Grupos de Isotopia

por Élon Lages Lima*

1. Introdução.

As transformações que se obtêm deformando contìnuamente uma figura sem rasgar nem colar são homeomorfismos desta figura. Mas é evidente que existem homeomorfismos (por exemplo, a reflexão num espelho) que não podem ser obtidos por meio de uma deformação do objecto. Põe-se então o problema de determinar os homeomorfismos (isto é, transformações biunívocas e bicontínuas) que podem ser obtidos a partir da transformação identidade por intermédio de uma deformação contínua, sem rasgar nem colar. Mais geralmente, dados dois homeomorfismos f, g de um objecto X, procura-se saber se o homeomorfismo $f o g^{-1}$ pode ser obtido por deformação. Se tal for o caso, é natural considerar f e g como equivalentes. A composição de homeomorfismos induz entre as classes de equivalência assim obtidas uma estrutura de grupo, que chamaremos o *grupo de isotopia de* X, e representaremos por $I(X)$.

O grupo de isotopia de um espaço é portanto um invariante algébrico natural e de fácil descrição. Todavia ele não tem merecido a atenção dos topólogos. A razão para isto pode talvez ser encontrada no facto de que os grupos de isotopia não se enquadram nos padrões abstratos e gerais da topologia moderna. Por exemplo, um dos aspectos peculiares de $I(X)$ é que este grupo não satisfaz nenhum dos axiomas de EILENBERG e STEENROD.

Em [3] calculamos o grupo de isotopia de S^2. No presente trabalho, demonstraremos os isomorfismos entre os grupos de isotopia de R^n, S^n e B^{n+1}. Determinaremos também a modificação que sofre o grupo de isotopia de uma variedade compacta quando dela se omite um número finito de pontos. Queremos agradecer ao nosso colega M. HIRSCH por muitas discussões estimulantes.

2. Definições e notações.

Indicaremos com R^n o espaço euclideano de dimensão n; R^1 é a recta e R^2 o plano. O símbolo 0 indica o ponto $(0, 0, \cdots, 0) \in R^n$. Com $|x|$ indicaremos a norma de $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$, isto é, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. B^n e S^{n-1} representam respectivamente a *bola* de dimensão n e *a esfera* de dimensão $n-1$, isto é, $B^n = \{x \in R^n ; |x| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in R^n ; |x| = 1\}$. B^1 é o intervalo fechado $[-1, +1]$ e S^0 consta dos pontos $-1, +1$. Em geral, S^{n-1} é a fronteira de B^n. O símbolo I significará o intervalo fechado $[0, 1]$. O *equador* de S^n é o conjunto dos seus pontos com última coordenada igual a zero. Tal conjunto é evidentemente homeomorfo a S^{n-1}, razão pela qual o indicaremos com S^{n-1}. Representaremos por H_N (resp. H_S) o *hemisfério norte* (resp. o *hemisfério sul*) de S^n, isto é, o conjunto dos pontos de S^n cuja última coordenada é ≥ 0 (resp. ≤ 0). A interseção $H_N \cap H_S$ é o equador S^{n-1}.

Toda aplicação contínua $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ estende-se a uma aplicação contínua $\tilde{f}: B^n \rightarrow B^n$ que consiste em transformar, por meio de uma rotação, o raio de B_n que passa por $x \in S^{n-1}$ no raio que passa por $f(x) \in S^{n-1}$. Mais precisamente, $\tilde{f}$ é definida pelas fór-

* Bolsista do Conselho Nacional de Pesquisas, Brasil.

mulas $\tilde{f}(0)=0, \tilde{f}(y)=|y|\cdot f(y/|y|), y\neq 0$. Tem-se $\widetilde{f o g}=\tilde{f} o \tilde{g}$ e, se f é a identidade de $S^{n-1}, \tilde{f}$ é a identidade de B^n. Assim, se f é um homeomorfismo de $S^{n-1}, \tilde{f}$ é um homeomorfismo de B^n. (Diremos sempre «homeomorfismo de X» em vez de «homeomorfismo de X sobre X»). Chamaremos $\tilde{f}$ a *extensão radial* de f.

Consideremos S^{n-1} como o equador de S^n. A aplicação $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \to (x_1, \cdots, x_n, 0)$ induz homeomorfismos de H_N (hemisfério norte de S^n) e H_S (hemisfério sul de S^n) sobre B^n, de modo que podemos considerar esses hemisférios como bolas n-dimensionais cuja fronteira comum é S^{n-1}. Então, dada $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$, temos as extensões radiais $\tilde{f}_N: H_N \to H_N$ e $\tilde{f}_S: H_S \to H_S$. As aplicações $\tilde{f}_N$ e $\tilde{f}_S$ coincidem com f em $S^{n-1}=H_N \cap H_S$ e portanto definem uma aplicação $\bar{f}: S^n \to S^n$ (pois $S^n = H_N \cup H_S$) que chamaremos a *suspensão* de f. Tem-se $\overline{f o g}=\bar{f} o \bar{g}$ e a suspensão da identidade de S^{n-1} é a identidade de S^n. Em particular, se f é um homeomorfismo de S^{n-1}, sua suspensão $\bar{f}$ é um homeomorfismo de S^n.

Dados os espaços topológicos X, Y e as aplicações contínuas $f, g: X \to Y$, uma *homotopia* entre f e g é uma aplicação contínua $F: X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0)=f(x)$ e $F(x, 1)=g(x)$ para todo $x \in X$. Quando existe uma homotopia entre f e g são *homotópicas*. A relação «f e g são homotópicas» é reflexiva, simétrica e transitiva, donde reparte o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. Se Z é outro espaço, se $f, g: X \to Y$ são homotópicas e $f', g': Y \to Z$ são também homotópicas, então $f' o f, g' o g: X \to Z$ são homotópicas. Se a aplicação identidade $i: X \to X$ é homotópica a uma aplicação constante $X \to p \in X$, então o espaço X diz-se *contrátil*. Por exemplo, $F(x, t) = (1-t)x$ é uma homotopia entre a aplicação identidade de R^n (resp. de B^n) e a aplicação constante $R^n \to 0$ (resp. $B^n \to 0$). Portanto R^n e B^n são espaços contráteis.

