Aspectos da actualidade Matemática

por A. Pereira Gomes

(Conclusão do número anterior)

É corrente falar-se da matemática moderna como sendo uma matemática abstracta. Assim, a Álgebra dita moderna (mas que na realidade conta mais de 100 anos) chama-se também muitas vezes Álgebra abstracta. Ora, no sentido usual desta palavra, toda a matemática é abstracta. No entanto, se é permitido falar-se em diferentes graus de abstracção, poderá dizer-se que na matemática moderna aparecem teorias dum «grau mais elevado de abstracção», o que lhes confere, dentro da Matemática, a designação de «teorias abstractas».

Em que consiste, precisamente, como se atingiu e que vantagens porventura apresenta isso a que estou a chamar «grau mais elevado de abstracção»?

Essencialmente, trata-se do desenvolvimento duma determinada teoria independentemente do significado atribuído aos elementos a que ela diz respeito, isto é, sem precisar qual a natureza dos elementos com que nela se lida, pois sòmente interessam no seu desenvolvimento lógico as relações existentes entre esses elementos.

Uma tal realização nos mais diversos domínios da Matemática foi possível com a criação por Georges Cantor, nos fins do século passado, dum novo ramo da Matemática a que se chamou Teoria dos Conjuntos Abstractos. Surgida, ela própria, numa época de profunda renovação de métodos, pode dizer-se que a teoria dos conjuntos provocou um forte abalo em todo o edifício matemático. Na realidade, porém, ela abriu novos caminhos à sistematização e ao desenvolvimento de velhas teorias e, simultâneamente, proporcionou uma nova técnica de trabalho matemático, que viria impulsionar o rápido crescimento desta ciência verificado nos últimos 60 anos.

Com a teoria dos conjuntos foi também possível pela primeira vez na história do pensamento humano, tratar de maneira satisfatória do problema do infinito acerca do qual escreveu Hilbert na sua conferência *Uber das Unendlich*: «Como nenhun outro problema, o infinito sempre profundamente agitou a alma dos homens. Como nenhuma outra idéia, o infinito tem tido uma influência estimulante e fértil sobre a sua mente. Mas o infinito está também, mais do que qualquer outro conceito, em necessidade de clarificação. No sentido desta clarificação a criação de Georges Cantor constituiu deveras um magnífico avanço, que é o seu maior padrão de glória.

A Teoria dos Conjuntos, pela universalidade do seu conteúdo, ofereceu uma nova base para a axiomatização das diversas teorias matemáticas. Os *Grundlagen der Geometrie*, onde Hilbert publicou, em 1889, a axiomatização completa da Geometria euclideana, começam assim: «Imaginemos três sistemas diferentes de objectos, a que chamaremos *pontos, rectas* e *planos*». Mas já anos antes ele havia lançado a sua escandalosa asserção: «em lugar de pontos, rectas e planos poderíamos dizer, sem qualquer inconveniente, *mesa, cadeira* e *copo de cerveja*», sublinhando assim o sentido puramente convencional daquelas designações.

O método axiomático e a teoria dos conjuntos abstractos foram pois as vias de acesso que levaram algumas dessas teorias ao que chamámos há pouco «um grau mais elevado de abstracção».

Para ser exacto, conviria fixar o sentido com que se usam as palavras «moderno», «abstracto», «clássico» e «concreto», atribuídas às teorias matemáticas.

Num excelente artigo sobre «Os métodos modernos e o futuro das matemáticas concretas», o matemático francês ROGER GODEMENT, que no ano passado efectuou numa série de conferências nesta Universidade do Recife, propõe uma dupla classificação das teorias matemáticas.

