

E. J. GUMBEL em [2], porém, propôs, tendo em vista certas aplicações a problemas concretos de Engenharia, o uso de estatística, $\sum \left(F(x_j) - \frac{j}{n+1} \right)^2$ em que x_j , como acima, representa a j^{a} observação contada a partir da mais pequena (x_1 será, pois, a menor observação e x_n a maior).

Era evidentemente de supor que tal estatística tivesse uma distribuição análoga à obtida por N. SMIRNOV para a estatística de R. VON-MISES e H. CRAMER. De facto, provou-se em [5] que

$$(n+1) \sum \left(F(x_j) - \frac{j}{n+1} \right)^2$$

tem a distribuição assintótica que N. SMIRNOV tinha determinado já para

$$n \sum \left(F(x_j) - \frac{2j-1}{2n} \right)^2$$

tabelada em [1].

Pode então formular-se a seguinte regra de comportamento:

A criação de um satélite artificial da Terra

por J. Gaspar Teixeira

No início da Era Astronáutica⁽¹⁾, sentimo-nos no dever de apresentar aos Leitores da Gazeta de Matemática uma exposição elementar e esquemática dos problemas de ordem matemática — essencialmente de mecânica racional — sobre os quais se fundamentam as realizações recentemente efectuadas no campo da Astronáutica. A exposição, sob a forma de artigos a publicar, constitui uma dupla homenagem:

(1) Cf. *Sciences et Avenir* — n.º 129, Nov. 1957, pág. 577.

Calcula-se a quantidade

$$(n+1) \sum \left(F(x_j) - \frac{j}{n+1} \right)^2$$

e aceita-se ou rejeita-se a hipótese $F(x)$ consoante tal quantidade é inferior ou superior a s_α , em que s_α é o ponto da distribuição de SMIRNOV correspondente ao nível de significância α .

REFERÊNCIAS

- [1] T. W. ANDERSON and D. A. DARLING, *Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes*. Ann. Math. Stat., 23, 1952.
- [2] E. J. GUMBEL, *Simple tests for a given hypotheses*, Biom., 32, 1942.
- [3] E. J. GUMBEL, *On the reliability of the classical chi square test*, Ann. Math. Stat., 14, 1943.
- [4] A. M. MOOD, *An introduction to the theory of statistics*, Mc. Graw Hill Books Company, 1950.
- [5] J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Distribution-free tests of goodness of fitting for distribution functions*, Rev. Fac. Ciênc. Lisboa, A, V, 10, 1955.
- [6] N. SMIRNOV, *Sur la distribution de ω^2* , Comptes Rendus, 202, 1936.
- [7] A. WALD e W. MANN, *On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test*, Ann. Math. Stat., 12, 1942.

a) de saudação aos estudantes portugueses que terão o seu futuro profissional profundamente influenciado pelos problemas consequentes,

b) de reconhecimento aos cientistas e técnicos que levaram a efeito as realizações que marcam o início da referida Era.

No presente artigo, estabelece-se a equação geral do movimento dum foguetão-propulsor considerado sob a forma mais esquemática e a trajetória mais económica em

casos particulares simples; é redigido apenas na base dos conhecimentos adquiridos em vulgar tratado de mecânica racional (1).

A G. M. procurará obter de especialistas competentes ou artigos ou elementos que lhe permitam desenvolver ou esclarecer qualquer pormenor interessante do presente artigo e continuá-lo no sentido de completar a exposição elementar atrás referida.

Como se sabe, a criação de um satélite é possível mediante dois processos diferentes:

- 1) por um processo natural
- 2) por um processo artificial.

Sobre o «nascimento» da Lua a partir da Terra (particularizemos o caso) existem algumas teorias baseadas em factos de natureza geológica que podem ser confirmadas pela mecânica dos corpos fluidos e plásticos (2).

Interessa-nos aqui considerar o segundo processo — o artificial.

Qualquer corpo S que gravite (3) como satélite em torno de outro T , tem, em relação a T um movimento bem determinado que em mecânica racional, tem o nome de *movimento central*. No seu caso mais geral este movimento é traduzido analiticamente pela equação diferencial conhecida pela *fórmula de BINET*:

$$a = -\frac{c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

— a é a aceleração (4) (escalar) de $S(r, \theta)$ em relação a T , colocado na origem dum referencial polar.

(1) Cf. p. ex. LOUIS ROY — *Cours de Mécanique Rationnelle* — Gauthier-Villars, Paris.

