ANO XVIII—N.º 66-67 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO/JUNHO—1957

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Introdução às álgebras de Boole

por **J. A. Vinha Novais**

A leitura dos artigos da Dr.ª TEODORA ALVES publicados na G. M. (n.os 40-42 e 49) despertaram-nos o interesse pela *Álgebra de* BOOLE. Sob a orientação do Dr. JOSÉ MORGADO estudamos, durante alguns meses do ano passado, a *Teoria dos Reticulados* (*Estruturas* na nomenclatura de O. ORE e V. GLIVENKO) de que as *Álgebras de* BOOLE são um caso particular:

Uma Álgebra de BOOLE *é um Reticulado distributivo e complementado.*

1. Denomina-se *Reticulado* todo o sistema $R[R, \vee, \wedge]$ constituido por um conjunto R e por duas operações, $\vee$-supremo e $\wedge$-ínfimo, satisfazendo aos *axiomas* seguintes:

***R1* *(Comutatividade)*:** Para todo o par x, y de elementos de R tem-se

$$x \vee y = y \vee x \quad \text{e} \quad x \wedge y = y \wedge x .$$

***R2* *(Associatividade)*:** Para todos os x, y, z de R tem-se

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{e} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

***R3* *(Absorção)*:** Para todo o par x, y de R tem-se

$$x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$$

Os axiomas da Álgebra de BOOLE compreenderão, portanto, os axiomas $R1$-$R3$ e mais três axiomas que (i) exprimirão que o Reticulado R é distributivo; (ii) garantirão a existência de um complemento de cada elemento do Reticulado, para a definição do qual é necessário introduzir (iii) um terceiro axioma garantindo a existência de dois elementos extremos.

EXEMPLO 1. Consideremos o conjunto dos números reais e nele definidas as operações $x \vee y = \sup(x, y)$ e $x \wedge y = \inf(x, y)$, isto é, $x \vee y$ designa o maior dos números x, y e $x \wedge y$ designa o menor dos números x, y É imediato que o conjunto dos números reais assim algebrizado constitui um reticulado, isto é, satisfaz $R1 - R3$.

EXEMPLO 2. Consideremos o conjunto fundamental E e seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos sub-conjuntos (ou partes) de E. Definindo entre os elementos de $\mathcal{B}$ as operações $\cup$ (reunião de conjuntos) e $\cap$ (intersecção de conjuntos), fàcilmente se verifica que o conjunto assim algebrizado goza das propriedades $R1 - R3$, isto é, é um Reticulado. É ainda um reticulado todo o *anel de conjuntos,* isto é, um sistema de conjuntos que, com A e B, contém $A \cup B$ e $A \cap B$. Um anel de conjuntos que, com A e B, contém a diferença $A-B$, diz-se um *corpo de conjuntos*.

EXEMPLO 3. Consideremos o conjunto $E=(1,2,3,4,6,12)$ e difinamos entre os seus elementos as operações $\vee$ e $\wedge$ pelas tábuas I e II. Verifica-se que o conjunto E assim algebrizado goza das propriedades $R1-R3$ (O conjunto E é o conjunto dos divisores de 12).

I

$\vee$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

II

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

EXERCÍCIO 1. Considere o conjunto $E=(a,b,c)$ e forme o conjunto $\mathscr{B}$ dos sub-conjuntos de E. Algebrize o conjunto $\mathscr{B}$ pelas operações $\cup$ e $\cap$ e forme as tábuas destas operações.

EXERCÍCIO 2. Algebrize o conjunto dos divisores de 30 de maneira análoga à usada no EXEMPLO 3 ($x\vee y$ é o m. m. c. e $x\wedge y$ é o m. d. c. calculados dentro do conjunto). Considere o conjunto E constituído pelos divisores primos de 30 e o conjunto $\mathscr{B}=\{0, (2), (3), (5), (2,3), (2,5), (3,5), (2,3,5)\}$ dos sub-conjuntos de E. Mostre que os reticulados dos divisores de 30 e o reticulado que se obtém da algebrização do conjunto $\mathscr{B}$, por meio das operações $\cup$ e $\cap$, são isomorfos.

