É igualmente digno de nota — e expressamente para isso alonguei a citação de trabalhos de LERAY e outros quão larga tem sido a intervenção deste teorema, não apenas em questões de carácter teórico, mas nas próprias aplicações da Matemática, nomeadamente à Dinâmica dos fluidos.

Pode assim constatar-se uma vez mais uma verdade bem conhecida e — talvez por isso — fàcilmente esquecida: que a matemática mais abstracta se não reduz a meras especulações formais, confabulações esotéricas de espíritos isolados em torres de marfim, ausentes da realidade e supremamente inúteis.

De longínquas raízes finamente mergulhadas na experiência humana, o pensamento matemático prossegue a sua senda «para honra do espírito humano» — como dizia JACOBI — mas não no sentido duma soberba fuga, como pretendem alguns.

Embrenhando-se ousadamente em labirintos sutis, as teorias matemáticas parecem, não raro, atingir paragens de quimera, desviando-se da Vida e dos seus problemas permanentes. Mas a história da ciência ensina que nessa ausência a Matemática apenas se fortalece para melhor os servir no próximo regresso.

«Probabilidades, erros e estatística»

por ***M. A. Fernandes Costa***

Um dos aspectos salientes da recente reforma do ensino de Engenharia foi a instituição no 2.º ano de uma cadeira semestral com o nome que serve de título a este comentário.

Efectivamente, não podia ignorar-se por mais tempo o êxito estrondoso e a larga aplicação que nos países industrializados, particularmente nos de língua inglesa, têm vindo a usufruir os métodos estatísticos de «quality control».

Cabe aos britânicos a honra de terem alçado a Estatística ao nível de ciência metodológica universal e realizado muito trabalho precursor no domínio das aplicações, nomeadamente à indústria; por seu lado, o espírito prático dos americanos soube avaliar com clareza as possibilidades da nova técnica que o seu poder realizador levou a extremos surpreendentes. Postos em execução pela primeira vez em larga escala nas numerosas fábricas e depósitos de material de guerra que o governo americano operou durante o último conflito, os métodos estatísticos de controle de qualidade alcançaram resultados tão espectaculosos que a indústria privada logo os abraçou; e sempre que uma técnica vence de forma tão definitiva a relutância do industrial, cujas preocupações económicas naturalmente sobrelevam as científicas, as suas virtudes ficam demonstradas de forma insuspeita.

Pensou-se por isso, e muito bem, que não seria peso morto na bagagem dos nossos engenheiros um conhecimento — se não de fundo, ao menos de conceitos — da moderna Estatística Industrial. Criou-se então uma cadeira, nomearam-se os professores, e tudo ficou resolvido. Ou talvez não?

Começamos por deplorar o nome com que se baptisou a nova disciplina, estigmatizando-a logo à nascença duma forma que lhe não augura vida saudável.

Na verdade, o nome de «Probabilidades, Erros e Estatística» afigura-se pouco adequado; tão pouco adequado, digamos, como o de «Esqueleto, Músculos e Anatomia Geral» que se atribuisse a uma cadeira de Medicina. O título não estaria mal para uma douta conferência em que se examinasse a *evolução histórica* da teoria estatística; mas para uma cadeira dum curso de Engenharia, situada, ainda por cima, no *primeiro* semestre do seu *segundo* ano — antes, portanto, que se possa aproveitar a teoria ministrada em Cálculo Infinitesimal — parece-nos menos do que apropriado.

É que, por um lado, o Cálculo das Probabilidades só pode considerar-se, no caso sujeito, como um *meio* e não como um *fim*, como um *instrumento* e não como o produto final: a clássica definição de probabilidade como o «quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos igualmente possíveis», os teoremas (1) das probabilidades totais e compostas, o

(1) Sim, teoremas! Para quê abordar os problemas filosóficos das probabilidades? Para quê mencionar o proposto fundamento axiomático da teoria?

teorema de Bernoulli ligando a probabilidade com a frequência, a noção de variável aleatória e suas exemplificações mais importantes, e pouco mais, fornecem fundamento suficiente à teoria estatística que há oportunidade para expor. Logo, não parece justificar-se o destaque atribuído às «Probabilidades» no nome da cadeira.

Por outro lado, os «Erros» constituem um problema fàcilmente tratável, banal até, à luz da moderna teoria estatística. Surpreende ver ainda hoje a chamada «teoria dos erros» apresentada independentemente, com expressões polvilhadas d terminologia gaussiana, actualmente pitoresca, e baseada em argumentação escassamente diferente da do próprio Gauss ! [1] Tal procedimento poderá tolerar-se em certos casos por razões de tradição, como por exemplo quando se pretenda informar matemàticamente certas regras de trabalho na Topografia e na Geodesia; mas não parece admissível em paralelo com uma exposição dos princípios fundamentais da Estatística, pressuposta no caso sujeito.

