do efeito DOPPLER em diferentes locais, foram deduzidos para o primeiro satélite russo, no Observatório Rádio-Astronómico Mullard, de Cambridge, os seguintes elementos da órbita:

Inclinação $i = 64^\circ\, 25' \pm 30'$ (interferómetro)
$65^\circ\ \ 1' \pm 10'$ (efeito DOPPLER)
Período (princípios de Outubro) $T = 96^m\, 2^s$ $(-\, 1^s,5$ por dia)
Excentricidade $e = 0{,}06$
Altitude mínima (latitude 45° aproximadamente) 190 km
Altitude máxima (latitude 45° aproximadamente) 970 km
Precessão dos nodos $3^\circ\, 40' \pm 20'$ por dia.

As observações efectuadas em Cambridge também mostraram que as variações, nos sinais emitidos pelo satélite, provinham da rotação de FARADAY do plano de polarização, para a qual um período de atenuação proporcional ao quadrado do comprimento de onda resulta de considerações teóricas. Estes resultados mostraram que não tinham fundamento as afirmações feitas de que os sinais emitidos vinham em forma de código.

As técnicas de radar para a observação de satélites adquirem especial importância a partir do momento em que o satélite deixa de emitir sinais. Deste modo, a partir deste instante, só observações visuais e de radar permitem determinar a órbita do satélite. A grande vantagem das técnicas de radar reside no facto da observação ser possível não só quando existem nuvens como também durante o dia.

Em virtude porém do pequeno número de observatórios devidamente equipados para estas observações, os resultados obtidos por meio de radar são ainda pouco numerosos. Devemos no entanto destacar os resultados já obtidos com o rádio-telescópio de cerca de 75 m de diâmetro, situado em Jodrell Bank, dependente da Universidade de Manchester, que se encontra nas últimas fases de acabamento.

As superfícies planificáveis e as envolventes das faces do triedro móvel

por J. Ribeiro de Albuquerque

(Conclusão do número anterior)

Toda a planificável é gerada pelo movimento da tangente ao longo duma certa curva Γ, a sua aresta de reversão.

Seja u o arco da curva Γ, suposta orientada e tomado sobre ela um ponto fixo P_0; seja $\vec{t}$ o vector unitário sobre a tangente no ponto $P(u)$; pode-se tomar para a planificável uma representação paramétrica

11) $$M = P + \vec{t}(v - u)$$

As curvas $u = c^{te}$ são as tangentes a Γ, e as curvas $v = c^{te}$ são as evolventes de Γ, como mais adiante se verá.

Duas superfícies dizem-se aplicáveis se existe uma correspondência biunívoca entre os pontos M de S e M' de S', de tal modo que, a cada arco $\widehat{AB}$ de S corresponde um arco $\widehat{A'B'}$ de S' com

12) $$\int_{\widehat{AB}} ds = \int_{\widehat{A'B'}} ds'$$

Na equação 11) para $u = 0$, vem: $M = P_0 + \vec{t}_0 v$ que é a equação duma recta do espaço, a tangente a Γ no ponto P_0. Consideremos o plano π envolvido pela planificável e que lhe é tangente ao longo daquela recta.

Desenhe-se sobre esse plano, tangente à recta em P_0, uma curva Γ_1, orientada em concordância com a orientação de Γ; a orientação passou para Γ_1 através do ponto P_0 e da recta

$$M = P_0 + \vec{t}_0 v$$

tangente comum. Com uma coordenada curvilínea u_1 sobre Γ_1 contada a partir da origem P_0, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de Γ e de Γ_1.

A curva Γ_1 fica completamente determinada com a condição de ter, em cada um dos seus pontos, uma curvatura ρ_1, de flexão, igual à curvatura ρ, de flexão, da curva Γ, no ponto correspondente.