EXERCÍCIO 3. Mostre que no caso do EXEMPLO 3 não existe tal isomorfismo.

2. Álgebras de Boole.

Nos exemplos 2 e 3 e no conjunto dos divisores de 30 (EXERCÍCIO 2) existem dois elementos, a e b, gosando das seguintes propriedades $a\vee x=x$ e $a\wedge x=a$, e $b\wedge x=x$ e $b\vee x=b$ quaisquer que sejam os elementos x do reticulado: no EXEMPLO 2 é $a=0$ (sub-conjunto vazio de E) e $b=E$; no EXEMPLO 3 é $a=1$ e $b=12$; e no conjunto dos divisores de 30 é $a=1$ e $b=30$. Além disso, no EXEMPLO 2 e no EXERCÍCIO 2 (mas não no EXEMPLO 3), verifica-se ainda que, para cada elemento x, existe um outro elemento, x', tal que $x\vee x'=b$ e $x\wedge x'=a$: no EXEMPLO 2, se x representa determinado conjunto de $\mathscr{B}$, x' representa o conjunto formado por todos os elementos de E que não pertencem a $\mathscr{B}$; no EXERCÍCIO 2 tem-se $1'=30, 2'=15, 3'=10, \cdots$ pois que $1\vee 30= =30$ e $1\wedge 30=1$, $2\vee 15=30$ e $2\wedge 15=1$, $3\vee 10=30$ e $3\wedge 10=1, \cdots$. No EXEMPLO 3 há sòmente dois elementos que gozam desta propriedade, a saber, 3 e 4.

A existência de reticulados nas condições anteriores legitima a seguinte

DEFINIÇÃO 1. Uma Álgebra de BOOLE é um sistema $\mathscr{R}[R, \vee, \wedge]$, constituído por um conjunto R, de elementos $x, y, z, \cdots$, e por duas operações $\vee$ (supremo) e $\wedge$ (ínfimo) satisfazendo aos seguintes axiomas:

I Grupo:

$R1$. $\quad x\vee y=y\vee x$ e $x\wedge y=y\wedge x$

$R2$. $\quad x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$

e $\quad x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$

$R3$. $\quad x\vee(x\wedge y)=x\wedge(x\vee y)=x$

II Grupo:

$D.$ $\quad x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

e $\quad x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ [1]

III Grupo:

$B1.$ Existe um elemento 0 e um elemento I de $\mathscr{R}$ tal que $x\vee 0=x$ e $x\wedge 0=0$ e $x\vee I=I$ e $x\wedge I=x$, qualquer que seja x de $\mathscr{R}$.

$B2.$ Para todo o elemento x de $\mathscr{R}$ existe um elemento x' de $\mathscr{R}$ tal que

$$x\vee x'=I \text{ e } x\wedge x'=0.$$

Comparando as duas expressões que constituem cada um dos axiomas verificamos que cada uma delas se transforma na outra quando trocamos as operações $\vee$ e $\wedge$ e os elementos 0 e I; deste facto resulta o

Princípio da dualidade: *Numa Álgebra de* BOOLE, *de uma proposição verdadeira deduz-se uma outra proposição verdadeira permutando as operações* $\vee$ *e* $\wedge$ *e os elementos* 0 *e* I.

À proposição assim deduzida dá-se o nome de proposição dual da primitiva; se a permutação das operações e de 0 e I não altera a proposição, a proposição diz-se auto-dual. O leitor reconhece imediatamente que todo o corpo finito de conjuntos é uma Álgebra de BOOLE.