(2) Encontra-se uma descrição elementar de tais teorias no admirável livro de divulgação de GEORGE GAMOW — *Biografia da Terra*, Espasa — Calpe, Argentina.

(3) Admite-se em tudo o que vai seguir-se que são nulas as acções de outros corpos sobre S .

(4) Como se sabe, no movimento central só há componente radial da aceleração.

A primeira conclusão a tirar da fórmula de BINET é que o movimento central é de natureza cinemática, isto é, nele não intervem a noção de massa. Admitamos, por exemplo, que uma catástrofe universal aniquilava o planeta Marte; o homem poderá criar um «herdeiro» deste planeta, fazendo por exemplo, com que um grão de chumbo o substitua no movimento ao longo da sua trajectória: apenas é necessário, para isso, que durante um pequeno intervalo de tempo a posição e a velocidade do grão de chumbo coincida com a posição e a velocidade que Marte teria se não tivesse sido destruído. Outro aspecto da natureza cinemática do movimento central: todos os corpos existentes à superfície da Terra acompanham esta no seu movimento em torno do Sol — têm a mesma trajectória. Admitindo então que seria possível anular a força da gravidade, os corpos terrestres não se afastariam da Terra a não ser que sobre eles actuassem outras forças estranhas. Tudo isto é a aplicação do elementar *princípio da inércia*.

É esta a razão por que um compartimento estanque que contenha no seu interior um ser vivo e que acompanhe um satélite artificial na sua órbita, continuará «colado» no movimento ao próprio satélite mesmo que em determinado instante dele se separe fisicamente. Para reaver o ser vivo será necessário provocar uma «saída» do compartimento da órbita do satélite, como inicialmente foi provocada uma «saída» do satélite da órbita da Terra.

A dificuldade da integração da fórmula de BINET — e é essa integração que determina explicitamente a trajectória e, em cada instante, a velocidade de S como função do tempo — depende apenas do tipo da função que traduz a atracção entre S e T .

No caso porém da gravitação — e é apenas esse que se verifica em toda a mecânica celeste, particularmente no caso dos satélites

— a atracção entre S e T é de natureza newtoneana (1) e a fórmula de BINET conduz naturalmente ao estabelecimento das conhecidas três leis de KEPLER (2):

1) S descreve uma elipse de que T ocupa um dos focos,

2) As áreas varridas pelo raio vector de S são proporcionais aos intervalos de tempo gastos em varrê-las,

3) Os quadrados dos tempos das revoluções são proporcionais aos cubos dos eixos maiores das órbitas.

Inversamente, toda a elipse com um foco no centro de gravidade da Terra é uma órbita admissível, isto é, pode vir a ser órbita de um satélite da Terra — simplesmente, a velocidade em cada ponto da trajectória é univocamente determinada em função do tempo e independente da massa do satélite.

Recordadas estas considerações bem vulgares e conhecidas, observemos que o problema da criação de um satélite artificial da Terra (3) comporta, no seu aspecto matemático e no seu esquema geral, duas fases:

1) Determinação da trajectória que o satélite vai descrever no seu movimento central;

(1) Directamente proporcional às massas de S e T e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois corpos.

(2) Consulte-se por exemplo: *E. Borel — La Mécanique et la Gravitation Universelle*, Albin Michel, Paris.

(3) Supomos que o problema da trajectória do satélite artificial é mais complexo, na realidade. Não se trata simplesmente da determinação da trajectória dum astro que gira em torno de outro mas sim do estudo da trajectória dum bólido que gira em volta da Terra sujeito também à acção do campo magnético terrestre (F. L. M.).

2) Transporte do satélite desde a superfície da Terra até um ponto da sua trajectória e, uma vez atingido tal ponto, lançamento do satélite na órbita.

Ora, a solução do problema relativo à fase 1) — de natureza exclusivamente cinemática, como se disse — obedece apenas a condições relacionadas com o objectivo a atingir.

Concretamente, os instrumentos de telemetria instalados no primeiro satélite artificial da Terra, deveriam estar ao descrever a órbita prevista, em boas condições para obter resultados precisos de observações do espaço cósmico e das camadas superiores da alta atmosfera integradas no programa das actividades soviéticas do Ano Geofísico Internacional (1).

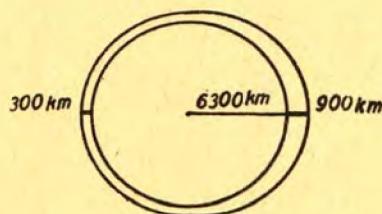


Fig. 1

Foi então escolhida para órbita teórica desse satélite uma circunferência com centro no centro de gravidade da Terra e raio cerca de 6.900 km.