Os pontos M_1 do plano π onde se desenhou Γ_1 podem ser determinados, com a única tangente a Γ_1 que, por eles, passa. Resulta para o plano π, dum modo evidente, a seguinte representação paramétrica:

13) $$M_1 = P_1 + \vec{t}_1 (v_1 - u_1)$$

e esta equação, estende às duas superfícies em questão, a planificável e o plano, a correspondência pontual biunívoca que se estabeleceu entre as duas curvas, Γ e Γ_1.

Da equação 12) ou das três seguintes, que lhe são equivalentes

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{dx}{du}(v-u) \\ Y = y + \dfrac{dy}{du}(v-u) \\ Z = z + \dfrac{dz}{du}(v-u) \end{cases}$$

tiram-se

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 =$$
$$= (v-u)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v} = 0$$
$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = 1$$

Para qualquer curva, traçada sobre a planificável, se tem então:

$$d s^2 = \frac{(v-u)^2}{\rho^2} d u^2 + d v^2$$

Os mesmos cálculos dão, para qualquer curva traçada no plano π, o mesmo resultado

$$d s_1^2 = \frac{(v_1 - u_1)^2}{\rho_1^2} d u_1^2 + d v_1^2$$

e, com as hipóteses feitas, se tem: $d s^2 = d s_1^2$.

A planificável é aplicável sobre o plano π. Se tirarmos à curva Γ a torsão, veremos que ela vai coincidindo com a curva Γ_1, e as tangentes a Γ vão-se assentando no plano π, e a planificável se vai planificando. Inversamente, se torcermos a curva Γ_1, em cada ponto da qual se desenhou a respectiva tangente, veremos aparecer, no espaço, a planificável.

De todas as esferas do espaço, aquela que tem com Γ, em P, um contacto de ordem máxima, é a *esfera osculadora* de Γ, no ponto P. A esfera tem contacto de ordem n, em P, quando assim suceder para qualquer curva da esfera a passar por P.

Sejam $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ as equações paramétricas da curva Γ, e sejam $X = X(s, a, b, c, r)$, $Y = Y(s, a, b, c, r)$, $Z = Z(s, a, b, c, r)$ as equações paramétricas duma curva situada sobre uma esfera, com centro em (a, b, c) e raio r, isto é, três funções a satisfazer

14) $$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$$

Esta família de esferas tem quatro parâmetros, a, b, c, r, e s é o parâmetro dos pontos da curva esférica. Esta curva deverá passar por P,

$$X(s, a, b, c, r) = x(s),\ Y(s, a, b, c, r) = y(s),$$
$$Z(s, a, b, c, r) = z(s)$$

o que, posto na equação 14), nos dá

15) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

para haver contacto deverá ter-se

$$X'(s,a,b,c,r)=x'(s)=\alpha$$
$$Y'(s,a,b,c,r)=y'(s)=\beta$$
$$Z'(s,a,b,c,r)=z'(s)=\gamma$$

derivando uma vez 14) e pondo aí estas condições, vem

16) $(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0$

Com as novas condições, de igualdade das segundas derivadas

$$X''=x'' \,,\; Y''=y'' \,,\; Z''=z''$$

derivando duas vezes 14) e pondo aí estas condições e as anteriores temos, depois de atender às fórmulas 5) de FRENET-SERRET

17) $\frac{x-a}{\rho}\xi+\frac{y-b}{\rho}\eta+\frac{z-c}{\rho}\zeta+1=0$

Como existem quatro parâmetros a fixar, na família de esferas deveremos igualar, ainda, as terceiras derivadas, o que faz, normalmente, que o contacto seja de terceira ordem; vem ainda

$$X'''=x''' \,,\; Y'''=y''' \,,\; Z'''=z'''$$

ou, doutro modo

$$X'''=\frac{dX''}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\cdot\frac{\xi}{\rho}=\frac{\rho\frac{d\xi}{ds}-\xi\frac{d\rho}{ds}}{\rho^2}$$

