Supondo que a equação dada define x (y , z) , *derivando parcialmente em ordem a* y (x *dependente,* y *e* z *independentes*) , *vem :*

$$2x\frac{\partial x}{\partial z}+2z-2\frac{\partial x}{\partial z}+2=0 \quad \textit{donde} \quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{z+1}{x-1}.$$

A equação define x (y , z) *em todo o ponto* P (0 , b , c) *onde* $x-1\neq 0$; *o valor da função é dado por* $x^2+b^2+c^2-2x-4b+2c+5=0$; *são, portanto duas as funções* x (y , z) *de que se procuram os extremos.*

Para qualquer das funções x (y , z) *definidas implicitamente pela equação é nula a matriz iacobiana em* $y=2, z=-1$. *Neste ponto as funções têm valores distintos* $(x^2+4+1-2x-8-2+5=0)$.

$$x_1(2,-1)=0 \qquad x_2(2,-1)=2$$

e ambos estes valores, não anulam $x-1$. *As matrizes hesseanas*

$$H_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y\,\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\end{bmatrix} \qquad H_2=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y\,\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}\end{bmatrix},$$

devido aos valores

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{-(x-1)-(2-y)\dfrac{\partial x}{\partial y}}{(x-1)^2}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}=1\\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2}=-1\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}=0 \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{x-1-(z+1)\dfrac{\partial x}{\partial z}}{(x-1)^2}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}=1\\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}=-1\end{cases}$$

transformam-se em

$$H_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad H_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Para a função $x_1(y,z)$ *tem-se no ponto* $(2,-1)$ $d_H x_1=0$, $d_H^2 x_1=H H_1 H^*>0$.

Para a função $x_2(y,z)$ *tem-se:* $d_H x_2=0$, $d_H^2 x_2=H H_2 H^*<0$.

A função x_1 *tem em* $(2,-1)$ *um mínimo igual a zero.*
A função x_2 *tem em* $(2,-1)$ *um máximo igual a dois.*
A confirmar estes resultados, tem-se :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4+(z^2+2z+1)-1+5=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2-1=0.$$

A equação dada representa uma esfera de raio um e centro em $(1,2-1)$.

As funcões $x_1(y,z)$ *e* $x_2(y,z)$ *são relativas ás duas semi-esferas que se obtêm com o plano* $x-1=0$; *elas estão definidas no interior do circulo* $(y-2)^2+(z+1)^2=1$. *A função* $x_1(y,z)$ *cuja imagem é a semi-esfera da esquerda, tem mínimo igual a zero, no centro do seu domínio ; a função* $x_2(y,z)$ *tem o máximo no mesmo ponto.*

CRÍTICA DE LIVROS

O livro único de Algebra — 3.º ciclo

A aprovação, como livro único, do *Compêndio de Álgebra* da autoria de J. Sebastião e Silva e J. D. da Silva Paulo é, em meu entender, um facto de tal interesse para a vida escolar liceal que a Gazeta de Matemática não pode deixar de assinalar a sua importância.

Quis o acaso que fosse eu o primeiro colaborador desta revista a referir-se ao *Compêndio*. Noto, de passagem, esta circunstância, para recordar que fui eu também quem se encarregou, dentro da Gazeta de Matemática, da crítica ao livro único que precedeu este no exercício das suas funções. Fiel a uma posição que, então como agora, procura o máximo de independência, é com muito gosto que felicito os Autores e os Juízes desta obra, em contrastante atitude, com a outra que tomei, há anos, nas condições já recordadas.

É minha intenção publicar, nestas páginas, uma análise da segunda parte do Compêndio. Neste número, vou referir-me apenas à primeira parte, relativa ao programa do 6.º ano ; de resto, é este o sector em que mais vivamente se fazia sentir a necessidade de um bom livro de texto, já porque alguns dos seus assuntos são delicados e fundamentais já porque nada existia em livros didácticos portugueses, ao nível liceal, que pudesse considerar-se satisfatório.

Ainda antes de ser tomada uma decisão oficial, escrevi um comentário crítico que se restringiu também ao primeiro volume. Esse comentário foi publicado há pouco no boletim de um colégio onde sou professor (*). Porque, de então para cá, não reconheci necessidade de qualquer alteração ao trabalho realizado, limitar-me-ei, por agora, a fazer a transcrição quase total desse comentário.

