dade de Letras, o Prof. Sebastião e Silva realizou também uma série de lições sobre Lógica e Teoria dos Conjuntos que foram seguidos com vivo interesse.

Finalmente o Prof. Hugo B. Ribeiro da Universidade de Nebraska proferiu duas lições de encerramento.

Merece todo o nosso louvor esta feliz iniciativa, que vem contribuir para a renovação da Cultura Matemática no nosso país e despertar interesse entre os novos pela Matemática Moderna.

J. G. T.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS

Como já foi anunciado no último n.º de Gazeta de Matemática, realiza-se de 14 a 21 de Agosto próximo em Edimburgo o XII Congresso Internacional dos Matemáticos, sobre a direcção superior da União Matemática Internacional.

A Gazeta de Matemática dará no próximo número indicações pormenorizadas sobre esta reunião, e faz votos de que o próximo Congresso, – o XIII – a realizar em 1962 o seja em Portugal.

J. G. T.

PROFESSOR AGREGADO DA F. C. L.

Nos dias 31 de Janeiro, 24, 27 de Fevereiro e 13 de Maio realizaram-se na F. C. L. as provas para habilitação ao título de Prof. Agregado do 1.º grupo 1.ª Secção — Análise e Geometria – da F. C. L. do 1.º Assistente do I S C E F Dr. José Ribeiro Albuquerque:

31-1-58 — prova prática – Equações às derivadas parciais de 1.ª ordem.

24-2-58 — 1.ª lição – Equações diferenciais lineares no domínio real; métodos de integração.

27-2-58 — 2.ª lição – Superfícies regradas.

13-5-58 — defesa da Tese – «Propriedades de conexão nos espaços abstractos».

Foram arguentes os Profs. Anibal Scipião Gomes de Carvalho, José Francisco Ramos e Costa e Luiz Beda de Sousa Tavares Neto.

A Tese foi publicada na Revista da Faculdade de Ciências em 1954, data em que foi requerida a admissão a concurso.

A votação foi feita no final das provas sobre o mérito absoluto do candidato que foi aprovado por unanimidade. Felicitamos sinceramente o Dr. Ribeiro Albuquerque.

J. G. T.

DOUTORAMENTO

Nos dias 17 e 18 de Março realizaram-se na F. C. L. as provas para doutoramento em Ciências Matemáticas do Assistente daquela Faculdade António César de Freitas. O Candidato, que foi aprovado com a classificação de 18 valores, apresentou como dissertação, «A Teoria das Distribuições e o Cálculo simbólico dos Electrotécnicos no caso de circuitos de Constantes concentradas», aplicação da Teoria das Distribuições aos sistemas de equações diferenciais que traduzem o funcionamento dos circuitos de constantes concentradas. Argumentaram os Profs. José Sebastião e Silva, Rodrigo Sarmento Beires e Diogo Pacheco Amorim. Ao novo doutor as nossas felicitações.

J. G. T.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência — (1.ª chamada) — 1958.

4339 — *a*) Mostre que o conjunto dos racionais x tais que $x^3 > 5$ constituem uma secção superior

b) Considere o conjunto dos números $a + \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Indique os seus pontos de acumulação, os isolados e os limites de Weierstrass. Sob que condição existiria mínimo?

c) Mostre que conjunto limitado e fechado contém mínimo e máximo.

4340 — *a*) Descreva a maneira de calcular as raízes racionais de um polinómio de coeficientes inteiros. Se estes são todos positivos e os coeficientes extremos iguais à unidade, que pode concluir a respeito dessas mesmas raízes.?

b) Caracterize os polinómios reais $f(x)$ de grau n para os quais as imagens das raízes são simétricas duas a duas em relação ao eixo dos yy. Com $n=4$, determine $f(x)$ pela condição ulterior de ser um quadrado perfeito.

c) Mostre que se $f(x)$ é múltiplo de $f'(x)$ então um e um só valor anula quer $f(x)$, quer $f'(x)$.

4341 — *a*) Enuncie a regra de multiplicação de matrizes e estabeleça a propriedade associativa desta operação.

b) Defina característica de uma matriz. Descreva com justificação um processo para o seu cálculo. Indique os valores de λ para os quais o produto AB com

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & \lambda-1\\ -2 & -1-2\lambda\\ 0 & 1+\lambda\end{bmatrix}$$

resulta de característica 2.

c) Seja A uma matriz quadrada de característica igual à ordem n. Utilizando a teoria da condensação por operações elementares sobre linhas, mostre que existe uma matriz B tal que $BA=I$. Verifique que B é também de característica n e que permuta com A.

4342 — *a*) Dados $z_1=3+4i$ e $z_2=1+2i$, construa a imagem do complexo z tal que $\arg(z-z_1)=\frac{\pi}{3}$ e $\arg(z-z_2)=\alpha$. Para que valores de α existe solução? Enuncie e justifique a propriedade em que fundamenta a resolução.

b) Mostre que o polinómio $f(x)=2x^3-3x^2-2$ não tem raízes racionais, mas admite uma raiz real. Calcule esta com duas casas decimais pelo método de HOLMES.

c) Estabeleça a divisibilidade de $f(-1)$ por $\alpha+\beta$ quando $\frac{\alpha}{\beta}$ é uma fracção irredutível raiz de $f(x)$, polinómio de coeficientes inteiros.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência — (2.ª chamada) — 1958.

