$$25)\begin{cases}(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=0\\(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\\\qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}\right]}\\(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\\\qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\tau}\left[\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\right]}\cdot\end{cases}$$

Represente-se por Δ, o determinante seguinte

$$26)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\rho}&\dfrac{1}{\tau}\\\dfrac{d\tau}{ds}&\dfrac{d\rho}{ds}\end{vmatrix}$$

e ponhamos

$$A=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho\Delta}\qquad\qquad B=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\tau\Delta}.$$

Então, o sistema 25) pode escrever-se

$$\begin{aligned}(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma&=A\\(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta&=0\\(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu&=B\end{aligned}$$

e resolve-se ràpidamente.

$$\begin{aligned}X&=x+A\alpha+B\lambda\\Y&=y+A\beta+B\mu\\Z&=z+A\gamma+B\nu\end{aligned}$$

isto é, mais explìcitamente

$$\begin{aligned}X-x&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\alpha+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\lambda\\Y-y&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\beta+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\mu\\Z-z&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\gamma+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\nu\end{aligned}$$

que são as equações da aresta de reversão desta planificável, a planificável rectificante. A distância do ponto da curva ao correspondente ponto da aresta de reversão é dada por

$$\frac{1}{\rho\cdot|\Delta|}\cdot\sqrt{\rho^2+\tau^2}$$

Se $\Delta=0$ a aresta de reversão desloca-se para o infinito, e a planificável rectificante será um cilindro. Isso sucede com as curvas Γ para as quais $\Delta=0$, ou

$$\frac{\rho'}{\rho}-\frac{\tau'}{\tau}=0$$

o que integrado: $\dfrac{\rho}{\tau}=C^{te}$. São as hélices.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por ***Luís G. M. de Albuquerque***

(Continuação do número anterior)

8. Aproximação linear nos espaços de Hilbert.

Considere-se o espaço de Hilbert H, seja $V\subset H$ uma variedade linear gerada pelos vectores linearmente independentes $x_1,\cdots,x_m$, e $y\in H-V$. Pelo teorema demonstrado no § 7, e em virtude da norma do espaço de Hilbert ser sempre forte (§ 5), existe em V um e um só vector $x_0=\sum_1^m\alpha_k^0x_k$ que é projecção de y em V. Ora,

Teorema A. *Se* x_0 *é a projecção de* y

em V, $\mathrm{y}-\mathrm{x}_0$ *é ortogonal com cada um dos vectores de* V

$$(\mathrm{y}-\mathrm{x}_0\,,\mathrm{x})=0\,,\ \textit{qualquer que seja}\ \mathrm{x}\in\mathrm{V}.$$

Demonstração. Se houvesse em V um vector $x\neq 0$ que não fosse ortogonal com $y-x_0$

$$(y-x_0\,,x)=a\neq 0\,,$$

considerando o vector

$$z=x_0+\frac{a}{(x\,,x)}x\in V$$

teríamos (deixamos ao leitor o cuidado de estabelecer esta relação):

$$\|y-z\|^2=\|y-x_0\|^2-\frac{|a|^2}{(x\,,x)};$$

donde, em virtude de ser $(x,x)>0$ (pois $x\neq 0$)

$$\|y-z\|<\|y-x_0\|;$$

assim, x_0 não seria a projecção de y em V' como admitimos.

A partir deste teorema podemos construir as componentes do vector x_0 e, ao mesmo tempo, calcular o erro cometido quando se toma, em lugar de y, o seu polinómio de melhor aproximação em V, x_0. Com efeito: sendo $y-x_0$ ortogonal com cada um dos vectores de V, é em particular ortogonal com cada um dos vectores da base $(x_1,\cdots,x_m)$ de V:

$$(y-x_0\,,x_k)=0 \qquad (k=1\,,\cdots,m)$$

ou seja

$$(8.\ 1)\qquad (y\,,x_k)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^0\,(x_i\,,x_k)=0 \qquad k=1\,,\cdots,m\,,$$

que é um sistema de m equações lineares nas m incógnitas $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_m^0$. Assim, a solução de (8. 1) conduz ao polinómio melhor aproximação de y em V; e como esta aproximação existe e é única, aquele sistema terá de ser sempre compatível e determinado; por isso é sempre diferente de zero o determinante de Gramm:

$$G(x_1,\cdots,x_m)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1)\,(x_2,x_1)\cdots(x_m,x_1)\\(x_1,x_2)\,(x_2,x_2)\cdots(x_m,x_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_1,x_m)\,(x_2,x_m)\cdots(x_m,x_m)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Obtida, com as componentes dadas por (8. 1), a projecção x_0 de y em V, o erro de se tomar x_0 em lugar de y será