Uma Álgebra de BOOLE admite uma representação gráfica muito simples que permite visualizar as suas propriedades. Tomemos para representação de I o conjunto dos pontos do quadrado (fig. 1); para 0 o sub-conjunto vazio dos pontos do quadrado; os elementos $x, y, \cdots$, serão representados por sub-conjuntos de pontos do quadrado. Para complemento de um elemento x tomamos o conjunto complementar do conjunto que representa x, isto é, o conjunto dos pontos do quadrado que não pertencem a x. O supremo e o ínfimo de dois elementos serão representados, respectivamente, pela reunião e pela intersecção dos conjuntos que representam x e y. Esta representação é conhecida por Diagrama de VENN e será justificada, para o caso das Álgebras de BOOLE finitas, pelo último teorema demonstrado neste artigo (Representação das Álgebras de BOOLE, § 5).

Na figura estão representados dois elementos, x e y, por meio de circulos e os seus complementos, x' representada pela parte tracejada horizontalmente e y' pela parte tracejada verticalmente. A simples análise do diagrama sugere-nos imediatamente que, por exemplo, $x'\vee y'$ (parte tracejada) é o complemento de $x\wedge y$. E isto é realmente verdade como veremos adiante.

3. Alguns teoremas das álgebras de Boole.

$A)$ Consequências de $R1$-$R3$ e D.

Os teoremas que vamos demonstrar são válidos em qualquer Reticulado distributivo.

Comecemos por demonstrar que a proposição $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ é, na realidade, deduzível de $R1$-$R3$ e $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)\cdots(D^*)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}(x\wedge y)\vee(x\wedge z)&=[(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z]\ldots D^*\\&=[x\vee(x\wedge y)]\wedge[z\vee(x\wedge y)]\ldots R1\\&=x\wedge[(z\vee x)\wedge(z\vee y)] \quad \ldots R3 \text{ e } D^*\\&=[x\wedge(x\vee z)]\wedge(z\vee y) \quad \ldots R1 \text{ e } R2\\&=x\wedge(z\vee y) \quad \ldots R3\\&=x\wedge(y\vee z) \quad \ldots R1\end{aligned}$$

Da proposição que acabamos de demonstrar e de $R1-R3$ deduz-se, igualmente,

[1] Para manter a *simetria* entre as duas expressões que constituem cada um dos axiomas, consideramos as duas expressões de D como axiomas embora, como a seguir veremos, qualquer delas possa ser deduzida da outra e do I Grupo de axiomas.

D^* para o que basta notar que estamos em presença de teoremas duais.

TEOREMA 1. Se $x \vee y = z \vee y$ e $x \wedge y = z \wedge y$ então $x = z$.

Este teorema é um exemplo de um teorema auto-dual.

Dem. Por um lado tem-se

$x \wedge (x \vee y) = x$ (1) .... $R3$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
x \wedge (x \vee y) &= x \wedge (z \vee y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.}\\
&= (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \quad \ldots\ldots D\\
&= (x \wedge z) \vee (z \wedge y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.}\\
&= [(x \wedge z) \vee z] \wedge [(x \wedge z) \vee y] \quad \ldots\ldots D\\
&= z \wedge [(x \vee y) \wedge (z \vee y)] \quad \ldots\ldots R1, R3, D\\
&= [z \wedge (z \vee y)] \wedge (x \vee y) \quad \ldots\ldots R1, R2\\
&= z \wedge (x \vee y) \quad \ldots\ldots R3\\
&= z \wedge (z \vee y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.}\\
&= z \quad (2) \quad \ldots\ldots R2
\end{aligned}$$

De (1) e (3) resulta $x = z$.

TEOREMA 2. Para todo o elemento x tem-se

$$x \vee x = x \wedge x = x$$

Dem. (1) $x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee (x \wedge z) = x$ pondo $z = x \vee y$.

(2) $x \wedge (x \vee y) = x$ donde $x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee x$.

De (1) e (2) resulta $x \vee x = x$.

A igualdade $x \wedge x = x$ fica também demonstrada, pois é dual de $x \vee x = x$.