4343 — *a*) Mostre que os racionais x que fazem $x^3>7$ constituem uma secção superior. Indique justificando a natureza do número que ela define.

b) Seja $f(x)$ uma função crescente e contínua em $[a,b]$. Indique o seu contradomínio e enuncie e demonstre o teorema em que fundamenta a resposta.

c) Calcule os limites laterais no infinito e em zero para a função $f(x)$ $2^{-\frac{1}{x}}$. Trace um gráfico aproximado de $f(x)$. Diga, justificando, se é uniformemente contínua em $[-1,0)$.

4344 — *a*) Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$. Se y_0 não é valor tomado pela função, prove que existe uma vizinhança de y_0 onde não existe nenhum valor da função. Enuncie e demonstre o teorema em que baseia a resposta.

b) Seja $f(x)$ uma função crescente em $[a,b]$ com o contradomínio $[f(a),f(b)]$. Verifique que $f(x)$ é contínua em qualquer ponto c de $[a,b]$.

c) Defina continuidade uniforme de $f(x)$ num conjunto e estude deste ponto de vista $f(x)=\frac{1}{x-2}$, definida em $(2,3)$.

4345 — *a*) Dado $u=1+i$, calcule o complexo v que tem a imagem sobre a circunferência com centro na origem e raio 2 e que verifica a condição $|u+v|=|v|-|u|$. Prove que é sempre $|z_1+z_2|\geqslant\big|\,|z_2|-|z_1|\,\big|$, indicando o caso de igualdade.

b) Calcule as raízes racionais do polinómio $f(x)=9x^5-10x^3-36x^2+x+4$ e a raiz irracional com duas casas decimais.

c) Defina o m. d. c. de $f(n)$ e $g(n)$ e relacione-o, justificando, com estes polinómios.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 21-4-58.

4346 — Relacione a e b de modo que a recta $ax+by=1$ fique tangente à circunferência $x^2+y^2=4$ do plano xOy. Equação do plano que, passando no no ponto $P(1,1,2)$, tem aquela tangente por traço em xOy. Valores de a e b para os quais o plano é paralelo à recta $\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$.

4347 — Estabeleça a condição necessária e suficiente para que

$$f=a_0x^n+\cdots$$
$$g=b_0x^m+\cdots \qquad a_0b_0\neq 0$$

tenham alguma raiz comum.

Determine y de modo que

$$f=x^2+2x+y$$
$$g=x^3-2x^2-x+2$$

tenham alguma raiz comum e, para tal valor de y, forme a equação das raízes comuns.

4348 — Mostre que $f=a_{ik}x_ix_k$ de característica r é decomponível numa soma de r quadrados de formas lineares independentes (supõe-se $a_{\alpha\alpha}\neq 0$, com algum α). Decomponha em quadrados a quádrica

$$f=x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+2x_2x_4+x_3^2-2x_3x_4.$$

4349 — Prove que se $S = \sum u_u$ é semi-convergente, podem extrair-se dela duas subséries $\sum a_n$ e $\sum(-b_n)$ com $a_n, b_n > 0$, ambas divergentes infinitas. Conclua daí que é possível reordenar os termos de S de modo que a nova série seja divergente infinita positiva.

Intervalo de convegência da série $\sum_{2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2-1}$ e natureza da série nos extremos desse intervalo. É a série uniformente convergente nesse intervalo? Razão disso.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de Frequência — (2.ª chamada) — 28-4-1958.**

4350 — Estabeleça os teoremas principais relativos à composição e decomposição de determinantes.

Calcule o determinante de 4.ª ordem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{e o determinante de ordem } n: \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$$

4351 — Defina caracterítica duma quádrica. Enuncie a lei da inércia de Sylvester, para as quádricas reais. Que entende por índice de inércia?

Calcule a característica e o índice de inércia da quádrica.

$$x^2 + \lambda y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx,$$

onde λ é parâmetro real.

4352 — Dê uma condição necessária e suficiente para que duas rectas do espaço

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A^1x + B^1y + C^1z + \partial^1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1^1x + B_1^1y + C_1^1z + D_1^1 = 0 \end{cases}$$

sejam

a) Paralelas
b) Secantes.

Escreva as equações dos feixes de planos determinados por cada uma das rectas dadas, e deduza uma condição necessária e suficiente para que elas sejam complanares.

Calcule α de modo que as rectas

$$\begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = -z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2z - 1 \\ y = 5z + 4 \end{cases}$$

sejam complanares e determine uma equação do plaque as contém.

4353 — Estabeleça o teorema de Bolzano relativo a limites finitos de sucessões, e deduza dele uma condição necessária e suficiente de convergência duma série.

Estudo das séries $\sum \frac{1}{(2n+1)^n}$ e $\sum \frac{1}{n \times \sqrt[n]{n}}$.

Enunciados dos números 4339 a 4353 de J. J. Dionísio.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Epoca de Outubro — 1-10-57.**

4354 — *a*) Os polinómios

$$x^3 - \alpha x^2 + 11x - 6$$
$$x^3 - \beta x^2 + x + 6$$

têm duas raízes comuns cuja soma é igual a 5.

Escreva a equação das raízes comuns e calcule os valores de α e β.

b) Estude a posição relativa da recta $\frac{x-x_0}{h} = \frac{y-y_0}{k} = \frac{z-z_0}{l}$ e do plano $Ax + By + Cz + D = 0$, por meio da teoria dos determinantes, obtendo as relações que estudou em Geometria Analítica.