$$\delta=\|y-x_0\|=\min_{x\in V}\|y-x\|;$$

mas

$$\delta^2=\|y-x_0\|^2=(y-x_0\,,y-x_0)=$$
$$=(y-x_0\,,y)-(y-x_0\,,x_0)$$

e como pelo teorema anterior se tem

$$(y-x_0\,,x_0)=0\,,\ \text{por ser}\ x_0\in V,$$

fica

$$\delta^2=\|y-x_0\|^2=\left(y-\sum_{1}^{m}\alpha_k^0x_k\,,y\right)$$

ou

$$(8.\ 2)\qquad \delta^2=(y\,,y)-\sum_{1}^{m}\alpha_k^0\cdot(x_k\,,y)\,;$$

a eliminação dos $\alpha_k^0 (k=1\,,\cdots,m)$ entre (8. 2) e as m equações (8. 1), conduz a

$$\begin{vmatrix}(y\,,y)-\delta^2 & (x_1\,,y)\cdots & (x_m\,,y)\\(y\,,x_1) & (x_1\,,x_1)\cdots & (x_m\,,x_1)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\(y\,,x_m) & (x_1\,,x_m)\cdots & (x_m\,,x_m)\end{vmatrix}=0,$$

donde

$$(8.\ 3)\qquad \delta=\sqrt{\frac{G(y\,.x_1\,,\cdots,x_m)}{G(x_1\,,\cdots,x_m)}}.$$

As equações (8. 1) que determinam as componentes do polinómio x_0, melhor aproximação de y em V, e a expressão do erro

δ, tomam um aspecto mais simples quando a base de V é ortonormada:

$$(x_i, x_k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \cdots, m).$$

Neste caso as equações (8. 1) escrevem-se

$$(y, x_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 \delta_{ik} \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

e dão logo as componentes de x_0:

$$\alpha_k^0 = (y, x_k) \qquad (k = 1, \cdots, m),$$

ficando a projecção de y em V definida por

$$(8.\ 4) \qquad x_0 = \sum_1^m (y, x_k) x_k;$$

a expressão do erro escreve-se agora:

$$\delta^2 = (y, y) - \sum_1^m (y, x_k) \cdot (x_k, y) =$$

$$= (y, y) - \sum_1^m |(y, x_k)|^2$$

ou

$$(8.\ 5) \qquad \delta = \sqrt{(y, y) - \sum_1^m |(y, x_k)|^2}$$

9. Equação de Parseval-Liapunov.

Suponhamos agora H dotado de uma base ortonormada

$$B = \{ e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots \}.$$

Qualquer sistema finito de vectores $\{ e_1, e_2, \cdots e_n \}$ gera uma variedade linear $V_n \subset H$; e tomado um vector $y \in H - V_n$ a projecção de y em V_n é dada por

$$(9.\ 1) \qquad x_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (y, e^k) e_k$$

determinando y com um erro $\delta^{(n)}$ definido por (8. 5); isto é, se

$$y = x_0^{(n)} + z^{(n)}$$

tem-se

$$\delta^{(n)2} = \| z^{(n)} \|^2 = (y, y) - \sum_{k=1}^{n} |(y, e_k)|^2 \geqq 0$$

donde se obtem a *desigualdade de* BESSEL:

$$(9.\ 2) \qquad \sum_1^n |(y, e_k)|^2 \leqq (y, y).$$

Formando a sucessão de variedades lineares

$$(*) \qquad V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$$

e sendo $y \in H - \bigcup_{k=1}^{n} V_k$, podemos construir a sucessão das projecções de y nos V_k

$$x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(n)}$$

que são dadas por relações do tipo (9. 1); cada uma delas, $x_0^{(k+1)}$, obtém-se da precedente, $x_0^{(k)}$, juntando-lhe o termo

$$(y, e_{k+1}) e_{k+1} \ (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Se para certo valor N de n se tem $y \in V_N$, então y coincide com a sua projecção em V_N

$$(9.\ 3) \qquad y = x_0^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (y, e_k) e_k;$$

caso contrário, isto é, quando por maior que seja n é sempre $y \in H - \bigcup_{k=1}^{n} V_k$, somos leva- a passar da soma que intervém em (9. 3) para a série $\sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k$ correspondente ao vector $y \in H$