e as análogas

$$Y'''=\frac{\rho\frac{d\eta}{ds}-\zeta\frac{d\rho}{ds}}{\rho^2} \qquad Z'''=\frac{\rho\frac{d\zeta}{ds}-\zeta\frac{d\rho}{ds}}{\rho^2}$$

teremos fàcilmente

$$3(X'X''+Y'Y''+Z'Z'')=$$
$$=3\left(\alpha\frac{d\alpha}{ds}+\beta\frac{d\beta}{ds}+\gamma\frac{d\gamma}{ds}\right)=\frac{3}{\rho}(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)=0$$

e derivando três vezes 14), o que dá

$$3(X'X''+Y'Y''+Z'Z'')+$$
$$+(X-a)X'''+(Y-b)Y'''+(Z-c)Z'''=0$$

obtemos

$$\frac{x-a}{\rho}\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-b}{\rho}\frac{d\eta}{ds}+\frac{z-c}{\rho}\frac{d\zeta}{ds}-$$
$$-\left[\frac{x-a}{\rho}\xi+\frac{y-b}{\rho}\eta+\frac{z-c}{\rho}\zeta\right]\frac{\frac{d\rho}{ds}}{\rho}=0$$

Atendendo às condições anteriores e às fórmulas 5) de FRENET-SERRET, temos

$$-\frac{x-a}{\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\lambda}{\tau}\right)-\frac{y-b}{\rho}\left(\frac{\beta}{\rho}-\frac{\mu}{\tau}\right)-$$
$$-\frac{z-c}{\rho}\left(\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\nu}{\tau}\right)-\frac{\frac{d\rho}{ds}}{\rho}=0$$

Finalmente, atendendo a 16), temos

18) $\frac{x-a}{\tau}\lambda+\frac{y-b}{\tau}\mu+\frac{z-c}{\tau}\nu-\frac{d\rho}{ds}=0$

Temos, então, o seguinte sistema para determinação de a,b,c,r:

15) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$

16) $(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0$

17) $(x-a)\xi+(y-b)\eta+(z-c)\zeta=-\rho$

18) $(x-a)\lambda+(y-b)\mu+(z-c)\nu=\tau\frac{d\rho}{ds}$

As três últimas equações permitem determinar a,b,c. Por ser

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \xi & \eta & \zeta\\ \lambda & \mu & \nu\end{vmatrix}=1$$

e, por ser, cada elemento deste determinante igual ao respectivo complemento algébrico, vem o sistema imediatamente resolvido

$$x-a=-\rho\xi+\tau\frac{d\rho}{ds}\lambda \,,\; y-a=-\rho\eta+\tau\frac{d\rho}{ds}\mu$$

$$z-a=-\rho\zeta+\tau\frac{d\rho}{ds}\nu$$

e portanto

$$19)\begin{cases} a = x + \rho\xi - \tau\dfrac{d\rho}{ds}\lambda \\ b = y + \rho\eta - \tau\dfrac{d\rho}{ds}\mu \qquad P = M + \rho\vec{N} - \tau\dfrac{d\rho}{ds}\vec{B} \\ c = z + \rho\zeta - \tau\dfrac{d\rho}{ds}\nu \end{cases}$$

e, ainda, o valor do raio, dado por 15)

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2 + \tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$$

Procuremos, agora, a envolvente dos planos normais de Γ.

A equação do plano normal é

$$(X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0$$

e as rectas características são definidas por esta equação, e ainda

$$(X-x)\frac{d\alpha}{ds} + (Y-y)\frac{d\beta}{ds} + (Z-z)\frac{d\gamma}{ds} = \\ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

que se transforma, com as fórmulas 5), em

$$(X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = \rho$$

As características pertencem ao plano normal e, a este último que é um plano paralelo ao plano rectificante, a passar pelo centro de curvatura. As rectas características chamam-se *rectas* ou *eixos polares*, e passam pelos centros de curvatura, sendo portanto perpendiculares ao plano osculador.