Sejam f, g homeomorfismos de um espaço X. Uma *isotopia* entre f e g é uma homotopia $F: X \times I \to X$ entre f e g tal que, para todo $t \in I$, a aplicação $F_t: x \to F(x, t)$ é um *homeomorfismo* de X. Se existir uma isotopia entre f e g diremos que f e g são *isotópicos*. A relação «f e g são isotópicos» é reflexiva, simétrica e transitiva, donde divide o conjunto $H(X)$ de todos os homeomorfismos de X em classes de equivalência disjuntas, chamadas as *classes de isotopia* de X. Se $f \in H(X)$, indicaremos com $[f]$ a classe de isotopia de f. Se f é isotópico a g e f' é isotópico a g' então $f o f'$ é isotópico a $g o g'$. Então pondo $[f]\cdot[g]=[f o g]$, esta operação é bem definida e introduz uma estrutura de grupo no conjunto $I(X)$ das classes de isotopia de X. O grupo $I(X)$ chama-se o *grupo de isotopia de* $\mathbf{X}$. Observemos que a composição de homeomorfismos dá ao conjunto $H(X)$ uma estrutura de grupo e o conjunto $D(X)$ dos homeomorfismos isotópicos à identidade é um subgrupo normal de $H(X)$ tal que $I(X) = H(X)/D(X)$.

3. Exemplos.

A) Uma *rotação* de R^n é uma transformação linear ortogonal cujo determinante é $+1$. Uma rotação r de R^{n+1} induz um homeomorfismo de S^n que indicaremos ainda com r e chamaremos uma rotação de S^n. Como exemplo de isotopia, demonstraremos que toda rotação de S^n é isotópica à identidade. Isto decorre do Lema 3. 1, que será usado na secção seguinte.

LEMA 3. 1. *Seja* a *um ponto e* r *uma rotação de* S^n. *Dada uma curva contínua* $\alpha: \mathrm{I} \to \mathrm{S}^n$ *tal que* $\alpha(0)=\mathrm{a}$ *e* $\alpha(1)=\mathrm{r(a)}$, *existe uma isotopia* $\mathrm{R}: \mathrm{S}^n \times \mathrm{I} \to \mathrm{S}^n$ *entre a identidade de* S^n *e a rotação* r *com as seguintes propriedades: para cada* $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$ *o homeo-*

morfismo $\mathrm{R_t}:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{R(x,t)}$ *é uma rotação de* $\mathrm{S^n}$ *e* $\mathrm{R_t(a)}=\mathrm{R(a,t)}=\alpha(\mathrm{t})$.

Demonstração. Uma rotação de S^1 consiste simplesmente da multiplicação $x\rightarrow x\cdot r$ por um número complexo r de módulo 1. Pondo $R(x,t)=x\cdot\alpha(t)$ obtemos a isotopia requerida. Suponhamos $n>1$ e o teorema verdadeiro para S^{n-1}. Tomemos em R^{n+1} uma base ortogonal $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$ tal que $e_{n+1}=a$. Uma rotação R_t de S^n fica determinada pelas imagens $R_t(e_i)$ dos elementos desta base, devendo tais imagens formarem uma base ortonormal com a mesma orientação que a base e_i. Pondo $R_t(a)=\alpha(t)$, devemos ainda definir os vectores ortonormais $R_t(e_1),\cdots,R_t(e_n)$ continuamente em função de t, de modo que a base $\{R_t(e_1),\cdots,R_t(e_n),\alpha(t)\}$ seja positivamente orientada em relação a $\{e_1,\cdots,e_n,a\}$. Ora, para cada $t\in I$, o espaço tangente $V_\alpha(t)$ à esfera S^n no ponto $\alpha(t)$ é ortogonal a $\alpha(t)$, de modo que o problema reduz-se a definir, de modo contínuo, para cada $t\in I$, uma base ortonormal $\{v_1(t),\cdots,v_n(t)\}$ de $V_{\alpha(t)}$ tal que $\{v_1(t),\cdots,v_n(t),\alpha(t)\}$ tenha determinante positivo em relação à base inicial e_i. Além disso, cada $v_j(0)$ deve ser equipolente a e_j e cada $v_j(1)$ equipolente a $r(e_j)$, $j=1,\cdots,n$. Existem as projecções estereográficas $p_1:A_1\rightarrow R^n$ e $p_2:A_2\rightarrow R^n$, onde $A_1=S^n-a$, $A_2=S^n-(-a)$. Estas projeções são homeomorfismos sobre R^n (veja [1], pág. 64).