R: a) *O processo prático para a construção do resultante dá imediatamente a equação das raízes comuns que*

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & -\alpha & 11 & -6 & \\ & 1 & -\beta & 1 & 6 \\ \hline -1 & \alpha-\beta & -10 & 12 & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}$$

é do segundo grau: $(\alpha - \beta)x^2 - 10x + 12 = 0$. *Como a soma das raízes desta equação é* 5, *será*

$$\frac{10}{\alpha - \beta} = 5 \quad ou \quad \alpha - \beta = 2$$

o que permite escrever a equação na forma $x^2 - 5x + 6 = 0$, *cujas soluções são* $x' = 2$ *e* $x'' = 3$. *Substituindo nos polinómios dados* x *por* 2 (*ou por* 3), *obtem-se* $\alpha = 6$ *e* $\beta = 4$.

b) *O problema consiste em estudar o sistema*

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{h} = \frac{y-y_0}{k} = \frac{z-z_0}{l} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad \textit{equivalente a}$$

$$\begin{cases} kx - hy = kx_0 - hy_0 \\ ly - kz = ly_0 - kz_0 \\ Ax + By + Cz = -D \end{cases}$$

Se o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} k & -h & 0 \\ 0 & l & -k \\ A & B & C \end{vmatrix}$ *for diferente de*

$0\,(Ah + Bk + Cl \neq 0)$, *o sistema é possível, e determinado, o que significa que a recta encontra o plano num ponto. Se* $\Delta = 0\,(Ah + Bk + Cl = 0)$ *e admitindo que* $\begin{vmatrix} k & -h \\ 0 & l \end{vmatrix} \neq 0$, *há dois casos a considerar: sendo* *o característico* $\Delta' = \begin{vmatrix} k & -h & k x_0 - h y_0 \\ 0 & 1 & l y_0 - k z_0 \\ A & B & -D \end{vmatrix}$ *diferente de* $0\,(A x_0 + B y_0 + C z_0 + D \neq 0)$ *o sistema é impossível (a recta é paralela ao plano) e se* $\Delta' = 0\,(A x_0 + B y_0 + C z_0 + D = 0)$ *o sistema é possível indeterminado (recta assente no plano).*

4355 — Dada a fracção racional $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$, resolva os seguintes problemas:

a) Determine os seus extremos e estude o sentido da concavidade.

b) Decomponha-a em elementos simples e aproveite o resultado para calcular $f^{(n)}(x)$ e $Pf(x)$.

c) Escreva o desenvolvimento em série de $f(x)$ segundo as potências de $x+1$.

R: a) $f'(x) = -\dfrac{3x-2}{x^3(x-1)^2}$ *e* $x = \dfrac{2}{3}$ *é o único ponto de estacionaridade. Como* $f'(x) < 0$ *para* $x > \dfrac{2}{3}$ *e* $f'(x) > 0$ *para* $x < \dfrac{2}{3}$, *trata-se de um ponto de máximo.*

$f''(x) = 2.\dfrac{6x^2-8x+3}{x^4(x-1)^3}$ *e, como* $6x^2-8x+3>0$ *para todos os valores de* x, $f''(x)>0$ *para* $x>1$ *(concavidade voltada para cima) e* $f''(x)<0$ *para* $x<1$ *(concavidade voltada para baixo).*

b) $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{x^2} + \dfrac{b_0}{x-1}$. *Para determinar* a_0 *e* a_1 *basta considerar a fracção auxiliar* $R_0(x) = \dfrac{1}{-1+x}$ *e efectuar a divisão algébrica até ao grau* 1 *do cociente. Obtem-se* $-1-x\,(a_0=-1, a_1=-1)$. *A constante* b_0 *pode calcular-se fàcilmente, fazendo* $x=1$ *na fracção auxiliar* $R_1(x) = \dfrac{1}{x^2}\ (b_0=1)$.

Então $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[\frac{n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{n!}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right] =$$

$$= (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x+n+1}{x^{n+2}}\right]$$

$$P f(x) = \frac{1}{x} + \log\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

c) *Pode obter-se o desenvolvimento em série aproveitando a expressão de* $f^{(n)}(x)$. *Assim*

$$f(x) = \sum_0^\infty f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_0^\infty \left(-\frac{1}{2^{n+1}} - n\right)(x+1)^n$$

4356 — *a*) Provar que, sendo $f(x,y)$ homogénea de grau α, $x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = \alpha(\alpha-1) f$.

b) Mostre que a equação $xy^2 + (x^2+x)y - 3 = 0$ define na vizinhança de $P(1,1)$ uma função $y(x)$. Escreva a equação da tangente à curva nesse ponto.

R: a) *Escrevendo a identidade de* Euler *para* $f'_x(x,y)$ *e* $f'_y(x,y)$, *funções homogéneas de grau* $\alpha-1$, *tem-se:*

(1) $\qquad x f''_{x^2} + y f''_{xy} = (\alpha-1) f'_x$

(2) $\qquad x f''_{xy} + y f''_{y^2} = (\alpha-1) f'_y$

Multiplicando (1) *e* (2) *por* x *e* y, *respectivamente, e somando, obtem-se*

$$x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = (x-1)[\alpha f'_x + y f'_y] = (\alpha-1)\alpha f$$

b) *Designando por* $\varphi(x,y)$ *o primeiro membro da equação, tem-se* $\varphi(1,1)=0$. *As derivadas* $\varphi'_x(x,y)$ *e* $\varphi'_y(x,y)$ *são contínuas em* $P(1,1)$ *e* $\varphi'_y(1,1) \neq 0$. *Estão pois satisfeitas as condições de existência da função* $y(x)$.

A equação da tangente é $\varphi'_x(1,1)(x-1) + \varphi'_y(1,1)(y-1) = 0$ *ou — substituindo* $\varphi'_x(1,1)$ *e* $\varphi'_y(1,1)$ *pelos seus valores e simplificando* — $x+y-2=0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Milicianos — 14-12-1957.