A aresta de reversão é dada por mais uma equação, obtida por derivação da última. Temos o sistema

$$\begin{aligned} &(X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0 \\ &(X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = \rho \\ &(X-x)\lambda + (Y-y)\mu + (Z-z)\nu = -\tau\frac{d\rho}{ds} \end{aligned}$$

Se neste sistema mudarmos X, Y, Z por a, b, c, obtemos as equações 16), 17) e 18) que forneceram o centro da esfera osculadora.

A aresta de reversão da *superfície polar*, que assim se chama, a envolvente dos planos normais, é o lugar geométrico dos centros das esferas osculadoras.

Obtínhamos estes resultados, com um terço do esforço, do seguinte modo: Seja M o ponto da curva Γ, de coordenadas $x(s), y(s), z(s)$. O plano normal é o lugar dos pontos P que formam com M, vectores perpendiculares a $\vec{T}$, e por ser o produto interno proporcional ao coseno do ângulo dos factores, temos para equação do plano normal

$$(P-M)/\vec{T} = 0$$

Derivando em ordem ao parâmetro s desta família de planos, vem

$$-\frac{dM}{ds}/\vec{T} + (P-M)/\frac{dT}{ds} = 0$$

ou, sucessivamente

$$-\vec{T}/\vec{T} + (P-M)/\frac{\vec{N}}{\rho} = 0 \quad \text{e} \quad (P-M)/\vec{N} = \rho$$

As rectas características são definidas por $(P-M)/\vec{T} = 0$, o plano normal, e $(P-M)/\vec{N} = \rho$, que é um plano paralelo ao rectificante, que lhe fica a uma distância ρ.

Uma nova derivação, dá

$$-\frac{dM}{ds}/\vec{N} + (P-M)/\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\rho}{ds}$$

ou

$$(P-M)/\left(-\frac{\vec{T}}{\rho} - \frac{\vec{B}}{\tau}\right) = \frac{d\rho}{ds}$$

ou ainda

$$(P-M)/\vec{B} = -\tau\frac{d\rho}{ds}$$

As três equações são achadas

$$\begin{aligned} &(P-M)/\vec{T} = 0 \\ &(P-M)/\vec{N} = \rho \\ &(P-M)/\vec{B} = -\tau\frac{d\rho}{ds} \end{aligned}$$

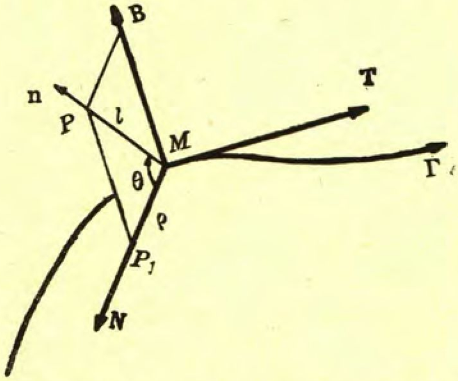
dão as componentes de $P-M$ no triedro móvel e tem-se

$$P = M + \rho\vec{N} - \tau\frac{d\rho}{ds}\vec{B}$$

que é a equação 19) obtida lá atrás.

Dada uma curva Γ do espaço, procuremos fixar em cada ponto P da curva, entre as muitas normais que aí ela admite, uma em cada ponto, mas isto de tal modo que fiquemos com uma família de rectas do espaço admitindo uma envolvente: é esta envolvente que se chamará *evoluta* de Γ. Nada, evidentemente, impede que existam diversas evolutas.

Uma normal $\vec{n}$, a Γ em M, será fixada com o ângulo θ que ela faz com a normal



principal $\vec{N}$, como se vê na figura 3; o ângulo θ é medido no plano normal de $\vec{N}$ para $\vec{B}$. Um ponto P desta normal $\vec{n}$ será dado por

$$P = M + l(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B})$$

Quando se supõe Γ orientada, e nela a coordenada curvilínea s, do seu ponto M, a crescer, pretendemos determinar l e θ, como funções de s, de modo que o ponto P descreva uma curva, à qual a normal $\vec{n}$ se mantenha sempre tangente.

