donde

$$x + y = 2 k \pi \qquad (k \text{ int.}^o).$$

Entrando com este valor na primeira das equações (1), *vem também:*

$$\pm 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -\operatorname{sen} a$$

donde (*para* $a \neq k\pi$)

$$\cos \frac{x-y}{2} = \pm 1 \quad ou \quad x - y = 2k'\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (k' \text{ int.}^o).$$

Do valor da soma e da diferença entre x *e* y *obtem-se a solução*

$$x = (k + k')\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad e \quad y = (k - k')\pi \mp \frac{2\pi}{3}$$

que satisfazem à condição do enunciado.

No caso de ser $a = k\pi$, *a segunda das equações* (1) *daria*

$$\pm 2 \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -1$$

o que conduzia ainda ao mesmo resultado.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência — 1957.**

Ponto n.º 1

4223 — Estabeleça a equação da esfera que é tangente ao plano $x + y + 2(z - 1) = 10$ e contém a circunferência

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 8y + 27 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

4224 — Defina intervalo de convergência de uma série $S(x) = \Sigma \alpha_n x^n$ e descreva um processo para a sua determinação.

Mostre que $S(x)$ tem sempre algum ponto de convergência, qualquer que seja a sucessão α_n. Qual é esse ponto?

Se $S(a)$ converge e $S(-a)$ diverge, qual o intervalo de convergência? Razão disso.

Estude $S(x) = \sum \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}(n^2-1)}$ (intervalo de convergência e natureza de série no extremo superior desse intervalo).

4225 — Defina função contínua $f(x)$ em X fechado, e mostre

a) $Y = f(X)$ é sempre limitado.

b) Se uma tal função se anula sobre $x_n \to a$ (a ponto de acumulação de X), qual é o valor de $f(a)$?

c) Considere $f(x) = x^n \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ com n natural. Calcule $\omega(0)$. Com que valor $f(0)$ fica $f(x)$ contínua no ponto $x = 0$?

d) Determine $f'(x)$ $(x \neq 0)$ e $f'(0)$ $(n > 1)$ e indique o menor valor de n para o qual $f'(x)$ é contínua no ponto $x = 0$.

4226 — *a*) Usando o teorema de Binet-Cauchy, relacione a característica do produto $P = AB$ com as características de A e B.

Se A é regular, que particularidade se verifica? Justifique.

b) Determine k de modo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

tenha um valor próprio nulo.

c) Valores e vectores próprios da matriz para esse valor de k.

Ponto n.º 2

4227 — Um plano é tangente à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6z - 5$$

e o seu traço em XOY é a recta de equações

$$y = ax + 1, \quad z = 0.$$

a) Dê a equação desse plano.

Variando a, cada posição daquela recta é sempre traço de um plano tangente:

b) Determine o valor de a ao qual corresponde um plano tangente paralelo a Oz.

c) Dê as equações do lugar dos pontos da esfera que são pontos de contacto dos diversos planos tangentes correspondentes aos diferentes valores de a.

4228 — Defina convergência uniforme de $S(x) = \Sigma u_n(x)$ no conjunto X e mostre que, sendo Σa_n absolutamente convergente e $\left|\frac{u_n(x)}{a_n}\right| \leqslant 1$ para todo o x de X, $S(x)$ converge uniformemente em X.

b) Sendo $u_n(x)$ contínua em X (fechado), e designando x_0 um ponto de acumulação de X, qual o limite de $S(x)$ ao tender x para x_0?

c) Estude a série $\sum_0^\infty \frac{1-2^n}{2+n^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$ (intervalo de convergência e natureza da série nos seus extremos).

4229 — Designe $f(x)$ uma função definida e crescente em (a, b), contínua em qualquer intervalo $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ mas não contínua em (a, b). Mostre que existem $f(a+0)$ e $f(b-0)$, relacione esses valores com $f(a)$ e $f(b)$, respectivamente, e supondo $f(a+0) \cdot f(b-0) < 0$ mostre que é $f(x') = 0$ com algum x' interior a (a, b).

Se, mantendo as restantes condições, se consente um número finito de pontos de descontinuidade interiores a (a, b), mostre que $\omega(x)$ tem valores extremos.