«A debilidade da nossa literatura didáctica, que corresponde talvez à pobreza da nossa cultura universitária (salvo uma ou outra excepção de universitários cultos, poder-se-à falar de cultura universitária em Portugal?) faz com que inicie geralmente a leitura de qualquer compêndio em atitude de desconfiança e cepticismo e quase sempre verifico, *à posteriori*, a exactidão da atitude preconcebida. Com o livro presente não se passou o mesmo, porque a categoria dos autores e o conhecimento que deles já tinha como professores eram suficiente garantia de autenticidade e seriedade do seu trabalho: o Prof. Sebastião e Silva, cuja obra matemática ultrapassa as fronteiras do nosso país, pois, além doutras importantes contribuições no *front* da actual investigação matemática, liga o seu nome à construção da moderníssima *Teoria das Distribuições* e, a par da sua intervenção nos domínios da criação científica, tem lutado por uma actualização sensata mas progressiva do Ensino da Matemática em Portugal; e J. D. da Silva Paulo que, entre outras actividades, pode orgulhar-se de ser co-autor de uma *Aritmética Racional* que marca tambem uma época nas nossas publicações liceais e de ser um dos fundadores da *Gazeta de Matemática* à qual sempre tem prestado interessante colaboração.

Foi portanto com fortes razões de simpatia que me aproximei desta obra. De modo algum fiquei desiludido ao acabar a sua leitura: pelo contrário, posso afirmar que este livro ultrapassou toda a espectativa. Na verdade, nele se aliam uma exposição rigorosa, isenta de quaisquer deficiências doutrinárias, e qualidades de clareza e simplicidade que tornam a leitura mais que sugestiva e atraente, porque, por vezes, merece o qualificativo «aliciante» (cito, por exemplo, algumas das notas de introdução aos diferentes capítulos e todas as notas históricas contidas no volume).

* * *

Seguindo a ordem dos programas, o livro abre com um capítulo referente à *Evolução do conceito de número*. Os autores, numa exposição coerente e clara, utilizam fundamentalmente o princípio de conservação das regras de cálculo. É particularmente interessante, de um ponto de vista elementar, o estudo dos números irracionais através das dízimas, o que permitiu uma ligeira mas utilíssima introdução à técnica de cálculo numérico aproximado, de que no fim do capítulo há exemplos propostos, bastante elucidativos. Relativamente a este assunto apenas me ocorre uma observação: por que razão os Autores, a par da demonstração de que «as dízimas infinitas que representam números racionais são sempre periódicas», não fizeram a demonstração da proposição recíproca?

Tratava-se apenas de uma aplicação curiosa e simples da noção de limite de uma sucessão e, desta forma, o corpo de doutrina relativo às dízimas ficaria mais consistente.

O Capítulo 2.º — *Números complexos* — mantém o alto nível da exposição. Embora, em um outro passo, se torne menos fácil a compreensão de certas ideias, não pode escapar ao leitor atento a preocupação de estabelecer um todo coerente. E, como sempre, os Autores atingem o objectivo. Impõe-se, no entanto, uma pergunta: para que deixar reservada ao 2.º volume (7.º ano) a demonstração de que «todo o número complexo não nulo tem duas e só duas raízes quadradas»? Se não houve outras razões que não fossem a de evitar a resolução de uma equação biquadrada, podia ter-se seguido o critério da pág. 84, onde se considera a equação biquadrada como caso especial de uma equação do 2.º grau. Desta maneira, o assunto ficava definitivamente arrumado no lugar mais indicado para o fazer.

O capítulo 3.º — *Funções reais de variável real* — é admirável. Entre outros aspectos interessantes saliento a distinção estabelecida entre a classificação de expressões analíticas e a de funções e o paralelismo apontado com o que se passa no domínio numérico. Que diferença entre tudo isto e aquilo a que estávamos habituados!

O mesmo podemos afirmar quanto ao capítulo 4.º — *limites de sucessões* —, em que o rigor, a clareza e a sobriedade são características de tal modo evidentes que tornam pouco possível melhor realização. Além de tudo, o capítulo apresenta no final um conjunto de questões propostas que muito esclarecem a matéria nele versada.

O capítulo 5.º — *limites de funções de variável real* — é também um modelo do que pode e deve fazer-se, a este respeito, no ensino liceal. Abandona-se, inteiramente, a definição de limite segundo Cauchy, através do jogo de $\delta\delta$ e $\varepsilon\varepsilon$ e utiliza-se, por sistema, a orientação de Heine que recorre apenas às sucessões. Foi pena que o texto não incluísse a resolução de questões do tipo de algumas das propostas no final (por ex., as questões 15 e 16), o que tornava mais completa a compreensão das noções apresentadas.