4357 — Resolva os seguintes problemas:

a) Determime a função $f(x)$ tal que $\Delta f(x) = x\ (h=1)$.

b) Utilizando determinantes, concluir que o sistema

$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ x-y+z-t&=2\\ x+y+z+t&=0\\ x+y\qquad+t&=0\\ x-y-z-t&=3 \end{aligned}$$

é impossível. Com equações deste sistema construa outro que seja possível e indeterminado de grau 1. Exprima a última equação como composição linear das três primeiras.

R: a) $f(x)$ *é da forma* ax^2+bx+c. *Então* $f(x+1)-f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2+bx+c) = 2ax + (a+b)$ *e, como* $2ax+(a+b) \equiv x$, *será* $a = \dfrac{1}{2}$ *e* $b = -\dfrac{1}{2} \cdot f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + c$

b) *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

o determinante principal. Como os determinantes característicos não são todos nulos, o sistema é impossível.

É evidente que o sistema

$$\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ x - y + z - t &= 2 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

é possível ($\Delta \neq 0$) *e indeterminado de grau* 1.

Para exprimir a última equação como composição das três primeiras, considere-se o determinante característico correspondente à última equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando os complementos algébricos dos elementos da última coluna, obtem-se $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4$ *e* $\lambda_5 = -4$ *e então* $\lambda_1 (x + y - z + t - 1) + \lambda_2 (x - y + z - t - 2) + \lambda_3 (x + y + z + t) + \lambda_5 (x - y - z - t - 3) = 0$, *o que permite escrever* $x - y - z - t - 3 = (x + y - z + t - 1) + (x - y + z - t - 2) - (x + y + z + t)$.

4358 — *a*) Determinar os máximos e mínimos de $y = a e^{kx} + b e^{-kx}$.

b) Calcular $P\, x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$.

c) Desenvolver em série de Mac Laurin $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

R: a) $y' = a k e^{kx} - k b e^{-kx}$. *a equação* $y' = 0$ *tem por raiz* $x = \dfrac{1}{2k} \log \dfrac{b}{a}$ *que, substituída em* $y'' = a k^2 e^{kx} + k^2 b e^{-kx}$, *dá* $y'' > 0$. *Está-se em presença do mínimo* $\left(\dfrac{1}{2k} \log \dfrac{b}{a}, 2\sqrt{ab}\right)$.

b) $P\, x^2 \cdot \operatorname{arctg} x = \dfrac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3} P \dfrac{x^3}{1 + x^2} = \dfrac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3} P \left(x - \dfrac{x}{x^2 + 1} \right) = \dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \log (x^2 + 1) + C$.

c) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \sum\limits_0^\infty (2^n - 1)\, x^{-(n+1)}$.

4359 — Achar a equação da tangente à curva $y(x)$, definida implicitamente pela equação $f(x, y) = x y^2 - 2 x^2 y - 3 = 0$, na vizinhança de $P(1, -1)$. Provar que $x f'_x + y f'_y \equiv 9$.

R: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1 = \left(- \dfrac{y^2 - 4xy}{2xy - 2x^2} \right)_{(1,-1)} = \dfrac{5}{4}$ *e então a tangente é* $y + 1 = \dfrac{5}{4} (x - 1)$. *Como* $f(x, y) = \Psi(x, y) - 3 = 0$, *com* $\Psi(x, z)$ *homogénea de grau* 3, *tem-se* $x \Psi_x + y \Psi_y \equiv 3 \Psi(x, y)$ *ou* $x f'_x + y f'_y \equiv 9$.

Soluções dos números 4354 a 4359 de Fernando de Jesus.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 1957-1958.

4360 — Ache o limite superior preciso e o limite inferior preciso de Cauchy para o conjunto assim definido:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

As definições dão-se da mesma maneira ainda que os conjuntos não sejam limitados.

4361 — Determine um complexo z tal que 4 das suas raízes de índice 6 satisfaçam à equação $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

4362 — Ache a derivada de $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$.

4363 — Um endomorfismo diz-se normal se comuta com os automorfismos internos. Demonstre que, dado o grupo $\mathfrak{G}$, se ν for endomorfismo normal, $\mathfrak{G}\nu$ é invariante.

4364 — Determine o núcleo do homomorfismo $e^{i\theta} \to e^{ik\theta}$ ($k \to$ inteiro fixo, $\theta \to$ número real).

4365 — Considere o conjunto unido $U = A_1 \cup A_2$; mostre, em seguida, que U se pode escrever como união de dois conjuntos disjuntos.

4366 — Mostre que as transformações definidas pelo sistema $\begin{cases} x' = a x - b y \\ y' = b x + a y \end{cases}$ formam grupo. Os números a e b são variáveis.

4367 — Um endomorfismo dum grupo diz-se normal se comuta com todos os automorfismos internos. Mostrar que o produto de dois endomorfismos normais é um endomorfismo normal.

4368 — Escreva a expressão da derivada da função $y = \arccos x$, suposto y um arco de terceiro quadrante.

4369 — Verifique que a função $Z = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}$ é contínua no ponto $(0, 0)$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 5.ª e 6.ª turmas — 23-6-58.

4370 — Considere as formas lineares $x_1 + x_3$, $2x_2 + x_4$, $x_1 + 2x_2 + 2x_4$, $x_1 + 2x_3 - x_4$, e verifique se há ou não entre elas uma dependência linear. No caso afirmativo, indique quantas são independentes e escreva um sistema máximo de independentes. Justifique o processo.