Calcule $\omega(0)$ e $f'(0)$ para

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{4+e^{1/x^2}} \quad (x \neq 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

4230 — *a*) Mostre, que sendo independentes as $n\ (< m)$ primeiras linhas da matriz $A = |a_i^k|\ (m \times n)$ são compatíveis a n primeiras equações do sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^1 x_n = b_m \end{cases}$$

Indique um determinante principal e a condição de possibilidade do sistema.

b) Usando os teoremas de Cramer e Rouché, discuta e resolva o sistema

$$\begin{cases} x - y + z + 2u = -1 \\ 2x + 3y - z + u = 3 \\ x + 2y - z - u = 3 \\ 2x + 2z + \alpha u = \beta \end{cases}$$

para diferentes valores de α e β.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame de Frequência — Curso Geral — 2-957.**

Teoria

4231 — Teorema de Kronecker e dependência linear.

4232 — Produto externo e produto misto de vectores — definição, propriedades e significado geométrico.

Prática

4233 — Se z_1, z_2 e z_3 são complexos correspondentes aos vértices (contados no sentido directo) dum triângulo no plano de Argand, de lados a, b, c e ângulos A, B, C, prove que

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{a}{b}(\cos C + i \operatorname{sen} C)$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{c}{b}(\cos A - i \operatorname{sen} A)$$

($i \rightarrow$ unidade imaginária) e, em seguida, utilizando a identidade

$$(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3) + (z_3 - z_1) = 0$$

prove que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

4234 — Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = 125$$

sendo ω uma raíz complexa da unidade, de índice 5. Não se esqueça que ω é uma raíz primitiva e por isso é

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$

4235 — Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + az = 11 \\ 2x - y + 3z = c \\ x + 7y + 3z = 24 \end{cases}$$

e determine os valores de a e c para que o sistema seja:

1.º indeterminado

2.º impossível

3.º determinado.

Resolva no primeiro caso.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de Frequência — Curso de Química — Fev. 1957.

4236 — Verifique que $\sqrt{3}$ não é um número racional e escreva duas classes contíguas de números racionais que definam $\sqrt{3}$.

4237 — Mostre que, sendo $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ uma sucessão convergente, pode extrair dela uma infinidade de sucessões, distintas a partir de certa ordem, convergentes para o mesmo limite.

4238 — Mostre que a função

$$f(x,y)=\frac{(2x+3)\,x^3+y\,(x^2+y^2)}{(2x+3)\,(x^2+y^2)}$$

é contínua no ponto $(0,0)$.

4239 — Determine se a função $e^z(\operatorname{sen} z-1)$ é periódica e calcule os valores de z que a tornam nula.

4240 — Mostre que o conjunto dos múltiplos de 6 e o conjunto dos múltiplos de 3 formam dois grupos e que um deles é invariante do outro. Construa o respectivo grupo factor e aplique o teorema da homomorfia.

4241 — Dada uma multiplicidade vectorial a 4 dimensões, encontre uma base independente para a submultiplicidade gerada pelos vectores $(1,1,2,-1)$, $(2,1,-1,0)$, $(8,5,1,-2)$.

4242 — $\mathfrak{M}_5$ é um módulo com respeito a um corpo e tem 5 dimensões. $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\in\mathfrak{M}_5$ são 3 vectores independentes. Determine quantos vectores independentes há no conjunto $\mathfrak{C}=\{\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3,\mathfrak{m}_4,\mathfrak{m}_5\}$, com:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1 &= 7\mathfrak{a}+3\mathfrak{b}-23\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_2 &= 11\mathfrak{b}-17\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_3 &= 57\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_4 &= 19\mathfrak{a}+13\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_5 &= \mathfrak{a}+93\mathfrak{b}+197\mathfrak{c}.
\end{aligned}$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 15-2-57.

4243 — *a*) Dada a tabela de valores $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline u & 2 & 1 & m & 17 & n\end{array}$ dum polinómio do terceiro grau, determinar m e n por forma que a soma das suas raízes seja igual à unidade.