As curvas $C_1^i,\cdots,C_n^i$, imagens dos eixos de R^n por p_i^{-1} são diferenciáveis em R^{n+1} e possuem, em cada ponto $x\in A_i$, vetores tangentes não nulos $Y_1^i(x),\cdots,Y_n^i(x)$, que são funções contínuas de x e formam uma base ortogonal do espaço tangente V_x a S^n no ponto x. Assim, se indicarmos com $X_j^i(x)$ o vector unitário de mesma direcção e sentido que $Y_j^i(x)$, o sistema $\{X_1^i(x),\cdots,X_n^i(x)\}$ é, para cada $x\in A_i$, uma base ortogonal do espaço tangente V_x, a qual chamaremos *base natural* de V_x no sistema de coordenadas y^i. Ora, em virtude da continuidade de α, existe um inteiro positivo p tal que cada subintervalo $I_k=[k/p,k/p+1/p]\subset I$ satisfaz à condição $\alpha(I_k)\subset A_i$, com $i=1$ ou 2. Basta então definir os vectores $v_1(t),\cdots,v_n(t)$ para $t\in I_k$, $k=1,\cdots,p$, de modo que esta definição seja coerente nas extremidades dos I_k. Procederemos por indução. Para $k=0$, suponhamos, para fixar as ideias, que $\alpha(I_0)\subset A_2$. Dada a base natural $\{X_1^2(a),\cdots,X_n^2(a)\}$ seja T_0 a transformação ortogonal tal que $T_0X_j^2(a)=e_j$, $j=1,\cdots,n$. Ponhamos $v_j(t)=T_0X_j^2(\alpha(t))$ para $t\in I_0$. Suponhamos agora os $v_j(t)$ definidos para $0\leq t\leq k/p$ e admitamos, para fixar as ideias, que $\alpha(I_k)\subset A_1$. Seja T_k a transformação ortogonal tal que $T_kX_j^1(\alpha\cdot(k/p))=v_j(k/p)$, $j=1,\cdots,n$. Poremos $v_j(t)=T_kX_j^1(\alpha(t))$ para $t\in I_k$, excepto se $k=p-1$. Neste caso, observamos que os $T_kX_j^1(\alpha(1))$ formam uma base do espaço tangente em $\alpha(1)=r(a)$ com a mesma orientação que a base inicial $\{e_i\}$, Com efeito, começamos com $v_j(0)=e_j$ e prosseguimos por continuidade. Tomando determinantes sempre em relação à base e_i, $det(v_j(t))$ é igual a $+1$ para $t=0$ e nunca se anula, pois os $v_j(t)$ são sempre linearmente independentes. Logo $det(T_{p-1}X_j^1(\alpha(1)))>0$. Assim existe uma rotação ρ do espaço a n dimensões tal que $\rho T_{p-1}X_j^1(\alpha(1))=r(e_j)$ para $j=1,\cdots,n$. Pela hipótese de indução, existe uma família contínua de rotações $\rho(t)$, $1-1/p<t\leq 1$, tal que $\rho(0)=$ identidade e $\rho(1)=\rho$. Modificamos então a definição dos $v_j(t)$ em I_{p-1} pondo $v_j(t)=\rho(t)T_{p-1}X_j^1(\alpha(t))$ para $1-1/p\leq t\leq 1$. Isto conclui a construção da família $\{v_j(t)\}$ e a demonstração do Lema 3. 1 também.

Corolário 3. 2. *Dada uma rotação* r *de* $\mathrm{S^n}$, *existe uma isotopia* F *entre* r *e a iden-*

tidade de S^n, *tal que para cada* $t \in I$, F_t *é uma rotação de* S^n.

Com efeito, tomemos $a \in S^n$ arbitrário. Como S^n é conexo por arcos, existe uma curva α ligando a e $r(a)$. Então aplicamos o Lema 3. 1.

B) O grupo de isotopia de um espaço X não é, em geral, abeliano. Por exemplo, se X é discreto com p elementos, $I(X)$ é o grupo π_p das permutações de p objetos. Na secção 5 demonstraremos que, se M é uma variedade compacta e A é um subconjunto finito de M, então $I(M-A)=I(M)\times \times I(A)$ e portanto, se A possui mais de um elemento, $I(M-A)$ não é abeliano.

C) Se Y é um espaço contrátil, duas aplicações $f, g: X \to Y$ são sempre homotópicas. Realmente, seja F uma homotopia entre a aplicação identidade e a aplicação constante $Y \to p \in Y$. Então $F'(x, t) = F(f(x), t)$ é uma homotopia entre f e a aplicação constante $X \to p \in Y$, donde f é homotópica a g. Em particular, dois homeomorfismos de um espaço contrátil são sempre homotópicos. Não é verdade porém que dois homeomorfismos de um espaço contrátil sejam sempre isotópicos. Realmente, como homeomorfismos isotópicos de S^n têm o mesmo grau, existem em $I(S^n)$ pelo menos dois elementos, a saber, a classe da aplicação identidade e a classe da reflexão no plano $x_{n+1} = 0$. Então segue-se da proposição 4. 1, que demonstraremos a seguir, que $I(B^{n+1})$ tem pelo menos dois elementos, embora B^{n+1} seja contrátil.

4. Isomorfismos entre $I(R^n)$, $I(S^n)$ e $I(B^{n+1})$.

Indiquemos com $E: H(S^n) \to H(B^{n+1})$ o homomorfismo que associa a cada homeomorfismo f de S^n sua extensão radial $E(f) = \tilde{f}$.

Proposição 4. 1. *O homomorfismo* $E: H\cdot(S^n) \to H(B^{n+1})$ *induz um isomorfismo* E *de* $I(S^n)$ *sobre* $I(B^{n+1})$.

Demonstração. Mostraremos em primeiro lugar que $E(D(S^n)) \subset D(B^{n+1})$. Seja f um homeomorfismo de S^n isotópico à identidade Consideremos uma isotopia $F: S^n \times I \to S^n$ então f e a identidade de S^n. Definamos agora $\tilde{F}: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ pondo $\tilde{F}(x, t) = = |x| \cdot F(x/|x|, t)$ se $x \neq 0$ e $\tilde{F}(0, t) = 0$. Então $\tilde{F}$ é uma isotopia entre $\tilde{f} = E(f)$ e a identidade de B^{n+1}. Assim E induz um homomorfismo $E: I(S^n) \to I(B^{n+1})$ definido por $E([f]) = [\tilde{f}]$. Este homomorfismo é biunívoco. Realmente, seja $F: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ uma isotopia entre a extensão radial $E(f)$ do homeomorfismo f de S^n e a identidade de B^{n+1}. Para cada $t \in I$ a aplicação $F_t: x \to F(x, t)$, sendo um homeomorfismo de B^{n+1}, transforma S^n em S^n (isto decorre imediatamente da invariância dos conjuntos abertos de um espaço euclideano por homeomorfismos) e portanto a restrição $F = \tilde{F} | (S^n \times I)$ define uma isotopia entre a restrição $f = E(f) | S^n$ e a identidade de S^n. Isto mostra que o núcleo de E reduz-se à identidade, donde E é biunívoco. Para mostrar que E é sobre $I(B^{n+1})$, usaremos um raciocínio de Alexander [2]. Seja g um homeomorfismo de B^{n+1} e g' a restrição $g | S^n$. Como vimos acima, g' é um homeomorfismo de S^n. Mostraremos que g é isotópico à extensão radial $E(g')$. Para isto, definiremos uma isotopia G que, em cada instante t, é o homeomorfismo de B^{n+1} que coincide com $E(g')$ no interior da bola de raio $1 - t$ e centro 0 e, no interior desta bola, coincide com o homeomorfismo g «concentrado» aí. Mais precisamente, definiremos $G: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ pondo