TEOREMA 3. Se $x \vee y = x \wedge y$ então $x = y$.

Dem. $$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee (x \vee y) = x \vee y$$

donde

$$x = x \vee y \qquad (1)$$

$$y \vee (x \wedge y) = y$$

$$y \vee (x \wedge y) = y \vee (x \vee y) = x \vee y$$

donde

$$y = x \vee y \qquad (2)$$

De (1) e (2) resulta $x = y$.

B) Consequências de $R1 - R3, D$ e $B1 - B2$.

TEOREMA 4. A correspondência $\lambda x = x'$ é uma correspondência biunívoca e involutiva de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}$.

Dem. A demonstração divide-se em duas partes

i. A correspondência é biunívoca: *a*) Se $x = y$ então $x' = y'$ e *b*) Se $x' = y'$ então $x = y$.

ii. A correspondência é involutiva:

$$\lambda(\lambda x) = \lambda^2 x = x$$

i. *a*) $x \vee x' = y \vee y'$ e $x \wedge x' = y \wedge y'$ B1-2
$y \vee x' = y \vee y'$ e $y \wedge x' = y \wedge y'$ .... Hip.
donde $x' = y'$ .... $T1$

b) $x \vee x' = y \vee y'$ e $x \wedge x' = y \wedge y'$ B1-2
$x \vee y' = y \vee y'$ e $x \wedge y' = y \wedge y'$ .... Hip.
donde $x = y$ .... $T1$

ii. $x' \vee (x')' = x \vee x'$ e $x' \wedge (x')' = x \wedge x'$ ... B1-2
donde $(x')' = x$ .... $T1$

TEOREMA 5. (Leis de MORGAN).

$$(x \vee y)' = x' \wedge y' \quad \text{e} \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$$

As duas igualdades são duais; basta, pois demonstrar uma delas.

Dem. Em $T4$ ficou provado que cada elemento tem um só complemento. Para demonstrar o Teorema basta provar que $x' \wedge y'$ é o complemento de $x \vee y$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \vee (x' \wedge y') &= [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y'] =\\
&= [(x \vee x') \vee y] \wedge [x \vee (y \vee y')] =\\
&= (I \vee y) \wedge (I \vee x) = I \wedge I = I
\end{aligned}$$

e

$$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = [x \wedge (x' \wedge y')] \vee [y \wedge (x' \wedge y')] =$$
$$= [(x \wedge x') \wedge y'] \vee [x' \wedge (y \wedge y')] =$$
$$= (0 \wedge y') \vee (x' \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$

TEOREMA 6. $\quad 0' = I$ e $I' = 0$

Dem. $0 \vee I = I$ e $0 \wedge I = 0$, donde $0' = I$ e $I' = 0$.

4. As álgebras de Boole como sistemas parcialmente ordenados.

Um conjunto $A = (x, y, z, \cdots)$ diz-se parcialmente ordenado quando e só quando entre os seus elementos é possível definir uma relação binária x/y verificando os seguintes axiomas:

0 1. x/x
0 2. x/y e y/x implica $x = y$
0 3. x/y e y/z implica x/z

EXEMPLO 4. O conjunto dos números reais pode ser parcialmente ordenado pela relação $\lesssim$ (menor ou igual); o conjunto dos números inteiros não negativos é um outro exemplo de conjunto parcialmente ordenado quando nele se define a mesma relação $\lesssim$, ou a relação $\prec$ (divide). Vemos assim que, num mesmo conjunto, podem estar definidas várias relações de ordem parcial.

Num reticulado (e, portanto, numa álgebra de BOOLE) é possível definir uma ordem parcial $\lesssim$. Para isso introduzamos a seguinte

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que $x \lesssim y$ quando e só quando $x \vee y = y$.

Demonstremos que a relação assim definida é, realmente, uma relação de *ordem parcial*.