Temos

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dM}{ds} + \frac{dl}{ds}(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B}) + \\ + l\left(-\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{N} + \cos\theta \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} + \right. \\ \left. + \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{B} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{dB}{ds}\right)$$

que, com as fórmulas de Frenet-Serret, se transforma em

$$\frac{dP}{ds} = \left(1 - l \cdot \frac{\cos\theta}{\rho}\right)\vec{T} + \\ + \left(\frac{dl}{ds} \cdot \cos\theta - l \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{N} + \\ + \left(\frac{dl}{ds} \cdot \operatorname{sen}\theta + l \cdot \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{B}$$

Para $\frac{dP}{ds}$ se manter no plano normal, deverá ser

$$20) \qquad l \cdot \cos\theta = \rho$$

e, além disso, $\frac{dP}{ds}$ deverá ser paralelo a $\vec{n}$, isto é, $\frac{dP}{ds}$ e $l(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B})$ deverão ser colineares, o que dá

$$21) \qquad \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds} = 0$$

Obtemos, então

$$\theta = -\int_{s_0}^{s} \frac{1}{\tau}\, ds + s^{te}$$

A relação 20), depois de determinado θ por esta forma, dá então l. Vê-se por ela que $\overline{PP_1}$ é a recta polar, visto que $\overline{P_1M}$ é igual a $l \cdot \cos\theta$, igual portanto a ρ, isto é, P_1 é o centro de curvatura.

O ponto P está sempre na recta polar e, por consequência, *todas as evolutas estão na superfície polar*.

Para que as normais principais $\vec{N}$, tenham uma envolvente, é necessário e suficiente que $\theta = 0$; deverá ser então $\tau = 0$, isto é, a curva Γ é plana. Encontra-se, assim, uma evoluta situada no plano da curva, já conhecida; as outras evolutas são hélices situadas na superfície polar que é, nesse caso, um cilindro.

Dada uma curva Γ, do espaço, chama-se *evolvente* toda a curva C, de que Γ seja uma evoluta.

Por um ponto $M(s)$ de Γ, tira-se uma tangente $\vec{T}$ e, sobre esta, determina-se um ponto P, tal que, ao variar s, P descreva uma curva C, à qual $\vec{T}$ se conserve normal. Será

$$P = M + \lambda \cdot \vec{T}$$

e

$$\frac{dP}{ds} = \vec{T} + \frac{d\lambda}{ds} \cdot \vec{T} + \lambda \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) \cdot \vec{T} + \lambda \cdot \frac{\vec{N}}{\rho}$$

O vector $\dfrac{dP}{ds}$ deve ser perpendicular a $\vec{T}$, isto é, paralelo ao plano normal e, portanto, nula a sua componente segundo $\vec{T}$

$$1 + \lambda' = 0$$

donde

$$\lambda = -s + C^{te}$$

Vem então

$$P - M = (C - s)\vec{T}$$

e com duas determinações

$$P_0 - M_0 = (C - s_0)\vec{T}_0 \qquad P_1 - M_1 = (C - s_1)\vec{T}_1$$

se pode eliminar a contante C, obtendo-se

$$\frac{P_1 - M_1}{\vec{T}_1} + (s_1 - s_0) = \frac{P_0 - M_0}{\vec{T}_0}$$

que traduz a conhecida propriedade, do fio inextensível.

Procuremos finalmente a planificável envolvente dos planos rectificantes.