Nota. A justificação pedida é a parte essencial do problema.

4371 — Considere, no espaço linear R_5, o sub-espaço E de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_2 + 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 - 2\,x_4 + 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

e determine um sub-espaço paralelo a E, de dimensão inferior de uma unidade à dimensão de E e passando pela origem das coordenadas.

4372 — Determine a equação do plano tangente à superfície $x + y + z = \operatorname{sen}(x\,y\,z)$ no ponto $(0,0,0)$ e escreva as equações da normal no mesmo ponto.

4373 — Tome no plano xz, uma elipse de centro na origem dos coordenados e de eixos 2 e 3, respectivamente sobre os eixos $0x$ e $0z$. Depois, tome uma recta do plano yz igualmente inclinada sobre os dois eixos. Escreva a equação do cilindro cuja directriz é a elipse e cujas geratrizes são paralelas à recta dada.

4374 — Determine a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos e\, c\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n^3}} + i\,\frac{(n^2)\,!}{(n+1)\,!}\right]$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 7.ª turma — 4-7-58.**

4375 — Tendo em conta as propriedades dos determinantes, prove, sem cálculos, que

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f_1(y) & \varphi_1(y) & \psi_1(y) \\ f_2(z) & \varphi_2(z) & \psi_2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ f_1'(y) & \varphi_1'(y) & \psi_1'(y) \\ f_2'(z) & \varphi_2'(z) & \psi_2'(z) \end{vmatrix}$$

4376 — Ache o ângulo do plano $Ax + By + Cz + D = 0$ e da recta $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$.

4377 — Considere o espaço a 5 dimensões, de referencial $O_0(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4, \mathfrak{e}_5)$. Em seguida tome os dois pontos $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,0,1,0)$. Escreva, depois, as equações paramétricas da recta que passa pelos dois pontos; e, finalmente, a partir daquelas equações paramétricas, escreva as equações não paramétricas.

4378 — Determine, para uma multiplicidade vectorial a 4 dimensões as equações da sub-multiplicidade definida pelos dois vectores $(1,1,0,1)$ e $(2,0,3,0)$.

4379 — Dada a série convergente de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, determine a natureza da série

$$\sum_{n=a}^{\infty}\left(u_n^2 + i\,u_n\sqrt{2-u_n}\right).$$

Enunciados dos números 4360 a 4379 de F. Almeida e Sá.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º exame de frequência — (2.ª chamada) 1958.**

4380 — Considere dois pontos sobre uma recta de topo um dos quais sobre o segundo bissector. Fixe um terceiro ponto, no segundo bissector, de modo que os três pontos formem um triângulo equilátero no espaço (de preferência, sem LT).

4381 — Considere uma circunferência no plano vertical e uma recta. Determine um ponto de uma superfície gerada por uma recta móvel que encontre perpendicularmente a recta e encontre a circunferência.

4382 — Dado um grupo $\mathfrak{Y}$ defina um novo produto por $a\,|\,b = a b^{-1}$. Mostre que se obtem um grupo se e só se os elementos são de segunda ordem.

4383 — Mostre que, dado um grupo, a totalidade dos elementos de segunda ordem, se for um subgrupo, é invariante.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de Frequência — 1.ª Chamada — 11/1/57.**

4384 — Fracções contínuas: suas definição e periodicidade; tipos de periodicidade e teoremas relativos às fracções contínuas periódicas.

4385 — Exponha o conceito de medida dum conjunto e defina conjuntos mensuráveis.

4386 — Defina a operação de rotação num plano em cálculo vectorial e escreva a equação vectorial de um ponto, com base nessa operacão, em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

4387 — Dada a quádrica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy + x - 1 = 0$$

a) Mostre que tem uma recta de centros a distância infinita.

b) Determine o plano diametral conjugado com a direcção $(1,3,5)$ e mostre que passa pela recta de centros.

c) Classifique a quádrica e escreva uma equação reduzida.

4388 — Prove que a função

$$y = \frac{(ax + b)}{(x^2 - 2Bx + C)}$$

sendo a, b, B, C constantes, converte em identidade a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{x^2 - 2Bx + C}{2} + 2(x - B)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Deduza desta relação que

$$\frac{x^2 - 2Bx + C}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}} + \frac{2(x-B)}{n+1} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 18/1/57.

4389 — Defina conjuntos conexos e conjuntos perfeitos e enuncie as propriedades que respeitam aos conjuntos conexos.

4390 — Defina versor dum vector e indique a expressão dum vector em função do seu versor; vectores fundamentais: sua definição e aplicação à expressão de um vector e do produto externo de dois vectores.

4391 — Defina infinitamente pequeno e ordem dum infinitamente pequeno; escreva a expressão geral dum infinitamente pequeno de ordem n e defina a parte principal e parte complementar dum tal infinitamente pequeno.

4392 — Dada a quádrica

$$x^2 + y^2 = ax + myz \quad (a, m \neq 0)$$

a) Determine o plano tangente π na origem das coordenadas e a direcção do espaço cujo plano diametral conjugado em relação à quádrica é paralelo a π.

b) Classifique a quádrica e verifique que a sua natureza não depende dos parâmetros a e m.

Determine as geratrizes da superfície que passam pela origem, se existirem.

c) Haverá alguns valores dos parâmetros para os quais a superfície seja de revolução? Escreva uma equação reduzida da quádrica.

4393 — Dada a expressão diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y$$

mude as variáveis x, y em u, v, sabendo que as equações de ligação são

$$x = u^2 + v^2$$
$$y = u^2 - v^2$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — Exame Final — I grupo — (2.ª chamada) — 24-6-57.