Com efeito,

0 1. $x \vee x = x$ $(T2)$ donde $x \lesssim x$ (Def. 2)

0 2. Se $x \lesssim y$ e $y \lesssim x$ tem-se $x \vee y = y$ e $y \vee x = x$ donde $x = y$

0 3. Se $x \lesssim y$ e $y \lesssim z$ tem-se $x \vee y = y$ e $y \vee z = z$ donde $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$ ou $x \lesssim z$.

A mesma relação de *ordem parcial* pode ser introduzida pela

DEFINIÇÃO 2*. Diz-se que $x \lesssim y$ quando e só quando $x \wedge y = x$ a qual é equivalente à def. 2 como vamos demonstrar:

Basta demonstrar que as igualdades

$$x \vee y = y \quad \text{e} \quad x \wedge y = x$$

são equivalentes.

Suponhamos que $x \vee y = y$; então

$$x \wedge (x \vee y) = x \wedge y = x.$$

Suponhamos que $x \wedge y = x$; então

$$y \vee (x \wedge y) = y \wedge x = y$$

Definindo $y \gtrsim x$ como equivalente a $x \lesssim y$, a def. 2* pode escrever-se

DEFINIÇÃO 2**. Diz-se que $x \gtrsim y$ quando e só quando $x \wedge y = y$.

Comparando as def. 2 e 2** vemos que as relações $x \lesssim y$ e $x \gtrsim y$ são duais; portanto quando numa expressão intervem o sinal $\lesssim$ ou $\gtrsim$ para passar à expressão dual devemos permutar estes sinais.

O facto de um reticulado ser um conjunto parcialmente ordenado permite-nos obter uma nova representação gráfica para os reticulados com um número finito de elementos (reticulados finitos) chamada diagrama de HASSE.

Para isso notemos, em primeiro lugar, que todo o reticulado finito tem um primeiro e um último elemento (0 e I). Com efeito $\bigvee x_i = x_1 \vee x_2 \vee \cdots$ segue qualquer x_i; e $\bigwedge x_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots$ procede qualquer x_i; logo $0 = \bigwedge x_i$ e $I = \bigvee x_i$.

Designemos por letras $- a, b, c, \cdots -$ os elementos do reticulado; quando dois elementos a e b estão ligados pela relação

$a \precsim b$, mas com $a \neq b$, e são tais que entre a e b não existe algum elemento c, as duas letras representativas são ligadas por uma flecha dirigida de a para b.

Por exemplo, o reticulado constituído pelos elementos a, b, c, d com $a \precsim b \precsim d$ e $a \precsim c \precsim d$ será representado pelo diagrama I e o reticulado dos divisores de 30 (Exercício 2) pelo diagrama II.

Demonstremos algumas proposições onde intervem a relação $\precsim$.

A) Proposições válidas em qualquer Reticulado:

Teorema 7. $x \precsim x \vee y$ qualquer que seja y.

Dem. De $x \wedge (x \vee y) = x$ resulta imediatamente $x \precsim x \vee y$.

Dualmente,

Teorema 7*. $x \wedge y \precsim x$ qualquer que seja y.

Teorema 8. Se $x \precsim y$ e $x \precsim z$ então $x \precsim y \wedge z$

Dem. A hipótese é equivalente a $x \wedge y = x$ e $x \wedge z = x$; então tem-se $x = x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ donde $x \precsim y \wedge z$.

Dualmente,

Teorema 8*. Se $y \precsim x$ e $z \precsim x$ então $y \vee z \precsim x$.

B) Proposições válidas em Álgebras de Boole.

Teorema 9. Numa Álgebra de Boole $x \vee y = y$ é equivalente a $x' \vee y = I$.

Dem. Admitamos que $x \vee y = y$; então $x' \vee y = x' \vee (x \vee y) = (x' \vee x) \vee y = I \vee y = I$.

Admitamos que $x' \vee y = I$; então $x \vee y = I \wedge (x \vee y) = (x' \vee y) \wedge (x \vee y) = y \vee (x' \wedge x) = y \vee 0 = y$

Dualmente,

Teorema 9* Numa álgebra de Boole $x \wedge y = y$ é equivalente a $x' \wedge y = 0$.