$$G(x, t) = |x| \cdot g(x/|x|) \text{ se } 1 - t \leq |x| \neq 0,$$
$$G(x, t) = (1-t) \cdot g(x/(1-t)) \text{ se } |x| \leq 1 - t \neq 0,$$
$$G(0, 0) = 0.$$

Verifica-se imediatamente que G é uma isotopia entre g e $E(g')$, e portanto $[g] =$

$=[E(g')]=E([g'])$, donde E é sobre, o que conclui a demonstração.

Tomemos um ponto a na esfera S^n. A projecção estereográfica $p_a : S^n - a \to R^n$ é um homeomorfismo sobre. (Por simplicidade, escreveremos p em vez de p_a, sempre que não houver perigo de confusão). Dada uma aplicação contínua $f: R^n \to R^n$, $p^{-1}fp: S^n - a \to S^n - a$ é contínua e $p^{-1}(f o g)p = (p^{-1}fp)(p^{-1}gp)$. Se f é a identidade de R^n, $p^{-1}fp$ é a identidade de $S^n - a$. Em particular, se f é um homeomorfismo de R^n, $p^{-1}fp$ é um homeomorfismo de $S^n - a$ e portanto pode ser estendido do modo único a um homeomorfismo $\hat{f}$ de S^n pondo-se $\hat{f}(a) = a$, pois S^n é a compactificação de ALEXANDROFF de $S^n - a$. A aplicação $f \to \hat{f}$ define um homomorfismo $P = P_a : H(R^n) \to H(S^n)$.

PROPOSIÇÃO 4. 2. *O homomorfismo* $\mathrm{P}: \mathrm{H}(\mathrm{R}^n) \to \mathrm{H}(\mathrm{S}^n)$ *induz um isomorfismo de* $\mathrm{I}(\mathrm{R}^n)$ *sobre* $\mathrm{I}(\mathrm{S}^n)$.

Demonstração. Seja $f \in H(R^n)$ isotópico à identidade por meio de uma isotopia F. Definamos $F^* : (S^n - a) \times I \to S^n - a$ pondo $F^*(x, t) = p^{-1}(F(p(x), t))$. Então F^* é uma isotopia entre $p^{-1}fp$ e a identidade de $S^n - a$. Para cada $t \in I$, a aplicação $F_t^* : x \to F^*(x, t)$ é um homeomorfismo de $S^n - a$ e portanto estende-se a um hemeomorfismo $\hat{F}_t$ de S^n pondo-se $\hat{F}_t(a) = a$. Definiremos $\hat{F}: S^n \times I \to S^n$ por $\hat{F}(x, t) = \hat{F}_t(x)$. Vê-se sem dificuldade que $\hat{F}$ é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n. Por conseguinte o homomorfismo P transforma $D(R^n)$ em $D(S^n)$ e assim induz um homomorfismo $P: I(R^n) \to I(S^n)$ pondo-se $P([f]) = [\hat{f}]$. Este homomorfismo é biunívoco. Com efeito, dado um homeomorfismo f de R^n, suponhamos que exista uma isotopia F entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n. A curva $\alpha: I \to S^n$ definida por $\alpha(t) = F(a, t)$ é tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = a$. Usando o Lema 3. 1 com a rotação r = identidade de S^n, obtemos uma isotopia R entre a identidade e si própria tal que $R(a, t) = \alpha(t)$. Seja $S_t = R_t^{-1}$. Então $S(x, t) = S_t(x)$ define uma isotopia entre a identidade e si própria tal que $S(\alpha(t), t) = a$. Definiremos então $G: S^n \times I \to S^n$ pondo $G(x, t) = S(F(x, t), t)$. G é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n, tal que $G(a, t) = a$ para todo $t \in I$. Então a restrição $G^* = G \mid (S^n - a) \times I$ é uma isotopia entre $p^{-1}fp$ e a identidade de $S^n - a$. Logo pondo $J(x, t) = p(G^*(p^{-1}(x), t))$ obtemos uma isotopia entre f e a identidade de R^n. Assim, $P([f]) = 1$ implica $[f] = 1$, donde P é biunívoco. Finalmente, dado um homeomofismo g de S^n, seja r uma rotação de S^n tal que $rg(a) = a$. Então $rg = \hat{f}$ onde f é um homeomorfismo de R^n. Ora, pelo corolário 3. 2, r é isotópico à identidade de S^n, donde $[g] = [rg] = [\hat{f}] = P([f])$. Portanto P é sobre, o que demonstra 4. 2.

COROLÁRIO 4. 3. *Cada um dos grupos* $\mathrm{I}(\mathrm{B}^1)$, $\mathrm{I}(\mathrm{R}^1)$, $\mathrm{I}(\mathrm{S}^1)$ *e* $\mathrm{I}(\mathrm{B}^2)$ *tem dois elementos.*

Com efeito, S^0 consta dos pontos -1 e $+1$ portanto $I(S^0)$ tem dois elementos. Em virtude de 4. 1, $I(B^1)$ tem também dois elementos: a classe da aplicação identidade e a classe do homeomorfismo $x \to -x$. Sabemos que B^1 é o intervalo fechado $[-1, +1]$. Ora, todo homeomorfismo do intervalo aberto $(-1, +1)$ é uma função estritamente monótona e portanto estende-se de modo único a um homeomorfismo de B^1. O mesmo ocorre às isotopias e essas extensões induzem um isomorfismo de $I((-1, +1))$ sobre $I(B^1)$. Ora, $(-1, +1)$ é homeomorfo à recta R^1, donde $I(R^1)$ é homeomorfo a $I(B^1)$. Por 4. 2, $I(S^1)$ é isomorfo a $I(R^1)$ e por 4. 1 $I(B^2)$ é isomorfo a $I(S^1)$, onde estes grupos constam de 2 elementos cada um.

