incisivo. Parece-me, apesar de tudo, que uma exemplificação mais vasta, mesmo através de funções definidas gràficamente, podia alargar o alcance da exposição.

O capítulo 7.º — *Derivadas* — , que começa por uma introdução claríssima, é exposto com todo o cuidado. Em particular, é de assinalar a distinção feita entre o que é consequência lógica de princípios e o que se admite, sem demonstração (**) por considerações de ordem intuitiva. Quero destacar também o interesse posto em relacionar a doutrina do capítulo com questões de Cinemática que, salvo erro, são estudadas, em Física, no próprio 6.º ano.

Passando ao capítulo 8.º — *Polinómios numa variável* — , verifiquei que está exposto na justa medida do que pode interessar a alunos do ensino liceal. Uma vez que foi posto de lado o caso da existência de raízes múltiplas, quase todas as demonstrações assumem um carácter de extrema simplicidade. Impunha-se, no entanto, uma referência às raízes múltiplas que é feita só na 2.ª edição da obra mas através de uma nota pertinente.

O livro termina com o estudo de *Fracções algébricas*. Neste capítulo, depois de uma breve mas rigorosa exposição sobre o que há de essencial em cálculo operatório, é dada uma lição magistral referente a símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação.

Podem alunos e professores do ensino liceal considerar-se de parabéns por terem ao seu alcance uma obra magnífica que muito deve ajudar uns e outros. Oxalá todos saibamos aproveitá-la!»

Laureano Barros

(**) Os Autores não deixam, evidentemente, de se referir à possibilidade de demonstração rigorosa em estudos superiores.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

123 — Carl B. Boyer — **History of Analytic Geometry** — *The Scripta Mathematica Studies* — n.ºs 6/7 — *Scripta Mathematica*. New York, 1956.

Em qualquer obra dedicada à História da Matemática, necessàriamente se faz referência à Geometria Analítica; em especial, determinados trabalhos destinam-se particularmente a aspectos bem definidos de alguns capítulos ou ramos da Matemática. O desenvolvimento histórico da Geometria Analítica, considerado como um todo, apenas, porém, por duas vezes foi encarado: de ambas as vezes por Gino Loria e em revistas de matemática — em 1923 nos *Memorie dei Lincei* e em 1942-45 na revista romena *Mathematica*.

Devemos no entanto dar relevo especial à obra do nosso Gomes Teixeira, premiada em 1899 pela Academia das Ciências de Madrid, publicada em 1905 em espanhol e mais tarde em 2.ª edição, muito aumentada, em francês, integrada nas suas *Obras sobre Mathematica: Tratado das Curvas Especiais Notáveis*.

Aqui, diz Gomes Teixeira, «comme dans l'édition précédente nous étudions la forme, la construction, la rectification et la quadrature, les propriétés et l'histoire de chaque courbe»; aqui, o nosso compatriota atinge grau de notável desenvolvimento no que respeita a qualquer dos aspectos a que atrás faz referência. Parece portanto justo classificar-se a obra de Gomes Teixeira como uma enciclopédia das curvas planas e torsas que, no que respeita à parte histórica, contribui notàvelmente para o conhecimento da evolução e desenvolvimento dos métodos da análise matemática no estudo das curvas.

Presentemente a Scripta Mathematica nas suas publicações «Studies» inclui uma obra do Prof. Boyer que nos parece notàvelmente original pelo seu objectivo bem definido — História da Geometria Analítica.

No seu livro, o Prof. Boyer começa por dizer que a origem da associação de relações numéricas com configurações espaciais é pré-histórica e encontra para justificá-lo as primeiras contribuições na ciência do Egipto, Caldea, China, Índia, etc.

Toda a matemática grega está impregnada da ideia da equivalência — configuração geométrica ~ relação numérica — e tal facto está largamente explorado pelo Autor em dois capítulos com cerca de 40 págs. — Cap. I — As primeiras contribuições, cap. I — A idade Alexandrina.

Mas é pròpriamente com o despontar da Idade Moderna que a Geometria Analítica toma corpo de doutrina; e o Autor da presente obra é na realidade exaustivo ao analisar cinco séculos de desenvolvimento e evolução dum ramo de ciência riquíssima em aspectos, perspectivas e aplicações, como é a Matemática.