4394 — Defina contacto de ordem n entre duas superfícies, deduza as condições analíticas para um tal contacto; defina conceito de osculação para a superfície e aplique-o ao caso de uma das superfícies ser um plano.

4395 — Escreva a equação vectorial das superfícies regradas, indique o significado das grandezas que nela figuram, defina superfícies empenadas e a sua linha de estrição e enuncie a lei de Charles que respeita a tais superfícies.

4396 — Indique como se calcula o volume de sólidos limitados por superfícies de revolução, deduzindo a fórmula correspondente; indique se conhece outros casos em que a aplicação do raciocínio empregado pode conduzir a simplificação do cálculo do volume de sólidos que neles se consideram.

4397 — Defina equações diferenciais simultâneas; indique como os sistemas de tais equações se podem obter a partir dum sistema dado de equações que contenha constantes arbitrárias. Considere o caso particular dum sistema de duas equacões diferenciais de 1.ª ordem e defina o seu sistema de I. G., sistemas de I. particulares e sistemas de I. singulares, quando existam.

4398 — Dada a curva de equação $y^3(2x - a) + a^2x^2 - x^4 = 0$, onde a é uma constante, determine os seus pontos singulares com excepção dos seus pontos de inflexão.

4399 — Calcule $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

4400 — Calcule $\iint_A (y^2 + 2xy + x^2)\, dx\, dy$ onde A é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 0)$ referidos ao sistema de eixos cartesianos ortogonais.

4401 — Ache todos os integrais da equação diferencial $2xy\,dx + (3y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final — 1.º Grupo — Junho 1958.**

4402 — Calcule

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)(x^2+1)}$$

4403 — Determine a solução geral da equação diferencial:

$$(1-x+y)\,dx+(x+1)\,dy=0\,.$$

4404 — Calcule o volume da região do espaço limitado pelas superfícies: $z=0\,,y=1\,,y=x^2\,,z=x^2+y^2$.

4405 — Determine as assíntotas de

$$x^4-x^2y^2+2x^2y+4y^2+3x=0\,.$$

4406 — Defina uma curva torsa num ponto e escreva nas formas vectorial ec artesiana as fórmulas de Frenet e Serret, indicando o significado das grandezas que nelas entram.

4407 — Escreva a equação vectorial das superfícies regradas e indique o significado das grandezas que nela figuram. Defina superfícies empenadas e sua linha de estrição. Enuncie a lei de Chasles a respeito de tais superfícies.

4408 — Defina contacto de ordem n entre 2 superfícies, escreva a condição analítica para tal contacto. Defina o conceito de osculação que lhe diz respeito e restricto ao caso duma das superfícies ser um plano.

4409 — Enuncie os tipos de equações diferenciais susceptíveis de abaixamento de ordem. Indique como se consegue o abaixamento de ordem nos dois tipos de equações homogéneas, aplicando os respectivos processos às equações de 2.ª ordem.

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **1.º Exame de Frequência — 27-3-57.**

4410 — Diga o que é a relação de inclusão entre conjuntos e quais as suas propriedades.

Quais são as sucessões monótonas e seus limites?

Defina classe aditiva de conjuntos. Porque é que os conjuntos de medida $(\mathcal{L})$ nula não constituem uma classe aditiva?

Defina espaço $(\mathcal{D})$ e prove que o espaço $\mathcal{R}_n$ é um espaço $(\mathcal{D})$.

Demonstre que o diâmetro dum conjunto limitado de $\mathcal{R}_1$ é a diferença entre os limites superior e inferior de Weierstrass.

4411 — Demonstre que uma função monótona limitada num intervalo finito é de variação limitada.

Defina integral no sentido de Lebesgne. Estabeleça a desigualdade de Schwarz.

Se $f(x)$ é limite duma sucessão $f_n(x)$ de funções definidas e uniformemente limitadas dum modo global num conjunto $\mathcal{C}$ nensurável, demonstre que:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\int_{\mathcal{C}} f_n(x)\,dx$$

Exprimindo a derivada $f'(x)$ como limite duma conveniente sucessão de funções, prove que a derivada duma função nensurável num intervalo finito é função nensurável e, portanto, integrável nesse intervalo.

4412 — Considere uma função vectorial de variável vectorial; defina diferença finita, considere-lhe as componentes diferenciáveis e defina a derivada.

O que é espaço produto de dois espaços cartesianos? Dê exemplos.

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **Exame final — 1.ª chamada — 16-7-57.**

4413 — Estude a convergência do integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x\,dx$$

R: *Tem-se*

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p \cos^\alpha x=$$

$$=\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

quando $p=\alpha$

Então, por definição de limite, vem

$$0<1-\delta<\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p \cos^\alpha x<1$$

quando $$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leqslant x<\frac{\pi}{2}$$

e daqui se tira, sucessivamente

$$\cos^\alpha x<\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p}\quad ,0<\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon'}\cos^\alpha x\,dx<$$

$$<\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon'}\frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p}$$

Mas, fixado aquele ε *e fazendo tender* ε' *para zero, tem-se a convergência do último integral, para limite finito, sempre que* $p<1$. *Conclui-se a convergência do integral proposto sempre que* $\alpha<1$.