Dado um homeomorfismo de f de S^n, sua suspensão $\bar{f}$ é um homeomorfismo de S^{n+1}; se g é outro homeomorfismo de S^n, $\overline{f o g}= \bar{f} o \bar{g}$. Portanto a aplicação $f \to \bar{f}$ define um homomorfismo $S: H(S^n) \to H(S^{n+1})$.

Proposição 4. 4. *O homomorfismo* $\mathrm{S}:\mathrm{H}(\mathrm{S}^n) \to \mathrm{H}(\mathrm{S}^{n+1})$ *induz um homomorfismo* S *do grupo de isotopia* $\mathrm{I}(\mathrm{S}^n)$ *no grupo de isotopia* $\mathrm{I}(\mathrm{S}^{n+1})$.

Demonstração. Devemos mostrar que se $f \in H(S^n)$ é isotópico à identidade então sua suspensão $\bar{f} \in H(S^{n+1})$ é isotópica à identidade. Seja $F: S^n \times I \to S^n$ uma isotopia entre f e a identidade de S^n. Considerando o hemisfério norte $H_N \subset S^{n+1}$ como uma bola de dimensão $n+1$, obtemos, como na demonstração de 4. 1, uma isotopia $\tilde{F}_N$ entre a extensão radial $\tilde{f}_N$ e a identidade de H_N. Anàlogamente obtemos uma isotopia $\tilde{F}_S$ entre $\tilde{f}_S$ e a identidade de H_S. Como $\tilde{F}_N$ e $\tilde{F}_S$ coincidem com F em $S^n \times I = (H_N \cap H_S) \times I$, definimos uma isotopia $\bar{F}: S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ entre $\bar{f}$ e a identidade de S^{n+1} pondo $\bar{F}(x,t) = \tilde{F}_N(x,t)$ se $x \in H_N$ e $\bar{F}(x,t) = \tilde{F}_S(x,t)$ se $x \in H_S$.

O homomorfismo $S: I(S^n) \to I(S^{n+1})$ é um isomorfismo sobre se $n=0,1$. Para $n \geq 2$, é um problema aberto determinar o núcleo e a imagem de S.

5. Um teorema sobre isotopia em variedades compactas.

O objectivo desta secção é generalizar a proposição 4. 2.

Uma *variedade topológica de dimensão* n é um espaço topológico M (de Hausdorff) conexo, tal que todo ponto $x \in M$ possui uma V_x homeomorfa ao espaço euclideano R^n. V_x será chamada uma *vizinhança coordenada* do ponto x. Toda variedade M é um espaço localmente conexo e localmente compacto. Por simplicidade, suporemos ainda que a topologia de M é definida por meio de uma métrica, o que acontece por exemplo se M possui uma base enumerável de abertos. Esta restrição não é lògicamente necessária mas simplificará a demonstração de 5. 4. Indicaremos então com $d(x,y)$ a distância entre 2 pontos $x, y \in M$. Exemplos de variedades de dimensão n: R^n, S^n e todo subconjunto aberto de uma variedade de dimensão n. Uma variedade topológica de dimensão 1 é homeomorfa a R^1 ou a S^1.

No restante desta secção, consideraremos uma variedade *compacta* M de dimensão $n \geq 2$ e um subconjunto finito $A = \{a_1, \cdots, a_p\} \subset M$.

Lema 5. 1. *Sejam* $\mathrm{a} \in \mathrm{M}$ *e* $\mathrm{W}_1, \cdots, \mathrm{W}_p$ *abertos disjuntos de* M *tais que* $\bigcup \mathrm{W}_i \cup \mathrm{a}$ *é aberto em* M. *Então existe um único índice* $\mathrm{j}, 1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{p}$, *tal que* $\mathrm{W}_j \cup \mathrm{a}$ *é aberto em* M.

Demonstração. Seja V uma vizinhança *conexa* de a tal que $V \subset \bigcup W_i \cap a$. Como $\dim M \geq 2$, $V-a$ é conexo. Além disso, $V-a \subset \bigcup W_i$. Portanto $V-a = \bigcup (W_i \cap (V-a))$. Sendo os $W_i \cap (V-a)$ abertos disjuntos, a conexão de V implica que todos eles são vazios com exeção de um, $W_j \cap (V-a) = V-a$. Segue-se que $V \subset W_j \cup a$, o que implica imediatamente que $W_j \cup a$ é aberto. Suponhamos agora que $W_k \cup a$ seja aberto, $k \neq j$. Então existe uma vizinhança V' de a tal que $V' \subset W_k \cup a$. Portanto $V \cap V' \subset (W_i \cup a) \cap \cap (W_k \cup a) = a$, donde $V \cap V' = a$, o que é absurdo pois $V \cap V'$ é um conjunto aberto.

Observação. É fácil ver que o lema 5. 1 é falso numa variedade de dimensão 1.

Para uso nos dois Lemas seguintes, convencionaremos chamar *entorno* de um ponto $a \in A$ a todo o conjunto aberto $V \subset M - A$ tal que $V \cup a$ é aberto em M. Em outras palavras, um entorno de a é um conjunto da forma $V = V^* - a$, onde $V^* \subset M$ é uma vizinhança de a que não contém nenhum outro ponto de A.