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k,$$

interessando-nos então estabelecer as circunstâncias em que se possa escrever

$$(9.\ 4) \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k.$$

Deve-se notar que, por (*), os erros das sucessivas projecções de y nas variedades V_k formam sucessão decrescente,

$$\delta^{(1)} \geqq \delta^{(2)} \geqq \cdots \geqq \delta^{(n)} \geqq \cdots ;$$

e assim procurar as condições para que (9. 4) tenha lugar equivale a encontrar em que casos é

$$\lim_n \delta_n = 0 .$$

Ora, em virtude da desigualdade de Bessel, a série de termo geral $|(y, e_k)|^2$ é convergente e tal que

$$(9.\ 5) \qquad \sum_1^{\infty} |(y, e_k)|^2 \leqq (y, y);$$

o teorema C do § 6 garante-nos então a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) \cdot e_k ;$$

portanto a igualdade (9. 4) será válida desde que

$$\lim_n \delta_n = (y, y) - \sum_{k=1}^{\infty} |(y, e_k)|^2 = 0$$

ou seja, quando se tem

$$(9.\ 6) \qquad (y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |(y, e_k)|^2 ,$$

que se designa por *equação de* Parseval-Liapunov.

Deste modo, podemos concluir:

Teorema. *Num espaço de* Hilbert *com base orto-normada numerável, todo o vector* y *que satisfaça à equação de* Parseval-Liapunov *pode ser escrito na forma:*

$$(9.\ 7) \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k .$$

Os coeficientes (y, e_k) de (9. 7) são chamados os *coeficientes de* Fourier de $y \in H$; e (9. 7) é a série de Fourier (generalizada) de y.

10. Bases completas.

Resta-nos agora ver em que condições a equação de Parseval-Liapunov tem lugar para todos os vectores do espaço de Hilbert (que não pertençam a qualquer variedade linear V_N).

Diremos que a base orto-normada do espaço, B, *é completa*, quando não exista em H qualquer vector distinto do vector nulo que seja ortogonal com todos os vectores da base.

Teorema A. *Num espaço de* Hilbert *completo, para que a base orto-normada* $\mathrm{B} = \{ \mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n, \cdots \}$ *seja completa, é necessário e suficiente que seja verificada a equação de* Parseval-Liapunov

Demonstração. Suponhamos que a equação de Parseval-Liapunov, (9. 6), tem lugar qualquer que seja $y \in H$, sem que a base orto-normada B seja completa. Nesse caso existe pelo menos um vector não nulo, $z \in H$, tal que $(z, z) = \|z\|^2 = \alpha^2 > 0$, ortogonal com todos os vectores de B

$$(z, e_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots);$$

tem-se

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} |(z, e_k)|^2 < (z, z) = \alpha^2 ,$$

relação impossível porque está em contradição com (9. 6). Assim, não existe em H qualquer vector $z \neq 0$ ortogonal com todos os e_k, e a base é completa.

Mas a condição também é necessária. Admitamos que a base orto-normada B é composta, mas que não é verificada a equação de Parseval-Liapunov; pelo menos para um vector $x \in H$ ter-se-ia então

$$(10.\ 1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 < (x, x) .$$

Considerada a sucessão de vectores

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

tem-se

$$x_n - x_m = \sum_{m+1}^{n} (x, e_k) e_k$$

e, visto ser $\| e_k \| = 1$ para todo o k:

$$\| x_n - x_m \| \leqq \sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2 \cdot \| e_k \| = \sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2 ;$$

(10. 1) garante a convergência da série $\sum_{1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$, e por isso

$$\sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2 = | s_n - s_m | < \delta$$

desde que $n > m > N(\delta)$, nas mesmas condições

$$\| x_n - x_m \| \leqq | s_n - s_m | < \delta$$

e $\{ x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \}$ é uma sucessão fundamental de vectores de H; como este espaço é completo, existe um vector $x' \in H$ tal que

$$\lim_n x_n = x' \quad \text{ou} \quad \lim_n \| x_n - x' \| = 0 .$$

Ora a desigualdade (5. 2) dá
$|(x' - x_n, e_k)| \leqq \| x' - x_n \| \cdot \| e_k \| = \| x' - x_n \|$
e portanto

$$\lim |(x' - x_n, e_k)| = 0 ;$$

mas sendo $(x' - x_n, e_k) = \left(x' - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j, e_k \right) =$
$= (x', e_k) - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) \delta_{jk} = (x', e_k) - (x, e_k)$
vem

$$|(x', e_k) - (x, e_k)| = \lim_n |(x' - x_n, e_k)| = 0$$

donde

$$(x', e_k) = (x, e_k) \quad (k = 1, 2, \cdots) .$$

Considere-se agora o vector $y = x' - x \in H$, que é ortogonal com todos os vectores de B, pois

$$(y, e_k) = (x', e_k) - (x, e_k) = 0 ;$$

em virtude de B ser completa, terá de ser $y = 0$. Mas por outro lado, verificando-se (10. 1) em lugar da equação de Parseval-Liapunov, tem-se

$$\| x' \|^2 = \lim_n \| x_n \|^2 = \lim_n \sum_{1}^{n} |(x, e_k)|^2 = \sum_{1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 < \| x \|^2 ,$$

donde

$$\| y \| = \| x - x' \| \geqq \| x \| - \| x' \| > 0 ,$$

relação impossível por ser $y = 0$.