A demonstração da afirmação acima feita de que a teoria dos erros não é hoje mais do que um simples capítulo da Estatística, se bem que se não encontre explícita na literatura — talvez por demasiado banal! — daria assunto para outro artigo. Mas não resistimos a fazer aqui algumas observações tendentes a ilustrar o nosso ponto de vista.

Note-se, em primeiro lugar, que a corrente obediência dos erros de observação à lei normal pode imediatamente justificar-se como corolário do «teorema do limite central» (uma das mais difíceis proposições da teoria estatística, mas cujo enunciado é muito fácil de entender). Daqui a mostrar que as sucessivas medições de uma mesma grandeza se distribuem normalmente em torno do valor desta vai apenas um passo, que logo pode ser seguido doutro no sentido de sublinhar que a estima da grandeza é equivalente à estima da média duma variável normal. (Por conveniência, caracterizaremos desde já esta variável designando por μ a sua média e por σ^2 a sua variância).

O problema básico da «teoria dos erros» insere-se assim num dos capítulos centrais da Estatística: o da estima dum parâmetro da população (neste caso μ) a partir duma amostra nela colhida (constituída pelas n observações $x_1, x_2, \cdots, x_n$). Claro que servirão para estimar μ a «média aritmética» $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, a mediana, ou qualquer outro estimador apropriado; mas há um bom par de razões que levam a preferir a primeira: é uma estimativa «centrada» (quer dizer, $E(\bar{x}) = \mu$) e a mais «eficiente» (i. e. de variância mínima). Esta última qualidade prende-se de resto com a circunstância de ser também $\bar{x}$ uma estimativa de «máxima verosimilhança».

Para aferir o grau de confiança de que a estimativa $\hat{\mu} = \bar{x}$ é merecedora, há necessidade de estimar também o desvio padrão σ. Sem mencionar sequer o mundo de simplificações que recentes resultados sobre o uso da amplitude como medida de dispersão permitem introduzir nos cálculos [1], referir-nos-emos apenas ao estimador habitual: o desvio padrão da amostra, $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$.

Quando n é pequeno, procura-se, de acordo com um critério discutível, melhorar a estimativa tomando antes $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$. É costume apresentar para este procedimento as mais fantasistas justificações, ignorando-se sempre as razões que efectivamente podem pesar na escolha: (*a*) $\hat{\sigma}$ maximisa a densidade de probabilidade da distribuição da variável s [2], $f(s \mid \sigma) \propto e^{-n s^2/2\sigma^2} s^{n-2}$, quando aqui se supõe s substituído pelo valor observado; (*b*) $\hat{\sigma}$ é a estimativa que intervém na definição de várias «estatísticas» muito usadas, como por exemplo as variáveis «t» de Student e «F» de Snedecor.

Por exemplo, relativamente uma série de 10 observações tem-se $t = \sqrt{10}\,(\bar{x} - \mu)/\hat{\sigma}$; daqui se deduzirá um intervalo-α de confiança para μ substituindo $t_{\frac{\alpha}{2}}$ em $\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}\right)$ pelo valor do quantilho- $\frac{\alpha}{2}$ duma variável t com 9 graus de liberdade. Com $\alpha = 0{,}50$ vem $t_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}703$ e a semi-amplitude do intervalo será dada por $0{,}703 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}$. Compare-se este valor com o «erro provável» [3] $r = 0{,}6745 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}$ tradicionalmente empregado neste contexto: se $\hat{\sigma}$ for relativamente grande, a divergência pode ser considerável.

Poderia prosseguir-se com a consideração das médias ponderadas; poderia também relacionar-se o

[1] *Theoria Motus Corporum Coelestium*, 1809

[1] V. artigo do autor a este respeito em *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, n.º 12 (1956).

[2] Desvio padrão observado em amostras de n colhidas na mesma população.

[3] O tal que «não é erro nem tão pouco provável».

«princípio dos mínimos quadrados» com o «princípio da máxima verosimilhança»; e assim por diante. Mas não se pretende divagar demasiado e o que fica dito ilustra suficientemente o ponto de vista defendido.

Julgamos ter apresentado argumentos suficientes para evidenciar a pouca propriedade do nome escolhido para a nova disciplina. Se o aspecto que mais interessa salientar é o das aplicações à indústria, porque não chamar-lhe «Estatística Industrial» ou qualquer outra coisa semelhante?