LEMA 5. 2. *Sejam* f *um homeomorfismo de* $M-A$ *e* $V_1, \cdots, V_p$ *entornos disjuntos dos pontos* $a_1, \cdots, a_p$ *respectivamente. Então existe uma única permutação* σ *dos índices* $1, \cdots, p$ *tal que* $f(V_1), \cdots, f(V_p)$ *são entornos (disjuntos) dos pontos* $a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}$ *respectivamente.*

Demonstração. O complementar de $\bigcup V_i$ em $M-A$ é compacto e portanto é também compacto o complementar de $\bigcup f(V_i)$ em $M-A$. Isto significa que $\bigcup f(V_i) \bigcup A$ é aberto em M, donde $\bigcup f(V_i)$ é um entorno de cada elemento de A, isto é, $\bigcup f(V_i) \bigcup a_j$ é aberto em M para cada índice j. Pelo Lema 5. 1, dado j, existe um único índice $\rho(j)$ tal que $f(V_{\rho(j)})$ é um entorno de a_j. A aplicação $j \to \rho(j)$ é uma permutação dos índices $1, \cdots, p$. Para prová-lo, basta mostrar que, para cada índice k existe um j com $k=\rho(j)$. Realmente, o fecho $K=\overline{f(V_k)}$ intersecta A pois do contrário K seria um compacto tal que $f(V_k) \subset K \subset M-A$. Então $f^{-1}(K)$ seria um compacto tal que $V_k \subset \subset f^{-1}(K) \subset M-A$ e assim V_k não seria um entorno de $a_k \in A$. Seja $a_j \in A \cap K$. Então $f(V_{\rho(j)})$ é um entorno de a_j, donde $f(V_{\rho(j)}) \cap f(V_k) \neq \phi$, o que obriga $k=\rho(j)$. Chamando de σ à permutação ρ^{-1}, vê-se que $f(V_j) = f(V_{\rho\sigma(j)})$ é um entorno de $a_{\sigma(j)}$. Para concluir a demonstração, resta sòmente provar a unicidade de σ. Seja τ uma permutação satisfazendo à condição do Lema. Para cada índice i, $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\tau(i)}$. Tomando $j=\sigma^{-1}\tau(i)$, temos $a_{\sigma(j)} = a_{\tau(i)}$. Portanto $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\sigma(j)}$. Ora, $f(V_j)$ também goza desta propriedade, donde $f(V_j) \cap f(V_i) \neq \phi$. Segue-se que $i=j$. Isto significa que, para todo i, $\sigma^{-1}\tau(i) = i$, donde $\sigma=\tau$.

LEMA 5. 3. *Todo homeomorfismo* f *de* $M-A$ *estende-se de modo único a um homeomorfismo* $\hat{f}$ *de* M.

Demonstração. Sendo $M-A$ denso em M, a unicidade de $\hat{f}$ é evidente. Para demonstrar a existência, tomemos entornos $V_1, \cdots, V_p$ como no Lema 5. 2. Assim obtemos a permutação σ tal que $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\sigma(i)}$. Ponhamos então $\hat{f}(x)=f(x)$ para $x \in M-A$ e $\hat{f}(a_i)=a_{\sigma(i)}$ para $a_i \in A$. Resta verificar que $\hat{f}$ é contínua em cada ponto $a_j \in A$. Seja U um entorno arbitrário de $a_{\sigma(j)}$ contido em $f(V_j)$. Aplicando novamente o Lema 5. 2, desta vez com o homeomorfismo f^{-1} e os entornos $f(V_1), \cdots \cdots, f(V_{j-1}), U, f(V_j), \cdots, (V_p)$, obtemos uma permutação τ tal que $V_i=f^{-1}f(V_i)$ é um de $a_{\tau\sigma(i)}, i \neq j$, e $f^{-1}(U)$ é um entorno de $a_{\tau\sigma(i)}$. Ora, V_i é um entorno de a_i; como os V_i são disjuntos, isto obriga a $\tau\sigma(i)=i$ para $i \neq j$. Consequentemente $\tau\sigma(j)=j$ também. Assim $f^{-1}(U)$ é um entorno de a_j, mostrando que $\hat{f}$ é contínua no ponto a_j.

Dado um homeomorfismo $f \in H(M-A)$, indicaremos com $\hat{f} \in H(M)$ sua extensão a M e com $\sigma(f) \in H(A)$ a restrição $\hat{f}|A$, a qual se identifica com a permutação σ tal que $f(a_i)=a_{\sigma(i)}$. É imediato que $\widehat{f \circ g} = \hat{f} \circ \hat{g}$ e $\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ \sigma(g)$, de modo que a aplicação $f \to (\hat{f}, \sigma(f))$ define um homomorfismo $P: H(M-A) \to H(M) \times H(A)$, onde $H(M) \times H(A)$ indica o produto directo destes grupos. Observemos que $H(A)=I(A)= =\pi_p=$ grupo das permutações de p objectos.