Os Teoremas 8-9 mostram que numa álgebra de Boole as def. 2-2* podem ser substituídas pelas definições que lhes são equivalentes: $x \precsim y$ *quando e só quando* $x' \vee y = I$» ou «$x \precsim y$ *quando e só quando* $x \wedge y' = 0$».

Teorema 10. Se $x \precsim y$ então $y' \precsim x'$.

Dem. A hipótese $x \precsim y$ é equivalente a $x \vee y = y$; então $y' = (x \vee y)' = x' \wedge y'$ donde $y' \precsim x'$.

Exercício 4. Demonstre que $0 \precsim x$ e $x \precsim I$ qualquer que seja x.

Exercício 5. Demonstre que se $x \precsim u$ e $y \precsim v$ então $x \wedge y \precsim u \wedge v$ e $x \wedge y \precsim u \wedge v$.

Exercício 6. Desenhe o diagrama de Hasse do reticulado do exercício 1.

Exercício 7. Desenhe o diagrama de Hasse do reticulado do Exemplo 3 e procure os elementos não complementados desse reticulado. Verifique que, neste caso, os elementos complementados são os vértices do «quadriláteros» (3, 4, 1 e 12).

5. Representação das álgebras de Boole.

Neste parágrafo vamos dar uma generalização do Exercício 1, isto é, demonstrar que toda a álgebra de Boole finita é isomorfa ao conjunto dos sub-conjuntos (ou partes) do conjunto dos átomos da álgebra.

Definição 3. Diz-se que o elemento a_i dum Reticulado é um átomo quando e só quando $a_i \neq 0$ e $0 \precsim x \precsim a_i$ implica $x = 0$ ou $x = a_i$; quer dizer, quando a_i *segue* imediatamente 0 ou a_i é um *sucessor* de 0.

Dualmente,

Definição 3*. Diz-se que o elemento m_i de um Reticulado é uma molécula quando e só quando $m_i \neq I$ e $m_i \precsim x \precsim I$ implica $x = m_i$ ou $x = I$; quer dizer, quando m_i *pre-*

cede imediatamente I ou m_i é um *antecessor* de I.

A existência de tais elementos num Reticulado finito é evidente.

Posto isto demonstremos o

TEOREMA 10. Num reticulado finito e complementado o supremo $\bigvee a_i$ de todos os átomos é o supremo do reticulado: $\bigvee a_i = I$.

Notemos, em primeiro lugar, que existem reticulados finitos em que o supremo dos átomos não é o supremo do reticulado (Diagrama III).

Dem. Designemos por a o supremo dos átomos de um reticulado finito e complementado e seja a' um seu complemento (a unicidade do complemento deriva do axioma D — reticulados distributivos — e, portanto, não se exigindo na hipótese que o reticulado seja distributivo, pode a ter vários complementos (Diagrama IV)). Ora, $a_i \lesssim a$ (Teorema 7) e como qualquer elemento do reticulado ou é 0, ou é átomo ou é precedido por algum átomo, a' só pode ser 0 pois que se $a_k \lesssim a'$ seria $a_k \lesssim a \wedge a' = 0$. Logo, sendo $a' = 0$ será (Teorema 6) $a = I$.

Dualmente,

TEOREMA 10*. Num reticulado finito e complementado e ínfimo m_i de todas as moléculas é o ínfimo do reticulado.

Estamos agora em condições de demonstrar um teorema que oferece certa analogia com o teorema da decomposição de números inteiros em factores primos:

TEOREMA 11. Todo o elemento de uma álgebra de BOOLE finita, diferente de 0, admite uma decomposição atómica da forma $\bigvee a_{\alpha_i}$ (em que α_i são elementos tomados do conjunto dos índices dos átomos e $i = 1, 2, \cdots k \lesssim n$, sendo n o número de átomos da álgebra) e tal decomposição é única.