No Cap. III (12 págs), procura nas civilizações árabe, bizantina e industânica as origens das ideias e obras dos primeiros anos do período moderno

(Cap. IV, 20 págs.). Como portugueses lamentamos sinceramente que a obra de PEDRO NUNES seja tão pouco conhecida e que no caso presente só de relance e, referindo-se nomeadamente a BERNOULLI o Autor tenha escrito: (DÜRER) «introduced the idea of an asymptotic point and illustrated it by a curve strongly resembling the logaritmic spiral. This curve, later made famous by JACQUES BERNOULLI, may have been suggested by the revived interest at the time in map construction; it is the plane stereographic projection of the loxodrome on the sphere, and the latter was studied in 1530 by NÚÑEZ (1502-1578)». Atribuimos o nome escrito em espanhol ao facto de a sua última obra, *Livro de Álgebra,* ter sido publicada em língua castelhana em 1567; obra que convinha, por seu lado, considerar em particular pela profunda influência que teve no pleno desabrochar da Geometria Analítica.

Os trabalhos de FERMAT e DESCARTES merecem ao Autor no Cap. V e em 30 págs. longas considerações e análise pormenorizada de conceitos originais e críticas actuais aos mesmos conceitos.

As reacções de certos matemáticos do século XVII à nova geometria só lhe vem dar força e apoio — Cap. VI (35 págs) e os métodos da Análise desde o cálculo integral de NEWTON e LEIBNIZ até a representação paramétrica das curvas, sistematizada por EULER, são largamente comentadas nas suas relações com a Geometria Analítica — Cap. VII (55 págs). No Cap. VI faz-se referência, em nota de fim de página à obra atrás citada de GOMES TEIXEIRA.

O Autor termina o livro com dois capítulos — VIII — A formulação definitiva (32 págs.) e IX — A idade de Ouro (43 págs.).

Estas 75 páginas são bem aproveitadas com a análise minuciosa das ideias e conceitos que surgiram e se desenvolveram durante dois séculos, desde d'ALEMBERT até os nossos dias.

Consideramos que em qualquer descrição histórica da evolução de uma ciência, nomeadamente da Matemática, o expositor deve dar o devido relevo que a influência do ambiente da vida social exerce em cada momento sobre as ideias criadoras, e consequente evolução da mesma Ciência. O Autor parece partilhar das mesmas considerações, ou pelo menos afirma não desconhecer que haja quem as defenda; no entanto «a esta regra geral parece haver várias excepções» diz, «and the discovery of analytic geometry certainly seems to be one of the exceptions». Permitimo-nos discordar. O completo historiador é aquele que, além do mais, consegue descobrir as causas de origem social dos fenómenos históricos. Neste ponto portanto consideramos que a obra não atinge o seu objectivo histórico. No resto, porém, pensamos que se trata de trabalho de excepcional valor tanto na descrição das relações dos diversos estados da Geometria Analítica em relação com os restantes ramos da Matemática como pela extensa bibliografia apresentada no fim do volume. É portanto obra que recomendamos vivamente a todo o estudioso da Matemática e julgamos necessária em qualquer biblioteca pública.

J. G. T.

124 — J. CHINTSCHIN — **Mathematische grundlagen der Quantenstatistik** —Akademie Verlag—Berlin.

Nesta obra encontra o leitor uma fundamentação rigorosa da Mecânica Estatística Quântica mediante a utilização de resultados relativamente recentes obtidos por GNEDENKO e seus colaboradores no domínio do Cálculo das Probabilidades.

O primeiro capítulo destina-se precisamente a expor aqueles resultados refundidos, porém, no sentido da sua imediata aplicação à estatística quântica, o que lhe confere interesse próprio mesmo do ponto de vista do especialista da teoria das probabilidades. Concretamente, são estabelecidos, usando o método das funções características, teoremas que esclarecem o comportamento assintótico, em certas condições, da lei de distribuição de uma soma de n variáveis casuais inteiras. Os conhecimentos pressupostos são os que constam de qualquer curso normal de Cálculo das Probabilidades.

No segundo capítulo faz o autor uma exposição muito clara da problemática formal da Mecânica Quântica, que contudo não dispensa o leitor de um mínimo de familiarização com o assunto.

No terceiro capítulo é que se expõe o objecto e o método da estatística quântica. Se, do ponto de vista fenomenológico (não estatístico) um sistema físico se encontra num estado perfeitamente definido (pelos valores de um certo número, em geral pequeno, de parâmetros), já do ponto de vista estatístico esse estado encobre na realidade toda uma infinidade de estados diferentes, todos compatíveis com os valores daqueles parâmetros. Ora, uma grandeza qualquer relativa ao sistema deverá ter, na teoria fenomenológica, um valor perfeitamente determinado (função dos valores dos referidos parâmetros); ao passo que na teoria estatística terá valores que diferem de um para outro daqueles estados. É aqui que se põe o problema que o autor chama da *representabilidade do valor médio* e que é um verdadeiro problema de Física Matemática. Consiste este problema em construir por via puramente teórica uma média tal dos valores da grandeza que, com probabilidade próxima da unidade, ela coincida — ou quase coincida — com o valor previsto pela teoria fenomenológica.

