCCR, 455 págs.

Sternfeld, A., 1937 — *Introdução à cosmonáutica.* ONTI, 320 págs.

Esnault-Pelterie, R., 1950 — *Vôos cósmicos.* Defesa, 148 págs.

Entrou na redacção a 3 de Abril de 1956.

NOTAS

[1] Sobre o método de Cowell para órbitas perturbadas, consultar G. Stracke — Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, — § 78-b.

[2] Elipse osculatriz significa aqui a órbita que o foguetão seguiria, suposta nula a influência perturbadora da Lua. Não tem o significado geométrico que exige um contacto de 2.ª ordem.

[3] Pela falta de simetria em relação ao instante $t = 118{,}07$ h dos valores de x e y.

As presentes notas e figura, incluídas no texto, não pertencem ao artigo escrito na língua original. Resultaram da valiosa colaboração dos Ex.mos Senhores: Drs. A. Chaves, S. Diniz, Arq. H. Gandra e Com.te P. Magalhães, na interpretação de alguns pontos mais delicados do trabalho. A todos manifestamos o nosso reconhecimento.

J. G. T.

Observações astronómicas dos satélites artificiais

por *Raimundo Oliveira Vicente*

Com os primeiros lançamentos, coroados de êxito, de satélites artificiais da Terra, aparece um novo capítulo na longa história dos estudos astronómicos e que tem por fim não só a observação como também a determinação das órbitas dos satélites. Este novo capítulo da Astronomia não apresenta nem novos métodos de observação nem conceitos teóricos originais, limitando-se a adaptar convenientemente processos já utilizados em outros campos de Astronomia.

Desta maneira vamos considerar no presente artigo os métodos de observação que se poderão utilizar para detectar a presença de satélites artificiais. Uma das vantagens destas observações reside no facto de se terem antecipadamente dados precisos acerca da forma, dimensões e constituição dos satélites o que, sob o ponto de vista astronómico, é um caso único. Precisamente uma das características das observações astronómicas, até à época actual, reside no facto de se não ter conhecimento prévio das características do astro que se observa, características essas que se obtêm depois de efectuadas as observações.

As possibilidades de observação dos satélites dependem dos processos utilizados para a observação dos astros e que se podem classificar em dois grupos — visuais e rádio-astronómicos — conforme o comprimento de onda das radiações recebidas. Em virtude da existência da atmosfera, as radiações que se podem observar à superfície da Terra estão situadas na região visível do espectro e na região que vai desde alguns centímetros até às dezenas de metros; estas duas regiões são as únicas em que as radiações não são absorvidas pela atmosfera terrestre.

As observações astronómicas correspondentes à região visível têm sido efectuadas desde os princípios das civilizações humanas ao passo que as observações correspondentes aos comprimentos de onda maiores só têm sido feitas recentemente, especialmente a partir da 2.ª guerra mundial, beneficiando dos