(1) O lançamento do satélite permite obter conclusões de dois tipos diferentes:

a) do estudo preciso da trajectória descrita obtêm-se indicações sobre o atrito e portanto densidade das partículas de ar muito rarefeito a tão grande altura; saber a repartição das massas no geóide (com precisão dez vezes superior à obtida pelos clássicos métodos da geodésia); sobre a forma do mesmo geóide, etc.

b) os instrumentos instalados a bordo fornecem indicação sobre o radiação solar (particularmente raios X e ultra-violeta) e sua influência sobre a ionosfera; a absorpção dos raios ultra-violetas pelas altas camadas da atmosfera; o radiação cósmico fora da acção do campo magnético terrestre; a ionosfera; a densidade das poeiras interplanetárias e sua acção de atrito sobre a superfície do satélite, etc.

O Observatório Astronómico Mullard Rádio de Cambridge obteve por medições efectuadas no período 6-20 de Outubro (1) as seguintes características da órbita:

Inclinação da órbita	$64^{\circ} 40' + 10'$
período entre passagens sucessivas pela latitude $52^{\circ} 12' N$	$5750,0 \pm 0,3$ seg. sol
decréscimo médio do período	$2,2 \pm 0,1$ seg./dia
semi-eixo maior	6937 km.
excentricidade	$0,053 \pm 0,001$
altura sobre o raio médio da Terra no perigeu	197 ± 10 km.
altura sobre o raio médio da Terra no apogeu	934 ± 10 km.

Quer dizer, os cientistas e técnicos encarregados do lançamento conseguiram assim realizar a órbita teórica com um erro de cerca de 1_0° , fig. 1 (2).

Em opposição, o problema do transporte do satélite até a sua órbita e do respectivo lançamento é de natureza essencialmente dinâmica pois envolve dispêndio de energia.

Nestes termos, duas questões se levantam: uma de natureza técnica — escolha do veículo e, conseqüentemente, do processo de libertação, no mesmo veículo, de altas quantidades de energia necessárias para o transporte e lançamento; outra questão, de natureza matemática — balística e cálculo das variações — determinação da trajectória de transporte correspondente ao mínimo consumo de energia.

Os técnicos (3) indicam o foguetão como o único veículo capaz de, presentemente, realizar tal função. Nos foguetões, até há pouco utilizados, ensaiaram-se diversos tipos de combustíveis e comburentes líquidos: nas bombas V_2 utilizava-se respectivamente álcool metílico e oxigénio líquidos, mas conhecem-se

outras combinações como metanol e oxigénio líquido ou ainda hidrogénio e fluorina líquidos, se bem que o produto desta combustão seja tão corrosivo que até há pouco não se encontrava viabilidade da sua utilização.

Equação geral do movimento dum foguetão propulsor

Ora, como se sabe, um foguetão é um projectil auto-propulsionado segundo o princípio estabelecido pelo teorema da quantidade de movimento relativo ao escoamento de um fluido (1):

Em cada instante, é equivalente a zero o seguinte sistema dos vectores aplicados ao volume τ dum fluido contido numa superfície σ :

- resultante das forças de massa relativas a cada partícula do fluido,*
- resultante das forças de inércia das mesmas partículas,*
- resultante das pressões sobre σ exercidas do exterior de τ , e*
- resultante da quantidade de movimento por unidade de tempo, relativa ao caudal do fluido através de σ .*

Consideremos então um projectil cilindro-ogival, terminado por uma câmara de combustão que se prolonga por uma conduta difusora D; o gaz, produto da combustão em C escoa-se ao longo de D (fig. 2).

Vamos admitir que o escoamento se faz em regime permanente e uniforme.

Sejam m e $m + dm$ a massa do foguetão nos instantes t e $t + dt$. Assim, $-dm$ é a massa do gás expelido, isto é, dos produtos da combustão, no intervalo de tempo considerado; ou ainda a massa que no intervalo dt sai da câmara de combustão, entra no

(1) Cf. *Nature*, vol. 180 N. 4592, pg. 881.

(2) Declaração de G. A. CHEBOTAREV.

(3) Cf. A. STERNFELD — *O Voo no espaço cósmico*, pg. 81.

(4) Cf. p. ex. G. DE MARCHI — *Idraulica*, pág. 64 — Ulrico Hoepli — Milão.

tubo de escape e nele ocupa um volume elementar $d\tau_x$,

$$-dm = \rho(x) d\tau_x = \rho(x) S(x) dx,$$

deslocando-se em relação às suas paredes com velocidade $\mathbf{v}(x)$, dirigida segundo o eixo da conduta de escape.