O teorema fica, pois, demonstrado.

Teorema B. *Um espaço de* Hilbert *completo* (e definido sobre o corpo complexo) *contém uma base orto-normada completa quando é separável.*

Demonstração. Consideremos o espaço de Hilbert separável H, e seja $N \subset H$ uma sucessão numerável de vectores densa em $H : \overline{N} = H$. Excluamos de N os vectores que sejam combinações lineares dos precedentes, e ortogonalizemos a sub-sucessão $B \subset N$ assim obtida. B é uma base completa de H: pois se $y \in H$ fosse ortogonal com todos os vectores de B, era também ortogonal com todos os vectores de N, pois os vectores de N estão em B ou são combinações lineares de vectores de B; mas sendo N denso em H, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe um $x \in N$ tal que

$$\| y - x \| < \varepsilon, \quad \text{com} \quad (y, x) = 0 ;$$

ora $\qquad \|y\|^2 = (y, y) = (y - x, y)$

e, em consequência de (5. 2),

$$\|y\|^2 = (y - x, y) \leqq \|y - x\| \cdot \|y\| < \varepsilon \cdot \|y\|$$

donde $\qquad \|y\| < \varepsilon ;$

assim, por ser ε arbitrário, conclui-se que $\|y\| = 0$, ou seja $y = 0$. B é uma base completa, e a condição do teorema é suficiente.

Considere-se agora a base orto-normada completa de H

$$B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$$

e seja $M \subset H$ o conjunto constituído pelos vectores

$$\alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} e_2 + \cdots + \alpha_n^{(r)} e_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

combinações lineares dos vectores de B com coeficientes complexos racionais. Sendo B completa verifica-se a equação de PARSEVAL-LIAPUNOV em H, e qualquer que seja $y \in H$ tem lugar a relação (9. 4):

$$y = \sum_1^\infty (y, e_k) \cdot e_k ;$$

assim, fixado $\varepsilon > 0$, é possível determinar um inteiro n para o qual se tem:

$$\left\| y - \sum_1^n (y, e_k) e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} ; \tag{10. 2}$$

por outro lado, sendo o conjunto dos números complexos racionais denso no conjunto dos números complexos, é possível determinar os números $\alpha_k^{(r)} (k = 1, 2, \cdots, n)$ de tal modo que

$$|(y, e_k) - \alpha_k^{(r)}| < \varepsilon/2n ,$$

ou seja

$$\left\| \sum_1^n \{(y, e_k) - \alpha_k^{(r)}\} e_k \right\| \leqq \tag{10. 3}$$

$$\leqq \sum_1^n |y, e_k) - \alpha_k^{(r)}| \cdot \|e_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para o vector

$$x = \sum_1^n \alpha_k^{(r)} e_k \in M \subset H$$

vem:

$$y - x = y - \sum_1^n (y, e_k) e_k +$$

$$+ \sum_1^n (y, e_k) e_k - \sum_2^n \alpha_k^{(r)} e_k$$

e, em virtude das desigualdades (10. 2) e (10. 3):

$$\|y - x\| < \varepsilon$$

qualquer que seja $y \in H$. Portanto, o conjunto dos vectores M, numerável, é denso em H, e este espaço é separável. Como queríamos provar.

Dos teoremas agora demonstrados verifica-se que sendo H um espaço de HILBERT completo e separável, o problema que nos ocupa pode ser posto do seguinte modo:

Seja $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ uma base orto-normada e completa de H, e designe V_i a variedade linear gerada por $\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$. Dado um vector $y \in H$ e fixado um número real $\varepsilon > 0$, é possível determinar um inteiro $N(\varepsilon)$ de tal modo que, para todo o $n_0 > N(\varepsilon)$ o vector y pode ser dado pela combinação (polinómio de ordem n_0)

$$\sum_1^{n_0} (y, e_k) \cdot e_k$$

com um erro inferior a ε:

$$\delta^{(n_0)} = \sqrt{\left\| y - \sum_1^{n_0} (y, e_k) e_k \right\|} < \varepsilon .$$

(Continua no próximo número)