Por um lado, estas teorias agrupar-se-iam em *abstractas* e *concretas*, por outro em *clássicas* e *modernas*. Teorias concretas seriam aquelas que dizem respeito a entes de natureza especificada; por exemplo, a Aritmética, que trata das propriedades dos números, a teoria das funções duma variável real, etc. Teorias abstractas seriam aquelas em que se faz abstracção da natureza própria dos entes envolvidos na teoria, como, por exemplo, a teoria dos grupos, a teoria dos espaços métricos, etc. Uma teoria clássica seria uma teoria univalente, quer dizer, o domínio de entes a que ela se refere à unìvocamente determinado ou determinado a menos dum isomorfismo. É o caso, por exemplo, da teoria do espaço de HILBERT, axiomatizada por VON NEUMANN em 1929. Um espaço de HILBERT pode considerar-se constituído por sucessões de números cujos quadrados formam uma série convergente ou, então, por funções numéricas cujos módulos elevados ao quadrado são integráveis no sentido de LEBESGUE. Num caso tem-se o que se chama a realização numérica do espaço, no outro, a sua realização funcional. Mas o campo de tais sucessões e o campo daquelas funções são isomorfos, isto é, pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre sucessões, dum lado, e funções, do outro, de tal modo que toda proposição sobre sucessões é transposta numa proposição idêntica sobre funções, mediante aquela correspondência. A realização numérica e a realização funcional do espaço são, assim, matemàticamente indistinguíveis dentro da respectiva teoria. A teoria do espaço de HILBERT, é, pois, uma teoria univalente, o que equivale a dizer que o seu sistema de axiomas é categórico ou completo.

Uma teoria multivalente será chamada moderna. A teoria dos grupos, é, nesse sentido, uma teoria moderna. Basta notar que existem grupos finitos e grupos infinitos, que não serão, por conseguinte, isomorfos.

As teorias abstractas tanto podem ser modernas como clássicas, o que ficou claro, por certo, nos exemplos apontados. O mesmo se pode dizer das teorias concretas, embora à primeira vista isso possa parecer contraditório.

Um exemplo duma teoria concreta multivalente é a dos funcionais analíticos de FANTAPPIÉ, recentemente despida das suas particularidades acessórias e por vezes constrangedoras, e integrada na teoria mais ampla dos espaços vectoriais topológicos. Apraz-me registar a propósito, que esse trabalho foi empreendido em Portugal e no Brasil, quase simultâneamente, pelos matemáticos JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA e CÂNDIDO DA SILVA DIAS, respectivamente, que por algum tempo foram discípulos de FANTAPPIÉ, o primeiro em Roma, o segundo em S. Paulo, e que posteriormente, sob a influência de novos métodos, deram àquela tarefa uma contribuição notável.

Convém acentuar, por outro lado, para desfazer quaisquer possíveis equívocos, que os matemáticos de hoje, mesmo aqueles que se integram em escolas de axiomatização sistemática, como o célebre grupo BOURBAKI em França, não repudiaram a criação de teorias concretas, que continuam a surgir de par com as teorias abstractas. Um exemplo expressivo desta situação é o aparecimento, em 1948, da *Teoria* das *Distribuições*, devida ao insigne matemático francês LAURENT SCHWARTZ. Nascida de sugestões várias da Física Matemática, esta teoria despertou um enorme interesse em todo o mundo e tem tido notáveis repercussões em diversos domínios da Matemática e da Física. Trata-se duma teoria concreta, cujo aperfeiçoamento foi possível com recurso à teoria abstracta dos espaços vectoriais topológicos. Esta, por sua vez, recebeu sob alguns aspectos um estímulo apreciável da primeira, pela necessidade de formular rigorosamente certas questões da Teoria das Distribuições — o que ilustra de maneira clara as sinuosidades da edificação matemática, onde tantas vezes se avança tateando através do entrelaçamento dos seus diversos sectores.

Contudo o esforço de axiomatização das diferentes teorias concretas é hoje como numa palavra de ordem no campo da Matemática. Assim, a Teoria das Distribuições foi axiomatizada há cerca de dois anos e meio pelo matemático português SEBASTIÃO SILVA.

A respeito dessa tendência, citemos o trabalho já referido de GODEMENT:

«No ponto em que se encontram actualmente as pesquisas matemáticas, não há dúvida que o futuro verá desenvolver-se cada vez mais a influência dos métodos modernos sobre as teorias concretas. Em primeiro lugar uma teoria concreta raciocinando sobre objectos bem determinados, tem fatalmente tendência em apoiar-se sobre *todas* as propriedades desses objectos; ora, muitas vezes (ou de maneira precisa: quando esta teoria concreta é de tipo moderno) apercebemo-nos, após uma análise mais ou menos cerrada, que algumas destas propriedades são perfeitamente inúteis e, de facto, não desempenham nenhum papel na edificação da doutrina considerada. O papel dos métodos modernos é, então, desembaraçar as teorias concretas de todas as hipóteses supérfluas que as atravancam e que, geralmente, lhes encobrem a verdadeira significação; de certo modo, o papel desses métodos é o de reconsiderar completamente as teorias concretas, delas fazer ressaltar as grandes linhas e, automàticamente, o de acrescer consideràvelmente o seu domínio de validade».