A massa total contida no tubo de escape é

$$\int_0^l \rho(x) S(x) dx = \int_0^l -dm.$$

Apliquemos o teorema anterior ao fluido contido no volume $d\tau_x$:

foguetão. Se representarmos por $d\mathbf{G}$ e $d\mathbf{P}$ respectivamente a resultante das forças de massa e das pressões exercidas sobre a superfície elementar que limita $d\tau_x$, temos

$$d\mathbf{G} + d\mathbf{P} + dm\boldsymbol{\gamma} - dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Considerando agora todo o gaz contido no tubo de escape, temos

$$1) \quad \mathbf{G} + \mathbf{P} + \int_0^l dm\boldsymbol{\gamma} + \int_0^l -dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Ora os dois termos \mathbf{G} e \mathbf{P} equilibram, em

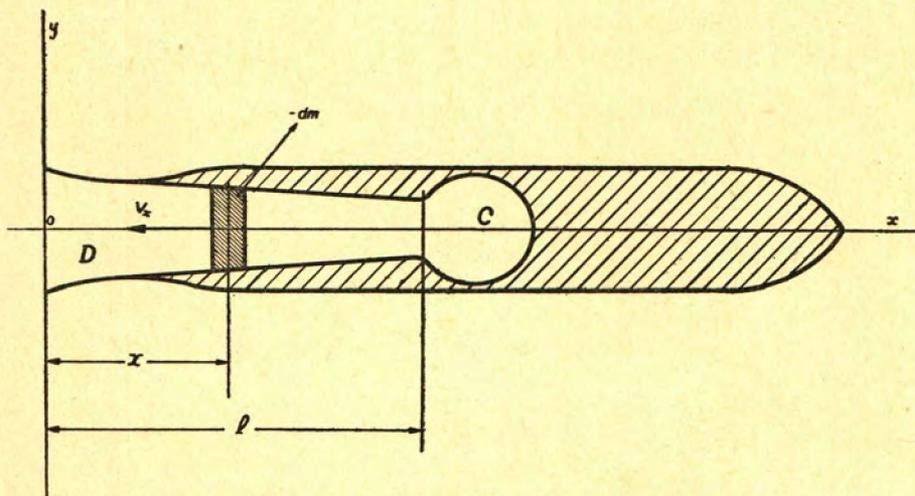


Fig. 2

A resultante da quantidade de movimento por unidade de tempo é

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} \rho S [\mathbf{v}(x+dx) - \mathbf{v}(x)] dx &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho S dx = \\ &= -dm \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \end{aligned}$$

a resultante das forças de inércia

$$-\rho S dx \boldsymbol{\gamma} = dm \boldsymbol{\gamma}$$

em que $\boldsymbol{\gamma}$ é a aceleração do centro de gravidade do sistema constituído por todo o

cada instante, a força de inércia do foguetão e a resultante das forças exteriores (peso, resistência do ar, etc.):

$$\mathbf{G} + \mathbf{P} - m\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0},$$

de modo que a equação 1) toma a forma:

$$2) \quad \left[m + \int_0^l dm \right] \boldsymbol{\gamma} + \int_0^l -dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_e$$

em que \mathbf{F}_e é a resultante das forças exteriores.

Esta é a equação geral do movimento dum foguetão-propulsor, estabelecida nas condições de aproximação atrás citadas.

Não conhecemos ainda qual o grau de precisão teórica e quais os métodos de integração da equação anterior utilizados nas últimas realizações. Vamos, no entanto, seguindo a reduzida bibliografia de que dispomos, considerar alguns casos simples e fazer o respectivo estudo.

Começemos por observar que a massa $\int_0^t -dm$ do gaz contido na conduta de escape é desprezável em relação à massa restante m do foguetão. Por outro lado, verifica-se que esse mesmo gás

— em C está a pressão muito alta e tem velocidade praticamente nula

— em O tem pressão praticamente nula (atmosférica) e velocidade V muito elevada (fig. 2).

Nestes termos é, apòximadamente

$$\int_0^t dm \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} V$$

e a equação 2) torna a forma muito simples

$$m \gamma = -V \frac{dm}{dt} + F_e.$$

«A relação entre a massa expulsa em cada explosão e a massa restante é muito importante, quanto ao dispêndio de combustível e comburente» (1).