Poderá cuidar-se que o baptismo, por pouco inspirado que seja, nenhuma influência tem no funcionamento dos cursos; mas a verdade incontroversa é que a designação de «Probabilidades, Erros e Estatística» tende a imprimir aos programas dos cursos orientação errada sempre que aos seus regentes falte a indispensável experiência de trabalho na matéria (experiência essa que, ousaríamos dizer, muito rareia no nosso meio).

Veja-se por exemplo como se desenrolou o curso numa escola de engenharia com a qual temos contacto mais directo. Nessa Escola parece prevalecer o estranho critério de que o ensino da Matemática fica melhor entregue a engenheiros (1) do que a matemáticos, nunca se havendo reparado que essa pobre ciência, tão martirizada, é talvez a mais vulnerável a uma defeituosa exposição. Nenhum matemático português deve, portanto, ter sido tomado de surpresa ao ver sacrificar a Estatística como a nova vítima do amadorismo que tanto tem prejudicado as matemáticas aplicadas em Portugal.

O professor encarregado de reger na referida Escola a cadeira de «Probabilidades, Erros e Estatística» — que aliás deve ser pessoa de luzidas qualidades, pois lhe foram também confiadas mais três cadeiras básicas de Matemática distribuídas pelos dois primeiros anos — não hesitou em assumir a responsabilidade de, logo no primeiro ano de funcionamento da cadeira, estruturar ele próprio o programa do curso e publicar as *suas* lições. Não lhe deve ter ocorrido sequer a solução — porventura mais lógica, mais natural e mais eficaz — de adoptar para efeitos docentes e discentes um dos muitos livros de Estatística Industrial que pululam nas literaturas americana e inglesa.

O resultado está à vista. Percorramos, com efeito, muito ràpidamente, as tais «lições» (que, escusado será dizer, escrupulosamente quizeram traduzir o nome da cadeira: primeiro «deu-se» Cálculo das Probabilidades, depois «deu-se» Teoria dos Erros e finalmente «deu-se» Estatística).

(1) Frequentemente, até, a meros diplomados em Engenharia ou a simples alunos dos últimos anos!

1. *Cálculo das Probabilidades.*

Começa-se pela definição lógica (!) de probabilidade, cujos axiomas são alternadamente apodados de «propriedades» e «teoremas». Menciona-se depois a definição de Bernoulli, fala-se numa coisa a que vagamente se chama a «lei empírica do acaso» e introduzem-se os «campos de probabilidade» (?). Ilustra-se a seguir, copiosamente, a técnica de cálculo de probabilidades em problemas do tipo clássico, muito clássico mesmo. Vai-se ao ponto de enunciar a generalização do teorema das probabilidades totais ao caso de os acontecimentos não serem *mùtuamente exclusivos* (sic). Sem esquecer o problema do encontro, passa-se depois às probabilidades geométricas (!).

O problema das provas repetidas é tratado de forma quase exaustiva, analisando-se laboriosa e pormenorizadamente a aplicabilidade das aproximações normal e de Poisson à binomial.

Vêm a seguir as inevitáveis probabilidades das causas, para só depois se entrar num estudo sumário das variáveis aleatórias, mas não tão sumário que se deixe de introduzir a «função característica» (função geradora dos momentos) que se aplica ao cálculo de momentos e, sem justificação, à demonstração da lei da combinação linear de variáveis normais.

Tudo isto muito bem misturado e condimentado por paradoxos de Méré, problemas de Tchebycheff, agulhas de Buffon, etc., etc., etc.

2. *Teoria dos Erros.*

Sobre este assunto foram publicados apontamentos pelo próprio regente da cadeira, que nos permitem desenvolver uma crítica mais fundamentada.

Feita a distinção entre erros sistemáticos e acidentais, enunciam-se os postulados de Gauss e deduz-se deles a lei normal dos erros, que se afirma ser *inteiramente* confirmada pela experiência. Definem-se depois uma «medida de precisão» e vários «aferidores» (erro quadrático médio, erro provável e erro médio absoluto).

Considera-se a seguir a combinação linear de erros e deduz-se a «fórmula de propagação de erros». Esta, como se sabe, é a fórmula aproximada que dá o erro médio quadrático duma função $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de várias variáveis cujos valores são experimentalmente determinados; mas no opúsculo não se esclarece como remover a dificuldade de cálculo das derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ que na fórmula intervêm. (Não se conhecem os valores correctos dos x_i).