Seja $U_1, U_2, \ldots, U_m$ um sistema ortonormal completo de funções próprias do operador L da energia, correspondente a um dado valor desta (quer dizer, a um certo estado estacionário do sistema). O autor define como *valor médio microcanónico* da grandeza A, a que corresponde um operador $\mathfrak{A}$, a média aritmética das esperanças matemáticas $(\mathfrak{A} U_k, U_k)$ da grandeza nos diferentes estados U_k:

$$\overline{A} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{A} U_k, U_k) .$$

Tratando-se de um sistema submetido a uma estatística simétrica ou anti-simétrica, as funções U_k serão correspondentemente apenas funções simétricas ou apenas anti-simétricas.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo exaustivo da estatística dos fotões e culmina no estabelecimento da fórmula de Planck para a distribuição da energia do espectro do corpo negro.

A estatística das partículas materiais é abordada no capítulo seguinte. Embora o método seguido seja o mesmo da estatística dos fotões, a situação é aqui mais complexa, sobretudo porque no caso do sistema de fotões dotado de certa energia se dá a circunstância simplificadora de não ser constante o número de fotões.

No último capítulo é dada a definição de entropia e estabelece-se o segundo princípio da Termodinâmica.

Quanto à forma como a obra é escrita há que salientar não só a clareza da exposição pròpriamente matemática de um assunto que de sua natureza não é fácil, como também, e principalmente, a análise profunda que o autor faz de todas as ideias que são postas em jogo. Trata-se enfim de um verdadeiro livro de Física Matemática, na acepção clássica desta expressão.

J. J. Dionísio

125 — R. Risser e C. E. Traynard — **Les Principes de la Statistique Mathématique** — Livre II — XII + 418 págs., 7000 frs. — Gauthier-Villars, Paris, 1958.

Neste segundo volume completam os autores, com a exposição das teorias da correlação e das séries cronológicas, a sua «vue d'ensemble» da Estatística Matemática.

Se é importante para o investigador a redução de um conjunto de observações a um restrito número de características matemática ou empìricamente tratáveis — matéria de que se ocupava o primeiro volume — não o é menos a pesquisa de relações de dependência que possam apontar o caminho do esclarecimento das causas dos fenómenos. O instrumento estatístico adequado é a teoria da correlação, que nesta obra se acha exposta nos seis capítulos que constituem as duas primeiras partes.

Além dos assuntos costumados, abordam-se numerosas noções e alfaias especializadas que não se encontram correntemente na literatura anglo-saxónica, notando-se ao mesmo tempo uma simpática preocupação nacionalista em «descobrir» precursores gauleses na introdução de um ou outro conceito... Excitou particularmente o nosso interesse o capítulo em que se critica o coeficiente de correlação e se propõem as condições a que deve satisfazer um bom índice de correlação, referindo-se os índices de Gini e de Jordan e uma classe geral de índices devida a Fréchet. É pena, porém, que se não aflore sequer o importante problema da distribuição desses índices, sem a qual não é possível ajuizar a significância dos valores obtidos na prática.

Na terceira parte da obra, que ocupa cerca de metade da sua extensão, estudam-se as séries cronológicas, encarando-se como habitualmente as suas características gerais, as flutuações sasonárias, a investigação das ligações entre termos sucessivos das séries (autocorrelação) e a análise harmónica. É assunto que interessa especialmente aos economistas, embora eventualmente encontre aplicação em ramos fora da sua alçada, como a meteorologia.

Sobre a qualidade da exposição podem fazer-se os mesmos reparos que se aplicaram ao primeiro volume (Gazeta de Matemática, N.º 66-67): discutível sistematização dos assuntos, fraca insistência nos conceitos estatísticos à custa de excessiva proeminência para os desenvolvimentos matemáticos, ausência quase completa de exemplos de aplicação.

Não é, decididamente, livro que sirva aos principiantes, ainda que providos de larga bagagem matemática; mas também não parece que possa ser muito útil aos especialistas, pelo menos como obra de referência.

M. A. Fernandes Costa

Por absoluta falta de espaço não foi possível incluir no presente número as críticas às obras seguintes:

Wilhelm Specht — *Elementare Beweise der Primzahlsätze* — 78 págs. — Deutsche Verlag der Wissenschaften — Berlin, 1956.

Iwanenko-Sokolow — *Klassische Feldtheorie* — 348 págs. — Akademie Verlag — Berlin, 1953.

Lancelot-Hogben — *Statistical Theory* — George Allen and Unwin, Ltd. — London.