Ora, considerando na equação anterior $F_e = 0$, isto é, desprezando a gravidade e a resistência do ar, temos

$$m \frac{dv}{dt} = -V \frac{dm}{dt}$$

(1) Cf. A. STERNFELD — op. cit. pág. 59.

e

$$v_1 - v_0 = V \log \frac{m_0}{m_1}$$

ou

$$m_1 = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{V}},$$

expressão que nos dá a massa do foguetão num instante t_1 em que ele adquire o acréscimo de velocidade Δv .

Assim, para provocar um acréscimo de velocidade igual à velocidade de escape V é necessário consumir 63% da massa inicial

$$\Delta m = m_0 - m_1 = m_0 \frac{e - 1}{e};$$

e para obter $\Delta v = 2V$ utilizar-se-á 86,5% da massa inicial. Compreende-se por outro lado, que o pêso da estrutura passiva não possa ser reduzido além de certo limite sem comprometer as condições de resistência e estabilidade da mesma estrutura.

Por esta razão, os técnicos indicam que com um *foguetão simples* não se deve ultrapassar o acréscimo $\Delta v = \log 6 \cdot V$

Para atingir velocidades mais elevadas é necessário recorrer a um *foguetão composto* que se vai desembaraçando sucessivamente das massas dos depósitos-reservatórios dos combustível e comburente, à medida que aqueles se vão esvaziando (1).

Determinação da trajectória mais económica (2)

Consideremos o caso de um foguetão que, durante determinado intervalo de tempo $(0, T)$, deverá deslocar-se desde $O(0, 0)$ até $P(a, b)$, fig. 3, com velocidades inicial e final respectivamente (3)

(1) Cf. A. STERNFELD — op. cit. pág. 61.

(2) Cf. D. F. LAWREN — *The Mathematical Gazette*, Vol. XLI, N.º 337, pág. 172, donde extraímos o resumo que segue.

(3) É fácil provar que, no caso implícito na equação 4), o movimento é plano.

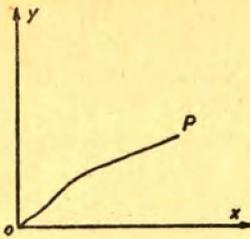
$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = u_0 \\
 & \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \\
 3) & \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=T} = u_T \\
 & \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=T} = v_T
 \end{aligned}$$


Fig. 3

Admitamos ainda que o movimento é regido pela equação

$$4) \quad m \mathbf{v} = -V \frac{dm}{dt}$$

isto é, que se desprezam os efeitos da gravidade e da resistência do ar.

A equação 4) conduz ao sistema

$$m \ddot{x} = -V \cos \alpha \frac{dm}{dt} \quad m \ddot{y} = -V \sin \alpha \frac{dm}{dt}$$

donde

$$m \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = -V \frac{dm}{dt}$$

e

$$V \log \frac{m_0}{m_P} = \int_0^T \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} dt.$$

Ora, como atrás se disse, o dispêndio de combustível e comburente pode exprimir-se por meio da relação m_0/m_P .

Interessa-nos, portanto, calcular uma trajectória de O a P , sujeita às condições 3), para a qual a razão anterior seja mínima, ou seja, ao longo da qual o integral

$$5) \quad I = \int_0^T \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} dt$$

seja mínimo.

As equações de EULER para este caso tomam a forma (1)

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}} \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}} \right\} = 0$$

(1) Cf. E. GOURSAT — *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome III, pag. 629.

donde

$$\frac{d^2}{dt^2} (\cos \alpha) = \frac{d^2}{dt^2} (\sin \alpha) = 0$$

e

$$\cos \alpha = At + B \quad \sin \alpha = Ct + D$$

Daqui resulta, necessariamente,

$$A = C = 0 \quad B^2 + D^2 = 1$$

e $\alpha = \text{const.}$ — o foguetão deve manter uma trajectória rectilínea.

«É fácil mostrar que estes resultados não conduzem à solução correcta do problema. Se o lançamento é feito por forma a garantir a prevista variação de velocidade no intervalo $(0, T)$, a trajectória não é, em geral, respeitada; se, pelo contrário, o lançamento é feito por forma a realizar a trajectória prevista, a variação de velocidade não é cumprida» (1).

Teremos que modificar, portanto, o tipo de cálculo, admitindo que a solução do problema possa comportar pontos de descontinuidade para as componentes da velocidade, isto é, que o foguetão pode estar sujeito a impulsões.