Outro ponto cujo tratamento se oferece também a particulares reparos é o princípio dos mínimos quadrados, em cuja justificação se diz, entre outras coisas, ser $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}$ a *probabilidade* de cometer o erro t, e embandeira-se em arco ao verificar que esse princípio conduz a tomar a média aritmética como o «valor mais provável», esquecendo-se que isso decorre da própria dedução da lei de Gauss a partir dos seus postulados. Este princípio podia ao menos ter sido aproveitado para justificar o uso da média ponderada no caso de observações de desigual precisão, mas não o foi — pelo menos explicitamente.

O capítulo que se segue, sobre observações indirectas, é talvez o que, pelo deficiente enunciado do problema e particular imperfeição da exposição, causará aos entendidos alteração mais sensível da pressão arterial. Cometeu-se neste ponto a «proeza» de transpor para a notação hoje corrente na teoria das matrizes toda a argumentação que conduz às equações normais de Gauss. Todavia, do ponto de vista matemático, nada se parece ter ganho em clareza; quanto ao sentido físico do problema, esse perde-se completamente por detrás das desajeitadas equações.

Outros aspectos mais deploráveis do trabalho sujeito poderiam ainda ser mencionados; mas confessamo-nos impotentes para dar uma ideia, por pálida que seja, da frequente imprecisão ou mesmo impropriedade de linguagem, da forma vaga ou incompleta por que são postos os problemas, da imperfeição da maioria dos conceitos, da má ligação com a matéria anterior, enfim, da confusão irremediável que impregna toda a exposição.

Permita-se-nos uma transcrição:

> «Em tudo o que se segue, falaremos de erros quadráticos médios, erros prováveis, etc., como se fossem os teóricos, isto é, definidos pela curva de Gauss correspondente. É evidente que há erro nessa aproximação porque a curva de Gauss refere-se a uma variável contínua enquanto que o número de observações é sempre finito; na definição dos aferidores entra o conceito de probabilidade enquanto que com um número finito de observações estaremos lidando com frequências.
>
> Prova-se que esse erro tende para *0* quando n tende para infinito e que tratando-se dum número suficiente de observações ($n \geqslant 20$) é *pràticamente* verdadeira a asserção feita.
>
> Nota: n — número de observações».

Não se julgue que é o estilo que pretendemos criticar; quizemos apenas dar uma ilustração eloquente do que pode acontecer quando se procure traduzir à risca a desastrosa designação da cadeira. Naqueles períodos acha-se enunciada, por uma forma embrionar e toscamente incompleta embora, a ideia fundamental da Estatística (indução amostra ⟶ universo) que só na parte final do curso será abordada.

3. *Estatística.*

A esta matéria aplicam-se integralmente, se não com maior intensidade ainda, as críticas feitas atrás a respeito da qualidade da exposição. Esta pode também ser detidamente apreciada através da leitura dum segundo opúsculo publicado pelo mesmo autor.

Após uma introdução em que se dá a definição de Estatística mais adequada que se encontrou (¹) — a de Cournot (1801-1877) — entra-se na primeira parte da obra, pomposamente intitulada «Elementos de Estatística Matemática».

Despejam-se aqui, numas curtas 14 páginas, todas as costumadas noções que se encontram nos primeiros capítulos dos livros, tanto as indispensáveis como as supérfluas, tanto as de uso corrente como as obsoletas, tanto as aplicáveis num curso breve como as de carácter mais avançado e subtil. Nem as correcções de Sheppard para os momentos, nem a distribuição de Lexis, nem os desenvolvimentos em série de Edgeworth escaparam à chamada!

Na segunda parte, sob a epígrafe «Métodos Estatísticos no Controle dos Processos Industriais» (finalmente!), o autor ocupa-se exclusivamento de cartas de controle nas suas variadas formas (melhor diríamos, deformações). Nem uma palavra sobre inspecção por amostra — o segundo problema básico da Estatística Industrial — nem sobre a organização de planos de amostragem de acordo com margens de risco prèfixadas.

Muitas tabelas, numerosos ábacos, mas escassa explicação sobre o que se acha por detrás delas. O uso da amplitude *(range)* na construção das cartas, que se aplaude, fica porém assaz mal esclarecido; e as cartas de controle da proporção de elementos defeituosos são muito incompleta e inadequadamente tratadas.