Sem querer entrar em pormenores que implicariam o uso dum tecnicismo descabido nesta hora, mas recordando entretanto que é no convívio activo com a Matemática que algo dela se pode apreender, seja-me permitido esclarecer ràpidamente, por meio de um exemplo sugestivo e não trivial, a actuação dos métodos modernos no sentido daquela *extensão dos domínios de validade,* de que acima falámos, a qual constitui, talvez, a maior contribuição ao enriquecimento do património matemático neste meio século.

O exemplo que vou apresentar é o *Teorema do Ponto Fixo,* teorema que na sua forma elementar tem um aspecto insignificante e mesmo inofensivo, mas cujo conteúdo, convenientemente aproveitado, se revelou dum vigor extraordinàriamente fecundo.

Trata-se duma proposição de Topologia, que exprime o seguinte facto: Numa região do plano, limitada e convexa, qualquer deformação contínua que mantenha os pontos da região dentro do seu contorno inicial, deixa nela um ponto fixo. Uma rotação dum disco em torno do seu centro é uma modalidade banal dum tal facto. Mas consideremos um disco de borracha aplicado sobre uma mesa e deformemo-lo de qualquer modo, tendo apenas o cuidado de que ele não ultrapasse a região delimitada pelo seu contorno inicial; podemos contraí-lo, dobrá-lo, esticá-lo, só não podemos rasgá-lo, porque então a deformação deixaria de ser contínua. Pois bem, estejamos certos de que durante essas deformações houve um ponto do disco que ficou fixo, isto é, coincidente com a sua posição inicial. Este resultado não é perceptível intuitivamente, mas demonstra-se sem grande dificuldade.

Será esta propriedade exclusiva das figuras planas? Não. Numa memória sobre as deformações contínuas das superfícies, publicada em 1910, o matemático holandês

BROUWER mostrou que essa propriedade é válida no espaço a três dimensões (ou espaço ordinário) e mais geralmente num espaço euclideano com um número finito, qualquer, de dimensões.

Já em 1912, pouco antes da sua morte, POINCARÉ utilizou esta ideia das deformações contínuas com pontos fixos no tratamento duma questão relativa à existência dum número infinito de trajectórias periódicas no problema dos três corpos, questão que havia de ser resolvida no ano seguinte, pelo matemático americano G. D. BIRKHOFF.

Entretanto, novas ideias sobre o conceito de *espaço* estavam sendo introduzidas na matemática. O espaço cartesiano isomorfo do espaço euclideano, onde um ponto é identificado com o sistema das suas três coordenadas, há muito tinha sido generalizado com o conceito de espaço n-dimensional, onde um ponto tem um número n, qualquer, de coordenadas. Mais um passo, e uma sucessão infinita de coordenadas foi igualmente designada por ponto, dum espaço com uma infinidade de dimensões. Relações apropriadas definiam aí o equivalente duma distância e davam a esse domínio uma *estrutura espacial*.

Em 1904, FRÉCHET cria um conceito de espaço muito mais geral, liberado de tais particularidades. Considerando um conjunto abstracto, ele introduz nesse conjunto uma estrutura de espaço (a que chamaria *espaço distanciado*, ou *métrico*) mediante uma definição axiomática de distância entre dois elementos do conjunto.

Nesse conceito geral de espaço — *espaço abstracto* — ficavam então englobados uma multidão de domínios analíticos (como os espaços de HILBERT já referidos), cujas conexões íntimas não haviam podido ainda ser explicitadas.

O Cálculo das variações, por exemplo, trata de problemas em que a incógnita não é uma variável numérica mas uma função (vale dizer, uma linha ou superfície). Compreende-se imediatamente a necessidade de operar com as funções como se opera habitualmente com números ou vectores, de considerar funções de função («funções de linha», na designação de VOLTERRA) e de definir para tais funções conceitos como os de limite, continuidade, etc.

A nova teoria de FRÉCHET veio unificar tais processos e, pelas sugestões da linguagem geométrica que o conceito geral de distância inculcava e permitia definir com rigor, iria revelar-se um instrumento utilíssimo da Análise Funcional.