Estudemos em que condições o integral 5) toma um valor mínimo no plano $p = \dot{x}$, $q = \dot{y}$, isto é, num plano em que, como se verá, as descontinuidades atrás referidas não introduzem descontinuidade da trajectória do ponto figurativo do movimento.

$$I = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2} dt$$

representa o comprimento do arco da curva \widehat{AB} . Pretende-se então determinar o menor arco que liga A a B , sob a condição de

$$\int_0^T p dt = a \quad \int_0^T q dt = b$$

ou, o que é o mesmo, de manter ao longo do trajecto a mesma velocidade média

$$\bar{p} = \frac{a}{T} \quad , \quad \bar{q} = \frac{b}{T}.$$

(1) Cf. D. F. LANDEN — op. cit.

É fácil de provar ⁽¹⁾ que a única curva que satisfaz à questão é constituída pelos segmentos da recta \overline{AC} e \overline{CB} , percorridos instantaneamente, ao passo que o ponto figurativo $Q(p, q)$ permanece em C durante todo o intervalo $(0, T)$. Isto significa:

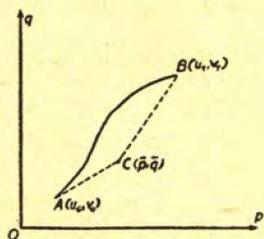


Fig. 4

1.º que em O deve dar-se uma combustão muito rápida que faz variar a velocidade, por impulsão do valor inicial (u_0, v_0) ao valor médio (\bar{p}, \bar{q}) .

2.º que o foguetão deve permanecer durante o intervalo $(0, T)$ com a velocidade média (\bar{p}, \bar{q}) , isto é, sem funcionamento do motor de reacção.

3.º que no instante $t = T$ deve dar-se nova combustão muito rápida (portanto nova impulsão) que altera a velocidade de (\bar{p}, \bar{q}) para o valor final (u_T, v_T) .

Retomemos de novo a fórmula de BINET; cálculo simples ⁽²⁾ mostra que um corpo animado de velocidade horizontal de 7,912 km/s à superfície da Terra manter-se-á indefinidamente como satélite, descrevendo um círculo máximo em torno da Terra: 7,912 kms é a *velocidade circular* à superfície da Terra.

Se a velocidade decrescer, o corpo cairá sobre a Terra.

Se a velocidade for porém de 11,189 km/s, a trajectória do corpo será arco de parábola tangente à superfície da Terra: 11,189 km/s é a *velocidade de fuga* à superfície da Terra.

Para velocidade intermédia entre a circular e a de fuga a trajectória é elipse; enfim,

sendo superior à de fuga o corpo descreverá um arco de hipérbole.

Ora a velocidade circular à altitude de 600 km sobre a Terra é cerca de 7,5 km/s.

Isto é, os cientistas e técnicos soviéticos tiveram que calcular um foguetão capaz de imprimir a um corpo de 80 kg uma velocidade de 7,5 km/s.

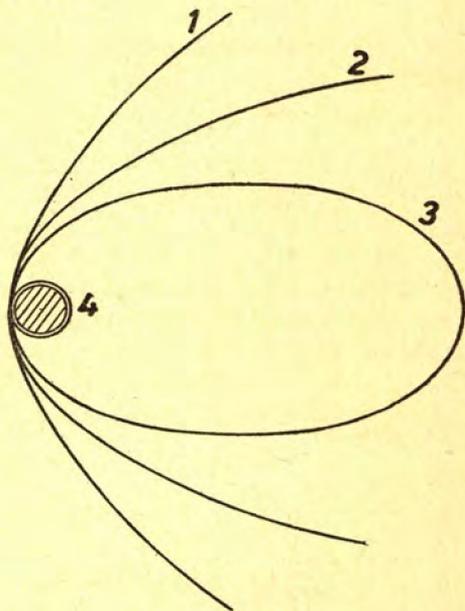


Fig. 5

Admitindo que a velocidade de saída dos gases do foguetão foi de 5 km/s, que o foguetão partiu do repouso e que apenas interessava atingir a altitude de 600 km com a velocidade indicada (que nenhuma importância tinha a direcção dessa velocidade) quererão os Leitores calcular o peso de toda a estrutura no momento da partida e o número de andares do foguetão utilizado? A imprensa falou em 3 andares que pesavam no conjunto cerca de 90 t.

A Gazeta de Matemática teria muito prazer em publicar nos próximos números as considerações dos seus Leitores.

(1) Cf. D. F. LAWDEN, op. cit. pág. 174.

(2) Desprezando a resistência do ar.