O teorema que vamos demonstrar baseia-se no Teorema 10 e no axioma D, logo, é válido nas álgebras de BOOLE.

Dem. Seja x um elemento da álgebra diferente de 0; então $x = I \wedge x = \bigvee a_i \wedge x = \bigvee (a_i \wedge x)$ (Axioma D). Ora $a_i \wedge x = 0$, caso não seja $a_i \lesssim x$, ou $a_i \wedge x = a_i$ se $a_i \lesssim x$; logo, a expressão $\bigvee (a_i \wedge x)$ fica reduzida ao supremo dos átomos que precedem $x : x = \bigvee a_l$ representando por a_l os átomos que precedem x.

Dualmente,

TEOREMA 11*. Todo o elemento de uma álgebra de BOOLE diferente de I admite uma decomposição da forma $\wedge m_i$ e tal decomposição é única: $x = \wedge m_l$ representando por m_l as moléculas que seguem x.

Antes de demonstrarmos a proposição fundamental deste parágrafo, recordemos a definição de *isomorfismo-algébrico*. Um isomorfismo algébrico e uma transformação biunívoca de um espaço X sobre um espaço Y que respeita as leis de composição definidas em cada um dos espaços. Para demonstrar a existência de um isomorfismo entre dois espaços temos que demonstrar: (i) A transformação é biunívoca, isto é, a cada elemento de X corresponde *um e um só* elemento de Y e cada elemento de Y é o transformado de *um e um só* elemento de X; (ii) A transformação respeita as leis de composição, isto é, se em X está definida uma operação $(.)$ e em Y uma operação $(\circ)$ tem-se, representando por $x^{\cdot}$ o transformado de x, $(x.y)^{\cdot} = x^{\cdot} \circ y^{\cdot}$.

TEOREMA 12. *Toda a álgebra de* BOOLE *finita é isomorfa ao conjunto dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos.*

Dem. Consideremos a álgebra de BOOLE $\mathcal{R}(R, \vee, \wedge)$ e o conjunto $\mathcal{B}$ dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos, $E = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$, algebrizado pelas operações $\cup$ (reunião) e $\cap$ (intersecção).

Estabeleçamos entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{B}$ a correspondência λ assim definida:

$$\lambda \bigvee_1^k a_i = \bigcup_1^k \{a_i\},$$

isto é, a correspondência que faz corresponder ao supremo de átomos de $\mathcal{R}$ a reunião dos conjuntos de $\mathcal{B}$ formados por esses átomos.

(*i*) Vejamos, em primeiro lugar, que se trata de uma correspondência biunívoca:

1) Se $x=y$ então as suas decomposições atómicas só diferem, quando muito, pela ordem dos seus elementos:

$$x=a_{\alpha_1}\vee a_{\alpha_2}\vee\cdots a_{\alpha_k}$$
$$y=a_{\beta_1}\vee a_{\beta_2}\vee\cdots a_{\beta_k}$$

e cada a_{α_i} é igual a um a_{β_j}. Então

$$\lambda x=\lambda(a_{\alpha_1}\vee a_{\alpha_2}\vee\cdots a_{\alpha_k})=\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots a_{\alpha_k}\}$$
$$\lambda y=\lambda(a_{\beta_1}\vee a_{\beta_2}\vee\cdots a_{\beta_k})=\{a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \cdots a_{\beta_k}\}$$

conjuntos que diferem, quando muito, pela ordem dos seus elementos e, portanto, são iguais; $\lambda x=\lambda y$;

2) Sejam $\lambda x=\{a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}\cdots a_{\alpha_k}\}$ e $\lambda y=\{a_{\beta_1} a_{\beta_2}\cdots a_{\beta_k}\}$ elementos iguais de $\mathcal{B}$, isto é, elementos que, quando muito, diferem pela ordem dos átomos.