As exigências de espaço não nos permitem todavia fazer crítica pormenorizada deste incrível escrito, destinado — é bom não esquecer — ao uso de alunos duma Universidade. Ao seu autor cabe a dúbia distinção de haver dado a lume o primeiro texto sobre Estatística Industrial em português. Dizemos «dúbia» porque não podemos afiançar que o opúsculo trate na realidade de Estatística; e, quanto a ser redigido em português, limitar-nos-emos a notar que as costumadas dificuldades resultantes da pobreza da terminologia científica nacional são nele resolvidas com um

(¹) Menciona-se também, a «título de curiosidade», uma «definição humorística» — *a Estatística é a arte de precisar o que se ignora* — a qual justificadamente se diz «visar os estatistas ignorantes ou pouco escrupulosos».

critério que decerto espantará quem entre nós algum interesse tenha dedicado ao assunto. *Desvio típico*, por exemplo, foi termo com que o responsável por estas linhas nunca ouviu os seus colegas mimosear o *desvio padrão*; e *quartos, décimos, centésimos* são epítetos com que os *quartilhos*, os *decilhos* e os *centilhos* provàvelmente se ressentirão.

Com todo este arrazoado não se quiz, sinceramente, atingir ninguém. Sòmente se pretendeu chamar a atenção para um aspecto particular dum problema grave e muito mais vasto: o cancro do amadorismo que entre nós aflige o ensino das Matemáticas.

Quando chegará o dia em que se deixe aos especialistas o cultivo das especialidades?

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CONFERÊNCIAS NA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE BARCELONA

O Prof. SEBASTIÃO E SILVA proferiu uma série de dez conferências na Faculdade de Ciências de Barcelona, entre 14 de Abril e 8 de Maio deste ano, subordinadas ao tema geral «*Distribuições e Funcionais Analíticas. Aplicações ao Cálculo Operacional*».

O Diário de Barcelona de 17 de Abril de 1958 inseriu a seguinte notícia:

«O Professor JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, director do Centro de Estudos Matemáticos do Instituto de Alta Cultura e catedrático da Universidade Técnica de Lisboa, iniciou o ciclo de conferências sôbre teoria das distribuições e suas aplicações, organizado pelo Seminário Matemático de Barcelona. O director do Seminário, doutor D. José Maria Orts apresentou o conferencista focando os distintos aspectos da sua personalidade científica de tanto relevo na matemática moderna.

«O doutor Sebastião expôs, de forma magistral, uma nova axiomática da moderna teoria das distribuições, de tanta aplicação não só no campo abstracto, como nas novas teorias físicas.

«O cálculo simbólico de Heaviside há muito aplicado nos problemas de engenharia encontram com esta teoria uma justificação rigorosa que até agora lhe faltava. A função de DIRAC, instrumento valioso na Mecânica Quântica, adquire sentido quando considerada como uma distribuição. Muitos problemas de equações diferenciais têm solução adequada com este novo instrumento de cálculo».

Seguem-se os títulos das conferências realizadas.

1 — Considerações prévias: necessidade das distribuições; sua introdução heurística no Cálculo Operacional (escola de Heaviside) e na Física Teórica (escola de Dirac).

2 — Construção do espaço das distribuições de ordem finita como derivadas formais de funções contínuas. Interpretação das funções localmente somáveis como distribuições.

3 — Distribuições de ordem infinita. Axiomática das distribuições. Produto multiplicativo.

4 — Limite de uma sucessão de distribuições. Alusão à topologia dos espaços de distribuições.

5 — Integral de uma função com respeito a uma distribuição. Fórmula integral de DIRAC. Funcionais e operadores lineares contínuos sobre distribuições. Definição de distribuição segundo SCHWARTZ.

6 — Espaços particulares de distribuições. Modalidades algébricas e topológicas do conceito de convolução (faltung) de duas distribuições.

7 — Revisão sumária da teoria das funcionais analíticas e do Cálculo Operacional de FANTAPPIÉ, segundo uma orientação mais recente.

8 — A transformação de LAPLACE como operador linear contínuo sobre distribuições. Suas relações com o Cálculo operacional de FANTAPPIÉ.

9 — Aplicação do Cálculo Operacional aos problemas mistos para as equações em derivadas parciais de 2.ª ordem. Distribuição de GREEN para a equação de ondas.

10 — Novas perspectivas abertas pelas distribuições no Cálculo Operacional. As ultra-distribuições como funcionais analíticas de FANTAPPIÉ.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DE LISBOA

O Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa do I. A. C. realizou nos meses de Maio a Julho uma série de lições sobre Topologia que foram seguidas com bastante interesse por alunos e licenciados. Estas lições foram proferidas pelo bolseiro do I. A. C., JOÃO DOS SANTOS GUERREIRO, e trataram até agora duma iniciação aos métodos da Topologia concretizados com aplicações á Análise Funcional, devendo prosseguir no próximo ano lectivo.

A pedido de alguns alunos, em especial da Facul-