PROPOSIÇÃO 5. 4. *O homomorfismo* P *definido acima induz um isomorfismo* P *do grupo de isotopia* $I(M-A)$ *sobre o produto directo* $I(M) \times I(A)$ *dos grupos de isotopia* $I(M)$ *e* $I(A)$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que P transforma $D(M-A)$ em $D(M) \times D(A)$, isto é, que se $f \in H(M-A)$ é isotópico à identidade então $\sigma(f)$ é a permutação identidade e $\hat{f}$ é isotópico à identidade de M. Com efeito, seja $F:(M-A) \times I \to M-A$ uma isotopia entre f e a identidade de $M-A$. Para cada $t \in I$, $F_t: x \to F(x,t)$ é um homeomorfismo de $M-A$. Logo existe $\sigma=\sigma(F_t)$ tal que $\lim F(x,t)=a_{\sigma(j)}$ quando $x \to a_j$, $x \in M-A$, para todo $a_j \in A$. Mostraremos que $\sigma(F_t)$ não depende de t. Como $\sigma(F_1)$ é o elemento identidade de $H(A)$, concluiremos que $\sigma(f)=\sigma(F_0)$ é o elemento identidade de $H(A)$. Para isto, basta mostrar que existe $\delta>0$ tal que $|t-t'|<\delta$ implica $\sigma(F_t)=\sigma(F_{t'})$. Ora, seja $\epsilon>0$ tal que $\epsilon<\min\{d(a_i,a_j), i\neq j=1,\cdots,p\}$. Existe $\delta>0$ tal que $|t-t'|<\delta$ implica $d(F(x,t), F(x,t'))<\epsilon$ para todo $x \in M-A$. Fixemos t, t' como acima e um índice j. Sejam $\sigma'=\sigma(F_{t'})$. Fazendo $x \to a_j, x \in M-A$, temos $d(a_{\sigma(j)}, a_{\sigma'(j)})=\lim d(F(x,t), F(x,t'))\leq\epsilon$, donde $a_{\sigma(j)}=a_{\sigma'(j)}$. Sendo j arbitrário, $\sigma=\sigma'$, o que demonstra que $\sigma(f)$ é a permutação identidade. Ponhamos em seguida $\hat{F}(x,t)= =F(x,t)$ para $x \in M-A, t \in I$ e $\hat{F}(a_j,t)= =a_{\sigma(j)}$ para $a_j \in A$. Dado $\epsilon>0$, existem $\eta, \delta>0$ tais que $d(x,a_j)<\eta$ e $|t-t_0|<\delta$ implicam $d(F(x,t_0),a_j)<\epsilon/2$ e $d(F(x,t), F(x,t_0))<\epsilon/2$, donde $d(F(x,t),a_j)<\epsilon$. Isto mostra que $\hat{F}: M \times I \to M$ é contínua em $A \times I$ e portanto é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade.

Assim, se pusermos $P([f])=([\hat{f}], \sigma(f))$, obteremos um homomorfismo bem definido $P: I(M-A) \to I(M) \times I(A)$. O facto de que P é um isomorfismo sobre resultará dos Lemas 5. 5, 5. 6 e 5. 7, que demonstraremos a seguir.

LEMA 5. 5. *Seja* $B \subset M$ *um subconjunto fechado e* $\alpha: I \to M$ *uma curva contínua tal que* $\alpha(I) \subset M-B$. *Então existe uma família contínua* $h_t, t \in I$, *de homeomorfismos de* M, *tais que* $h_0=$ *identidade,* $h_t(\alpha(t))=\alpha(0)$ *e* $h_t(b)=b$ *para todo* $t \in I$ *e* $b \in B$. *Se* $\alpha(0)= =\alpha(1)=a$ *então existe também uma família contínua* $k_t, t \in I$, *de homeomorfismos de* M *tais que* $k_0=k_1=$ *identidade,* $k_t(b)=b$ *para todo* $b \in B$ *e* $t \in I$ *e, além disso,* $k_t(h_t(a))=a$.

Demonstração. Existe um inteiro $m>0$ tal que, para $I_j=[j/p,(j+1)/p], j=0,\cdots,m-1$, tem-se $\alpha(I_j) \subset V_j$, onde os V_j são vizinhanças coordenadas em M, contidas em $M-B$. Suporemos ainda que $a \in V_j$ implica $V_j=V_0$, o que é sempre possível fazer. Definiremos a família h_t indutivamente, para $t \in I_j$, de modo que esta definição seja coerente nas extremidades. Seja $f_0: V_0 \to R^n$ um homeomorfismo tal que $f_0(\alpha(0))=0$. Para $t \in I_0$, poremos $h_t(x)=x$ se $x \notin V_0$ e $h_t(x)=f_0^{-1}(f_0(x)- -f_0(\alpha(t)))$ se $x \in V_0$. Note-se que h_t em V_0 consiste da translação $y \to y-f_0(\alpha(t))$ de R^n transportada para V_0. Como uma translação induz a aplicação identidade no infinito, segue-se que $h_t(x) \to x_0$ se $x \in V_0$ tende para o ponto x_0 da fronteira de V_0. Portanto h_t é contínua na fronteira de V_0, donde é homeomorfismo de M. Tem-se evidentemente $h_0=$identidade, $h_t(\alpha(t))=\alpha(0)$ e $h_t(b)=b, b \in B$. Alem disso h_t depende contìnuamente de t. Suponhamos agora h_t definido para $0\leq t\leq j/m$ de modo a satisfazer a estas condições e definamos h_t para $t \in I_j$. Seja $f_j: V_j \to R^n$ um homeomorfismo tal que $f_j(\alpha(j/m))=0$. Poremos, para $t \in I_j, h_t(x)=h_{j/m}(x)$ se $x \notin V_j$ $h_t(x)=h_{j/m}f_j^{-1}(f_j(x)-f_j(\alpha(t)))$ se $x \in V_j$. Vê-se imediatamente que esta definição de h_t dá a $h_{j/m}$ o mesmo valor que a anterior e que cumpre as condições requeridas, o que completa a primeira parte da demonstração. Para demonstrar a segunda parte, admitamos $\alpha(0)=\alpha(1)=a$. Então $h_0(a)=h_1(a)=a$ e a curva fechada $t \to h_t(a)$ inteiramente contida em V_0. Com efeito, se $t \in I_0$, é evidente que $h_t(a) \in V_0$. Suponhamos que $h_t(a) \in V_0$ para $0\leq t\leq j/m$. Então, se $t \in V_j$, ou $a \in V_j$, o que implica $h_t(a) \in V_j=V_0$, ou então $a \notin V_j$, caso em que $h_t(a)=h_{j/m}(a) \in V_0$ pela hipótese de indução. Seja então $k_t, t \in I$, o homeomorfismo de M definido por $k_t(x)=f_0^{-1}(f_0(x)- -f_0 h_t(a)))$ se $x \in V_0, k_t(x)=x$ se $x \notin V_0$. A família k_t assim definida satisfaz às condições requeridas na segunda parte do Lema 5. 5.