A equação do plano rectificante é

$$22) \quad (X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0$$

Derivando esta equação, vem

$$(X - x)\frac{d\xi}{ds} + (Y - y)\frac{d\eta}{ds} + (Z - z)\frac{d\zeta}{ds} = \\ = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

e com as fórmulas 5) de FRENET-SERRET, vem

$$23) \quad \frac{1}{\rho}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ + \frac{1}{\tau}[(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu] = 0 .$$

As rectas características chamam-se rectas rectificantes e são dadas pelo sistema das duas equações 22) e 23). A segunda representa um plano que passa evidentemente pela normal principal, e a recta rectificante é o traço desse plano no plano $M\vec{T}\vec{B}$.

A aresta de reversão, obtém-se juntando mais uma equação que se obtém derivando 23).

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ \frac{\rho}{\rho^2}\left[(X - x)\frac{d\alpha}{ds} + (Y - y)\frac{d\beta}{ds} + (Z - z)\frac{d\gamma}{ds} - \\ -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right] - \frac{1}{\tau^2}\frac{d\tau}{ds}[(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + \\ + (Z - z)\nu] + \frac{1}{\tau}\left[(X - x)\frac{d\lambda}{ds} + (Y - y)\frac{d\mu}{ds} + \\ + (Z - z)\frac{d\nu}{ds} - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\right] = 0$$

com as fórmulas 5) de FRENET-SERRET, e atendendo a 22), vem

$$24) \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ + \frac{1}{\tau^2}\frac{d\tau}{ds}[X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu] = -\frac{1}{\rho}$$

O sistema das três equações 22), 23) e 24) é equivalente a este outro

$$25)\quad \begin{cases} (X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=0 \\ (X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=-\dfrac{1}{\rho}\cdot \\ \qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}\right]} \\ (X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=-\dfrac{1}{\rho}\cdot \\ \qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\tau}\left[\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\right]}\cdot \end{cases}$$

Represente-se por Δ, o determinante seguinte

$$26)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \dfrac{1}{\tau} \\ \dfrac{d\tau}{ds} & \dfrac{d\rho}{ds} \end{vmatrix}$$

e ponhamos

$$A=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho\Delta} \qquad B=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\tau\Delta}.$$

Então, o sistema 25) pode escrever-se

$$\begin{aligned} (X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma &= A \\ (X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta &= 0 \\ (X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu &= B \end{aligned}$$

e resolve-se ràpidamente.

$$\begin{aligned} X &= x+A\alpha+B\lambda \\ Y &= y+A\beta+B\mu \\ Z &= z+A\gamma+B\nu \end{aligned}$$

isto é, mais explìcitamente

$$\begin{aligned} X-x &= -\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\alpha+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\lambda \\ Y-y &= -\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\beta+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\mu \\ Z-z &= -\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\gamma+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\nu \end{aligned}$$

que são as equações da aresta de reversão desta planificável, a planificável rectificante. A distância do ponto da curva ao correspondente ponto da aresta de reversão é dada por

$$\frac{1}{\rho\cdot|\Delta|}\cdot\sqrt{\rho^2+\tau^2}$$

Se $\Delta=0$ a aresta de reversão desloca-se para o infinito, e a planificável rectificante será um cilindro. Isso sucede com as curvas Γ para as quais $\Delta=0$, ou

$$\frac{\rho'}{\rho}-\frac{\tau'}{\tau}=0$$

o que integrado: $\dfrac{\rho}{\tau}=C^{te}$. São as hélices.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por ***Luís G. M. de Albuquerque***

(Continuação do número anterior)

8. Aproximação linear nos espaços de Hilbert.

Considere-se o espaço de Hilbert H, seja $V\subset H$ uma variedade linear gerada pelos vectores linearmente independentes $x_1,\cdots,x_m$, e $y\in H-V$. Pelo teorema demonstrado no § 7, e em virtude da norma do espaço de Hilbert ser sempre forte (§ 5), existe em V um e um só vector $x_0=\sum_1^m \alpha_k^0 x_k$ que é projecção de y em V. Ora,

Teorema A. *Se* x_0 *é a projecção de* y