O capítulo 6.º — *Funções contínuas* — é curto mas

(*) Boletim da Academia Cultural de João de Deus, n.º 38, Março de 1958.

incisivo. Parece-me, apesar de tudo, que uma exemplificação mais vasta, mesmo através de funções definidas gràficamente, podia alargar o alcance da exposição.

O capítulo 7.º — *Derivadas* —, que começa por uma introdução claríssima, é exposto com todo o cuidado. Em particular, é de assinalar a distinção feita entre o que é consequência lógica de princípios e o que se admite, sem demonstração (**) por considerações de ordem intuitiva. Quero destacar também o interesse posto em relacionar a doutrina do capítulo com questões de Cinemática que, salvo erro, são estudadas, em Física, no próprio 6.º ano.

Passando ao capítulo 8.º — *Polinómios numa variável* —, verifiquei que está exposto na justa medida do que pode interessar a alunos do ensino liceal. Uma vez que foi posto de lado o caso da existência de raízes múltiplas, quase todas as demonstrações assumem um carácter de extrema simplicidade. Impunha-se, no entanto, uma referência às raízes múltiplas que é feita só na 2.ª edição da obra mas através de uma nota pertinente.

O livro termina com o estudo de *Fracções algébricas*. Neste capítulo, depois de uma breve mas rigorosa exposição sobre o que há de essencial em cálculo operatório, é dada uma lição magistral referente a símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação.

Podem alunos e professores do ensino liceal considerar-se de parabéns por terem ao seu alcance uma obra magnífica que muito deve ajudar uns e outros. Oxalá todos saibamos aproveitá-la!»

Laureano Barros

(**) Os Autores não deixam, evidentemente, de se referir à possibilidade de demonstração rigorosa em estudos superiores.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

123 — Carl B. Boyer — **History of Analytic Geometry** — *The Scripta Mathematica Studies* — n.os 6/7 — *Scripta Mathematica*. New York, 1956.

Em qualquer obra dedicada à História da Matemática, necessàriamente se faz referência à Geometria Analítica; em especial, determinados trabalhos destinam-se particularmente a aspectos bem definidos de alguns capítulos ou ramos da Matemática. O desenvolvimento histórico da Geometria Analítica, considerado como um todo, apenas, porém, por duas vezes foi encarado: de ambas as vezes por Gino Loria e em revistas de matemática — em 1923 nos *Memorie dei Lincei* e em 1942-45 na revista romena *Mathematica*.

Devemos no entanto dar relevo especial à obra do nosso Gomes Teixeira, premiada em 1899 pela Academia das Ciências de Madrid, publicada em 1905 em espanhol e mais tarde em 2.ª edição, muito aumentada, em francês, integrada nas suas *Obras sobre Mathematica: Tratado das Curvas Especiais Notáveis*.

Aqui, diz Gomes Teixeira, «comme dans l'édition précédente nous étudions la forme, la construction, la rectification et la quadrature, les propriétés et l'histoire de chaque courbe»; aqui, o nosso compatriota atinge grau de notável desenvolvimento no que respeita a qualquer dos aspectos a que atrás faz referência. Parece portanto justo classificar-se a obra de Gomes Teixeira como uma enciclopédia das curvas planas e torsas que, no que respeita à parte histórica, contribui notàvelmente para o conhecimento da evolução e desenvolvimento dos métodos da análise matemática no estudo das curvas.

Presentemente a Scripta Mathematica nas suas publicações «Studies» inclui uma obra do Prof. Boyer que nos parece notàvelmente original pelo seu objectivo bem definido — História da Geometria Analítica.

No seu livro, o Prof. Boyer começa por dizer que a origem da associação de relações numéricas com configurações espaciais é pré-histórica e encontra para justificá-lo as primeiras contribuições na ciência do Egipto, Caldea, China, Índia, etc.

Toda a matemática grega está impregnada da ideia da equivalência — configuração geométrica ~ relação numérica — e tal facto está largamente explorado pelo Autor em dois capítulos com cerca de 40 págs. — Cap. I — As primeiras contribuições, cap. I — A idade Alexandrina.

Mas é pròpriamente com o despontar da Idade Moderna que a Geometria Analítica toma corpo de doutrina; e o Autor da presente obra é na realidade exaustivo ao analisar cinco séculos de desenvolvimento e evolução dum ramo de ciência riquíssima em aspectos, perspectivas e aplicações, como é a Matemática.

No Cap. III (12 págs), procura nas civilizações árabe, bizantina e industânica as origens das ideias e obras dos primeiros anos do período moderno