4414 — Primitive a função

$$f(x)=\frac{\operatorname{artg}\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}$$

R: *Primitivando por partes, vem:*

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+1)^2}\,dx=-\frac{\operatorname{artg}\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}+$$

$$+\int\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}}{1+x^2+2x-3}\,dx=-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}+$$

$$+\int\frac{dx}{(x^2+2x-2)\sqrt{x^2+2x-3}}\,.$$

A função integranda está definida em $(-\infty,3)$ *e* $(1,+\infty)$, *isto é, fora do intervalo fechado* $(-3,1)$ *dos zeros de* x^2+2x-3. *A primitiva que se procura será válida visto que os zeros de* $x+1$ *e de* x^2+2x-2, *caiem dentro do intervalo* $(-3,1)$.

Tem-se

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x-2)\sqrt{x^2+2x-3}}=$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{[(x+1)^2-3]\sqrt{(x+1)^2-4}}=\int\frac{dt}{(t^2-3)\sqrt{t^2-4}}$$

A substituição indicada por $\sqrt{t^2-4}=(t+2)\,u$, *ou melhor:* $t=\dfrac{2(1+u^2)}{1-u^2}$ *e cuja derivada é* $\dfrac{dt}{du}=8\dfrac{u}{(1-u^2)^2}$ *é decrescente em* $(-\infty,0)$ *e crescente em* $(0,+\infty)$; *admite duas inversas, perfeitamente definidas em* $(-\infty,-2)$ *e* $(2,+\infty)$; *há, por tanto, uma inversa fora do intervalo* $(-3,1)$ *onde se procura a primitiva. Efectuada a substituição, vem*

$$\int\frac{dt}{(t^2-3)\sqrt{t^2-4}}=$$

$$=\int\frac{8\frac{u}{(1-u^2)^2}du}{\left[4\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}-3\right]\left[2\frac{1+u^2}{1-u^2}+2\right]u}=$$

$$=\int\frac{8(1-u^2)\,du}{[4(1+u^2)^2-3(1-u^2)^2]\,[2(1+u^2)+2(1-u^2)]}=$$

$$=\int\frac{2(1-u^2)\,du}{[2(1+u^2)-\sqrt{3}(1-u^2)]\,[2(1+u^2)+\sqrt{3}(1-u^2)]}=$$

$$=\int\frac{2(1-u^2)\,du}{(a+bu^2)\,(b+au^2)}$$

onde se pôs $a=2-\sqrt{3}$ e $b=2+\sqrt{3}$. *O método dos coeficientes indeterminados é aconselhável para obter a decomposição em duas fracções; deve notar-se que a fracção a decompor não se altera mudando* u *em* $-u$; *vem*

$$\int\frac{2(1-u^2)\,du}{(a+bu^2)\,(b+au^2)}=\int\frac{M_1\,du}{a+b\,u^2}+\int\frac{M_2\,du}{b+a\,u^2}$$

onde

$$M_1=\frac{2}{a+b}=\frac{1}{2}\ \ e\ \ M_2=\frac{2}{a-b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Em seguida, vem

$$\int\frac{M_1\,du}{a+b\,u^2}=\frac{M_1}{\sqrt{a\,.\,b}}\int\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\,du}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,u\right)^2}\,;$$

$$\int\frac{M_2\,du}{b+a\,u^2}=\frac{M_2}{\sqrt{a\cdot b}}\int\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,du}{1+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\,u\right)^2}$$

e portanto

$$\int \frac{2(1-u^2)\,du}{(a+bu^2)(b+au^2)} = \frac{M_1}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{b}{a}}\,u + \frac{M_2}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{a}{b}}\,u\,.$$

Finalmente

$$\int \frac{arctg\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{arctg\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} + \frac{1}{2}\,arctg(2+\sqrt{3})\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg(2-\sqrt{3})\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+3} + C\,.$$

4415 — Calcule $\int_\Gamma x\,dy$ sendo Γ a fronteira do domínio limitado por

$$x^2+y^2=R^2\,,\ x^2+y^2=r^2\,,\ y=m_1x\,,\ y=m_2x \qquad (R>r\,;\ m_1>m_2>0)\,.$$

Interprete geomètricamente o valor de $\int_\Gamma x\,dy$, com o auxílio das fórmulas de RIEMANN.

R: *O domínio de que se fala no enunciado é formado por duas regiões simètricamente dispostas em relação à origem, determinadas pelas duas rectas na corôa circular; a curva* Γ *decompõe-se em dois circuitos fechados e, se um ponto* $P(x,y)$ *descreve no sentido directo o que está no 1.º quadrante, o simétrico* $P'(-x,-y)$ *descreverá no sentido directo o do 3.º quadrante; o produto* $x\,dy$ *tem o mesmo sinal sobre os dois circuitos e, deduz-se que*

$$\int_\Gamma x\,dy = 2\int_{\Gamma'} x\,dy$$

onde Γ' *é o circuito fechado do 1.º quadrante. Posto isto, tem-se*

$$\int_{\Gamma'} x\,dy = \int_{+\frac{m_1 R}{\sqrt{m_1^2+1}}}^{+\frac{m_1 r}{\sqrt{m_1^2+1}}} \frac{y}{m_1}\,dy + \int_{arctg\,m_1}^{arctg\,m_2} r^2\cdot\cos^2\alpha\cdot d\alpha + \int_{+\frac{m_2 r}{\sqrt{m_2^2+1}}}^{+\frac{m_2 R}{\sqrt{m_2^2+1}}} \frac{y}{m_2}\,dy + \int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1} R^2\cdot\cos^2\alpha\cdot d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2m_1}\left[\frac{m_1^2r^2}{1+m_1^2} - \frac{m_1^2R^2}{1+m_1^2}\right] + \frac{1}{2m_2}\left[\frac{m_2^2R^2}{1+m_2^2} - \frac{m_2^2r^2}{1+m_2^2}\right] + (R^2-r^2)\int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1}\cos^2\alpha\cdot d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(R^2-r^2)\left[\frac{m_2}{1+m_2^2} - \frac{m_1}{1+m_1^2}\right] + (R^2-r^2)\int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1}\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(R^2-r^2)\left[\frac{m_2}{1+m_2^2} - \frac{m_1}{1+m_1^2}\right] + \frac{(R^2-r^2)}{2}\left[arctg\,m_1 - arctg\,m_2 + \frac{1}{2}(sen\,2\alpha)_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1}\right]$$