Foi nesta ordem de ideias que, em 1922, os matemáticos americanos BIRKHOFF e KELLOGG transportaram o teorema do ponto fixo para os espaços funcionais e, ao mesmo tempo que estendiam assim o seu domínio de validade, mostravam o proveito que se podia tirar desse teorema na Análise Funcional, com a sua aplicação à demonstração da existência de soluções das equações diferenciais ordináaias.

Em que consistiu esse «transporte» para um espaço funcional e como pôde ser aplicado às equações diferenciais esse teorema de tão modesta origem na topologia do plano?

Essencialmente, o problema de resolver uma equação diferencial, posta sob a forma integral, pode reduzir-se ao seguinte: encontrar uma função x que mediante uma operação ϕ (a operação integral) seja transformada no próprio x. À função x chamaremos *ponto*, à operação ϕ chamaremos *transformação* (ou *deformação*, como há pouco). Esta transformação opera num certo espaço, constituído pelas funções que satisfazem a certas condições inerentes ao nosso problema.

Nós começaremos por definir neste espaço funcional o que se deve entender por conjunto convexo, por conjunto compacto (que de certo modo corresponde a ser limitado e incluir a sua fronteira) e por transformação contínua. A teoria dos espaços abstractos fornece-nos os meios necessários para isso. Suponhamos então que o Teorema do ponto fixo foi demonstrado neste espaço. Bastará então constatar que as funções consideradas no problema constituem um conjunto convexo e compacto, que a nossa transformação ϕ é contínua e, aplicada a um ponto desse conjunto, leva a um ponto do mesmo conjunto. Todo o ponto fixo é solução da equação, cuja existência nos é pois assegurada por tão prestável teorema.

Não resisto aqui à tentação de abrir um parêntese para evocar as célebres palavras de POINCARÉ em que ele fixa de forma magistral, e como por antecipação, a essência do método que acabo de descrever sumàriamente:

«A Matemática — escreveu ele em 1908 — é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes. Entendamo-nos. Convém que essas coisas diferentes pela matéria sejam semelhantes pela forma, que elas possam, por assim dizer, vazar-se do mesmo molde. Quando a linguagem foi bem escolhida, fica-se surpreso ao ver que todas as demonstrações feitas para um objecto conhecido se aplicam imediatamente a muitos objectos novos; nada há que mudar, nem mesmo as palavras, porquanto os nomes se tornaram os mesmos».

Assim ocorre, efectivamente, com o Teorema do ponto fixo. Mas a sua história continua após 1922 – e tudo leva a crer, de resto, que ainda não terminou...

Os resultados de BIRKHOFF e KELLOGG deixaram o caminho aberto a uma série de pesquisas tendentes a uma larga aplicação do Teorema do ponto fixo na Análise Funcional e, na verdade, várias generalizações deste teorema foram sucessivamente apresentadas, procurando aligeirar as suas hipóteses de modo a abarcar novos espaços funcionais onde ele poderia ter aplicação. Nesse sentido as contribuições mais importantes devem-se a SCHAUDER, notável matemático polonês, que demonstrou o teorema para transformações definidas em espaço de BANACH (em 1927) e mais tarde (em 1930) em espaços de FRÉCHET.

SCHAUDER aplicou o Teorema do ponto fixo ao problema de DIRICHLET relativo a equações de derivadas parciais do tipo hiperbólico. O matemático francês LERAY, que se interessou com SCHAUDER pela utilização deste teorema na Análise Funcional, explorou largamente a sua aplicação em domínios como equações integrais não lineares, problema de DIRICHLET para equações não lineares de tipo elíptico, cálculo das variações, um problema de DIRICHLET levantado pela teoria dos fluidos viscosos, problemas levantados pelos escoamentos dos fluidos perfeitos e compreensíveis, problemas de representação conforme do tipo HELMHOLTZ surgidos nos escoamentos dos fluidos perfeitos e compressíveis, problemas de representação conforme do tipo de HELMHOLTZ surgidos nos escoamentos dos fluidos perfeitos, etc.

Outros matemáticos o seguiram ou acompanharam. Os esforços feitos no sentido de dar ao teorema do ponto fixo o máximo de generalidade, culminaram com o resultado de TYCHONOFF, professor da Universidade de Moscovo que, em 1935, demonstrou esse teorema para os espaços topológicos localmente convexos, que abrangem todos os espaços funcionais importantes e constituem por isso a classe de espaços vectoriais topológicos mais geral que se considera presentemente.