Lema 5. 6. *Seja* $f \in H(M-A)$ *tal que* $\hat{f} \in H(M)$ *é isotópico à identidade e* $\sigma(f)$ *é o elemento identidade de* $H(A)$. *Então* f *é isotópico à identidade.*

Demontração. Seja $G_0: M \times I \to M$ uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade. Ponhamos $\alpha_1(t) = G_0(a_1, t)$. Usando o Lema 5. 5 com $B = \phi$ e $\alpha = \alpha_1$, obtemos as famílias de homeomorfismos h_t^1 e k_t^1 satisfazendo às condições ali estipuladas. Ponhamos agora $G_1(x, t) = h_{2t}^1 G_0(x, 2t)$, $x \in M$, $0 \leq t \leq 1/2$ e $G_1(x, t) = k_{2-2t}^1 h_{2-2t}^1(x)$, $x \in M$, $1/2 \leq t \leq 1$. Isto define uma isotopia $G_1: M \times I \to M$ entre $\hat{f}$ e a identidade de M, tal que $G_1(a_1, t) = a_1$ para todo $t \in I$. Seja agora $\alpha_2(t) = G_1(a_2, t)$. Então $\alpha_2(t) \in M - a_1$. Usando o Lema 5. 5, desta vez com $B = \{a_1\}$ e $\alpha = \alpha_2$ obtemos as famílias de homeomorfismos h_t^2 e k_t^2, $t \in I$, com as propriedades ali mencionadas. Pomos então $G_2(x, t) = h_{2t}^2 G_1(x, 2t)$, $x \in M$, $0 \leq t \leq 1/2$ e $G_2(x, t) = k_{2t-2}^2 h_{2t-2}^2(x)$, $x \in M$, $1/2 \leq t \leq 1$. Isto define uma isotopia $G_2: M \times I \to M$ entre $\hat{f}$ e a identidade, tal que $G_1(a_1, t) = a_1$, $G_2(a_2, t) = a_2$, para todo $t \in I$. Prosseguindo anàlogamente, concluiremos a existência de uma isotopia $G = G_p$ entre $\hat{f}$ e a identidade, tal que $G(a_i, t) = a_i$, $i = 1, \cdots, p$, para todo $t \in I$. Então $G' = G \mid (M - A) \times I$ é uma isotopia entre f e a identidade, o que demonstra o Lema 5. 6,

Lema 5. 7. *Dado um homeomorfismo* $g \in H(M)$ *e uma permutação* $\sigma \in H(A)$, *existe um homeomorfismo* $f \in H(M)$ *isotópico a* g *e tal que* $f(a_i) = a_{\sigma(i)}$, *isto é, tal que* $g = \hat{f}$ *e* $\sigma = \sigma(f)$.

Demonstração. Como M é conexo por arcos, existe uma curva $\alpha_1: I \to M$ tal que $\alpha_1(0) = a_{\sigma(1)}$ e $\alpha_1(1) = g(a_1)$. Usando o Lema 5. 5, obtemos um homeomorfismo h^1 de M, isotópico à identidade e tal que $h^1(g(a_1)) = a_{\sigma(1)}$. Pondo $f^1 = h^1 g$, vemos que f^1 é isotópico a g e $f^1(a_1) = a_{\sigma(1)}$. Suponhamos por indução, definido o homeomorfismo f^{j-1}, isotópico a g e tal que $f^{j-1}(a_i) = a_{\sigma(i)}$ para $i = 1, \cdots, j-1$. Ponhamos $B = \{a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(j-1)}\}$. Como a dimensão de M é ≥ 2, $M - B$ é conexo, logo existe uma curva $\alpha_j: I \to M$, $\alpha_j(I) \subset M - B$, tal que $\alpha_j(0) = a_{\sigma(j)}$, $\alpha_j(1) = f^{j-1}(a_j)$. Usando o Lema 5. 5, com B e α_j, obtemos o homeomorfismo h^j, isotópico à identidade, tal que $h^j(b) = b$ para $b \in B$ e $h_j(f^{j-1}(a_j)) = a_{\sigma(j)}$. Então $f^j = h^j f^{j-1}$ é um homeomorfismo de M, isotópico a g, tal que $f^j(a_i) = a_{\sigma(i)}$, $i = 1, \cdots j$, o que completa a indução. Poremos $f = f^p$ e o Lema 5. 7. estará demonstrado.

Para completar os resultados desta secção observemos que, se M é uma variedade compacta de dimensão 1 (isto é, se M é homeomorfa ao círculo S^1), e $A = \{a_1, \cdots, a_p\} \subset M$, então $M - A = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ onde os C_i são conexos abertos, disjuntos e homeomorfos à recta R^1. Logo, dar um homeomorfismo f de $M - A$ consiste em dar uma permutação $\sigma = \sigma(f)$ dos C_i, isto é, dos índices $1, \cdots, p$ e, para cada índice i, um homeomorfismo $f_i: C_i \to C_{\sigma(i)}$. Indiquemos com Z_2 o grupo de dois elementos. A aplicação $f \to (f_1, \cdots, f_p, \sigma)$ induz um isomorfismo de $I(M-A)$ sobre o grupo que consiste das sequências $x = (x_1, \cdots, x_p, \sigma)$ com $x_i \in Z_2$ e σ uma permutação de p objetos, sendo o produto neste grupo definido por $xy = (x_{\tau(1)} y_1, \cdots, x_{\tau(p)} y_p, \sigma\tau)$, se $y = (y_1, \cdots, y_p, \tau)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. H. A. Newman, *Topology of plane sets of points.* Cambridge University Press, 1951. (2nd. edition).

[2] J. W. Alexander, *On the deformations of an* n-*cell.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 9 (1923) 406-407.

[3] E. Lima, *Homeomorfismos e isotopias numa esfera.* (A aparecer na *Gazeta de Matemática*).