Notando que os arcos α_1 *e* α_2 *cujas tangentes são* m_1 *e* m_2 *pertencem ao 1.º quadrante e, notando ainda que se* $m=tg\,\alpha$, *se tem* $\frac{1}{1+m^2}=\cos^2\alpha$, $\frac{m^2}{1+m^2}=sen^2\alpha$, *vem*

$$\frac{1}{4}\Big[sen\,2\alpha\Big]_{\alpha_2}^{\alpha_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1}{1+m_1^2} - \frac{m_2}{1+m_2^2}\right]$$

Resulta, então

$$\int_{\Gamma'} x\,dy = \frac{1}{2}(R^2-r^2)\,[arctg\,m_1 - arctg\,m_2]\,.$$

4406 — Calcular os máximos e mínimos da função $x(y,z)$ definida por

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0\,.$$

R: *Para a função* $x(y,z)$ *ter extremo deverá anular-se a matriz iacobiana*

$$J = \left[\frac{\partial x}{\partial y}\ \frac{\partial x}{\partial z}\right].$$

Supondo que a equação dada define $x(y, z)$, *derivando parcialmente em ordem a* y (x *dependente*, y *e* z *independentes*), *vem:*

$$2x\frac{\partial x}{\partial z} + 2z - 2\frac{\partial x}{\partial z} + 2 = 0 \quad \textit{donde} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z+1}{x-1}.$$

A equação define $x(y, z)$ *em todo o ponto* $P(0, b, c)$ *onde* $x - 1 \neq 0$; *o valor da função é dado por* $x^2 + b^2 + c^2 - 2x - 4b + 2c + 5 = 0$; *são, portanto duas as funções* $x(y, z)$ *de que se procuram os extremos.*

Para qualquer das funções $x(y, z)$ *definidas implicitamente pela equação é nula a matriz iacobiana em* $y = 2, z = -1$. *Neste ponto as funções têm valores distintos* $(x^2 + 4 + 1 - 2x - 8 - 2 + 5 = 0)$.

$$x_1(2, -1) = 0 \qquad x_2(2, -1) = 2$$

e ambos estes valores, não anulam $x - 1$. *As matrizes hesseanas*

$$H_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

devido aos valores

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{-(x-1) - (2-y)\dfrac{\partial x}{\partial y}}{(x-1)^2} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{x - 1 - (z+1)\dfrac{\partial x}{\partial z}}{(x-1)^2} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} = -1 \end{cases}$$

transformam-se em

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para a função $x_1(y, z)$ *tem-se no ponto* $(2, -1)$ $d_H x_1 = 0$, $d_H^2 x_1 = H H_1 H^* > 0$.

Para a função $x_2(y, z)$ *tem-se:* $d_H x_2 = 0$, $d_H^2 x_2 = H H_2 H^* < 0$.

A função x_1 *tem em* $(2, -1)$ *um mínimo igual a zero.*
A função x_2 *tem em* $(2, -1)$ *um máximo igual a dois.*
A confirmar estes resultados, tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 1 = 0.$$

A equação dada representa uma esfera de raio um e centro em $(1, 2 - 1)$.

As funcões $x_1(y, z)$ *e* $x_2(y, z)$ *são relativas ás duas semi-esferas que se obtêm com o plano* $x - 1 = 0$; *elas estão definidas no interior do círculo* $(y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. *A função* $x_1(y, z)$ *cuja imagem é a semi-esfera da esquerda, tem mínimo igual a zero, no centro do seu domínio; a função* $x_2(y, z)$ *tem o máximo no mesmo ponto.*

CRÍTICA DE LIVROS

O livro único de Algebra — 3.º ciclo

A aprovação, como livro único, do *Compêndio de Álgebra* da autoria de J. Sebastião e Silva e J. D. da Silva Paulo é, em meu entender, um facto de tal interesse para a vida escolar liceal que a Gazeta de Matemática não pode deixar de assinalar a sua importância.

Quis o acaso que fosse eu o primeiro colaborador desta revista a referir-se ao *Compêndio.* Noto, de passagem, esta circunstância, para recordar que fui eu também quem se encarregou, dentro da Gazeta de Matemática, da crítica ao livro único que precedeu este no exercício das suas funções. Fiel a uma posição que, então como agora, procura o máximo de independência, é com muito gosto que felicito os Autores e os Juízes desta obra, em contrastante atitude, com a outra que tomei, há anos, nas condições já recordadas.

É minha intenção publicar, nestas páginas, uma análise da segunda parte do Compêndio. Neste número, vou referir-me apenas à primeira parte, relativa ao programa do 6.º ano; de resto, é este o sector em que mais vivamente se fazia sentir a necessidade de um bom livro de texto, já porque alguns dos seus assuntos são delicados e fundamentais já porque nada existia em livros didácticos portugueses, ao nível liceal, que pudesse considerar-se satisfatório.

Ainda antes de ser tomada uma decisão oficial, escrevi um comentário crítico que se restringiu tam-