É interessante assinalar que, através destas generalizações sucessivas, o Teorema demonstrado por BROUWER para o espaço cartesiano continuou sendo o resultado essencial, utilizado nos diferentes casos como base de demonstração dos teoremas mais gerais, que para todos eles assenta no mesmo princípio: uma aproximação conveniente do espaço considerado por um espaço de dimensão finita.

É igualmente digno de nota — e expressamente para isso alonguei a citação de trabalhos de LERAY e outros quão larga tem sido a intervenção deste teorema, não apenas em questões de carácter teórico, mas nas próprias aplicações da Matemática, nomeadamente à Dinâmica dos fluidos.

Pode assim constatar-se uma vez mais uma verdade bem conhecida e — talvez por isso — fàcilmente esquecida: que a matemática mais abstracta se não reduz a meras especulações formais, confabulações esotéricas de espíritos isolados em torres de marfim, ausentes da realidade e supremamente inúteis.

De longínquas raízes finamente mergulhadas na experiência humana, o pensamento matemático prossegue a sua senda «para honra do espírito humano» — como dizia JACOBI — mas não no sentido duma soberba fuga, como pretendem alguns.

Embrenhando-se ousadamente em labirintos sutis, as teorias matemáticas parecem, não raro, atingir paragens de quimera, desviando-se da Vida e dos seus problemas permanentes. Mas a história da ciência ensina que nessa ausência a Matemática apenas se fortalece para melhor os servir no próximo regresso.

«Probabilidades, erros e estatística»

por ***M. A. Fernandes Costa***

Um dos aspectos salientes da recente reforma do ensino de Engenharia foi a instituição no 2.º ano de uma cadeira semestral com o nome que serve de título a este comentário.

Efectivamente, não podia ignorar-se por mais tempo o êxito estrondoso e a larga aplicação que nos países industrializados, particularmente nos de língua inglesa, têm vindo a usufruir os métodos estatísticos de «quality control».

Cabe aos britânicos a honra de terem alçado a Estatística ao nível de ciência metodológica universal e realizado muito trabalho precursor no domínio das aplicações, nomeadamente à indústria; por seu lado, o espírito prático dos americanos soube avaliar com clareza as possibilidades da nova técnica que o seu poder realizador levou a extremos surpreendentes. Postos em execução pela primeira vez em larga escala nas numerosas fábricas e depósitos de material de guerra que o governo americano operou durante o último conflito, os métodos estatísticos de controle de qualidade alcançaram resultados tão espectaculosos que a indústria privada logo os abraçou; e sempre que uma técnica vence de forma tão definitiva a relutância do industrial, cujas preocupações económicas naturalmente sobrelevam as científicas, as suas virtudes ficam demonstradas de forma insuspeita.

Pensou-se por isso, e muito bem, que não seria peso morto na bagagem dos nossos engenheiros um conhecimento — se não de fundo, ao menos de conceitos — da moderna Estatística Industrial. Criou-se então uma cadeira, nomearam-se os professores, e tudo ficou resolvido. Ou talvez não?

Começamos por deplorar o nome com que se baptisou a nova disciplina, estigmatizando-a logo à nascença duma forma que lhe não augura vida saudável.

Na verdade, o nome de «Probabilidades, Erros e Estatística» afigura-se pouco adequado; tão pouco adequado, digamos, como o de «Esqueleto, Músculos e Anatomia Geral» que se atribuisse a uma cadeira de Medicina. O título não estaria mal para uma douta conferência em que se examinasse a *evolução histórica* da teoria estatística; mas para uma cadeira dum curso de Engenharia, situada, ainda por cima, no *primeiro* semestre do seu *segundo* ano — antes, portanto, que se possa aproveitar a teoria ministrada em Cálculo Infinitesimal — parece-nos menos do que apropriado.

É que, por um lado, o Cálculo das Probabilidades só pode considerar-se, no caso sujeito, como um *meio* e não como um *fim*, como um *instrumento* e não como o produto final: a clássica definição de probabilidade como o «quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos igualmente possíveis», os teoremas (1) das probabilidades totais e compostas, o

(1) Sim, teoremas! Para quê abordar os problemas filosóficos das probabilidades? Para quê mencionar o proposto fundamento axiomático da teoria?