O elemento λx é imagem de elemento $x=\bigvee\limits_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}$ e o elemento λy é imagem do elemento $y=\bigvee\limits_{j=1}^{k} a_{\beta_j}$, elementos que, quando muito, diferem pela ordem dos átomos e, portanto, são iguais. Fica assim provado que $\lambda x=\lambda y$ implica $x=y$.

(*ii*) Provemos agora, que a transformação λ respeita as leis de composição.

Seja $x=\bigvee\limits_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}$ e $y=\bigvee\limits_{j=1}^{1} a_{\beta_j}$. Pretendemos demonstrar que

a) $\lambda(x\vee y)=\lambda x\cup\lambda y$

b) $\lambda(x\wedge y)=\lambda x\cap\lambda y$

Ora, por um lado,

$$x=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{k}\{a_{\alpha_i}\}=\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots a_{\alpha_k}\}$$
$$y=\lambda\left(\bigvee_{j=1}^{l} a_{\beta_j}\right)=\bigcup_{j=1}^{l}\{a_{\beta_j}\}=\{a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \cdots a_{\beta_l}\}$$

donde

$$(1)\quad \lambda x\cap\lambda y=\{a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}\}\cup\{a_{\beta_1}\cdots a_{\beta_l}\}=$$
$$=\{a_{\gamma_1}\cdots a_{\gamma_m}\}$$

e $\qquad (m, m'\leqq l+k)$

$$(1')\quad \lambda x\cap\lambda y=\{a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}\}\cap\{a_{\beta_1}\cdots a_{\beta_l}\}=$$
$$=\{a_{\theta_1}\cdots a_{\theta_{m'}}\}$$

em que os a_{γ_i} e os a_{θ_i} representam, respectivamente, os elementos a_{α_i} e a_{β_j} sem repetições e os elementos a_{α_i} e a_{β_j} iguais; donde, $m=l+k$ e $m'=0$ quando esses elementos são todos diferentes, isto é, $x\wedge y=0$ e $m=m'=k$ quando esses elementos são todos iguais, isto é, $x=y$.

Por outro lado,

$$(2)\qquad \lambda(x\vee y)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\vee\bigvee_{j=1}^{1} a_{\beta_j}\right)=$$
$$=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{m} a_{\gamma_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\{a_{\gamma_i}\}=\{a_{\gamma_1}\cdots a_{\gamma_m}\}$$

e

$$(2')\qquad \lambda(x\wedge y)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\wedge\bigvee_{j=1}^{1} a_{\beta_j}\right)=$$
$$=\lambda\left(\bigvee_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=k\\ j=l}}(a_{\alpha_i}\wedge a_{\beta_j})\right)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{m'} a_{\theta_i}\right)=$$
$$=\bigcup_{i=1}^{m'}\{a_{\theta_i}\}=\{a_{\theta_1}\cdots a_{\theta_{m'}}\}.$$

De (1) e (2) resulta $\lambda(x\vee y)=\lambda x\cup\lambda y$ e de (1') e (2') resulta $\lambda(x\wedge y)=\lambda x\cap\lambda y$ que são as igualdades que pretendiamos provar.

Em particular, tem-se $\lambda(0)=0$ e $\lambda(I)=E$.

Com a demonstração deste teorema fica justificado o Diagrama de Venn como representação de álgebras de Boole finitas. Ficou afinal, provado que toda a álgebra de Boole *finita* é isomorfa a um corpo de conjuntos (precisamente ao corpo dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos). Utilizando o axioma de Zermelo, mostra-se que *toda* a álgebra de Boole é isomorfa a um corpo de conjuntos.

BIBLIOGRAFIA

Valère Glivenco, Théorie Générale des Structures, Act. Sc. Ind., 1938, Paris.

A. Monteiro e A. Pereira Gomes, Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua, C. E. M., 1944 Porto.

E, fundamentalmente, parte de um trabalho do Dr. José Morgado acabado de publicar.