b) Aplicar a teoria dos determinantes ao estudo do sistema

$$\begin{aligned}
x &= 6-y-z\\
u &= 1+z\\
z &= 1+y\\
y &= z
\end{aligned}$$

R: a) *O problema pode resolver-se, por exemplo, do seguinte modo: o polinómio* $p_0x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$ *satisfaz às condições*

$$\begin{cases}
p_3=2\\
p_0+p_1+p_2+p_3=1\\
8p_0+4p_1+2p_2+p_3=m\\
27p_0+9p_1+3p_2+p_3=17\\
64p_0+16p_1+4p_2+p_3=n\\
-\dfrac{p_1}{p_0}=1
\end{cases}$$

e deste sistema obtem-se com muita facilidade a solução

$$\begin{cases}
p_0=1\\
p_1=-1\\
p_2=-1\\
p_3=2\\
m=4\\
n=46.
\end{cases}$$

b) *A matriz do sistema* $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$ *é singular e tomando para determinante principal* $\Delta=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$ *constrói-se o único determinante característico* $\Delta'=\begin{vmatrix}0&1&1&6\\1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=1$ *que, sendo diferente de zero, justifica a impossibilidade do sistema* (*teorema de* Rouché).

4244 — *a*) Provar que o resto da divisão do polinómio $f(x)$ por $(x-a)$ é $f(a)$ e apresentar a regra que permite obter os coeficientes do polinómio cociente. Quando estes e o resto são positivos, que é a em relação aos zeros de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc.? Porquê?

Achar o resto da divisão de $f(x)$ por $\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, supondo conhecidos os restos da divisão de $f(x)$ por $(x-x_i)$ $(i=1,\cdots n)$.

b) Anunciar a condição necessária e suficiente para que dois polinómios $f(x)$ e $g(x)$ admitam raízes comuns. Definir sub-resultante de índice i.

Supondo que $f(x)$ e $g(x)$ admitem em comum uma única raíz, designando por R_1 o sub-resultante de índice 1 e por R_1^1 o determinante que se obtem de R_1 substituindo os elementos da última linha pelos correspondentes na penúltima linha do resultante mostrar que, se for λ a raíz comum, $R_1 \lambda + R_1^1 = 0$ e inversamente.

4245 — *a*) Definir produto de matrizes e mostrar que o produto de duas matrizes hermíticas A e B só é matriz hermítica quando A e B são permutáveis.

Enunciar o teorema de Binet-Cauchy e provar que para as matrizes $U(m \times n)$ e $V(n \times m)$ se tem $|UV| = 0)$ com $m > n$.

b) Definir valores próprios $\lambda_r (r = 1, \cdots n)$ da matriz $C = \|c_i^k\|$ e mostrar que $\Sigma c_r^r = \Sigma \lambda_r$ e $\pi \lambda_r = |C|$.

Provar que as matriz C e $T^{-1} C T$ tem os mesmos valores próprios.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência extraordinário — 3-4-57.**

4246 — Resolver os seguintes problemas:

a) Achar a equação das raízes comuns dos dois polinómios

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

b) Estudar o sistema

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ x + \quad y + z &= 0 \\ \lambda x + \quad y + z &= 0 \end{aligned}$$

pela teoria dos determinantes.

R: *O resultante* R *dos dois polinómios pode obter-se adoptando a seguinte disposição de cálculo*

1	−2	1	−2	
	1	−3	−4	12
−1	−1	−5	14	
1	−7	15	−2	
7	1	5	−14	

$$R = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 14 \\ -7 & 15 & -2 \\ 1 & 5 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

e o primeiro sub-resultante diferente de 0 *é* $R_1 = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} = -50$.

Como $R_1^1 = \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 100$ *a equação das raízes comuns é* $-50x + 100 = 0 \cdot x = 2$ *é pois a raiz comum aos dois polinómios.*

b) *O sistema é homogéneo e portanto admite a solução nula* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$ *Se fôr indeterminado admitirá também soluções não nulas, isto é, se* $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *condição que é satisfeita com* $\lambda = 1$. *O grau de indeterminação será dois e o sistema é equivalente à equação* $x + y + z = 1$.

4247 — Como se justifica a determinação do *m. d. c.* de dois polinómios A e B pelo método das divisões sucessivas?

Enuncie o teorema de Euler.

Considerando o polinómio $f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + + \cdots + p_n$ de coeficientes reais, provar que o limite excedente do módulo dos zeros de $f(z)$ é $\Gamma = \dfrac{P_0 + \text{máx. } P_i}{P_0}$, com $|p_i| = P_i$.

Mostrar que se o polinómio admite a raíz $a + bi$ também admite a raíz $a - bi$ e apresentar o resto da divisão de $f(z)$ por $z^2 - a$.

4248 — Provar que o quadrado de um determinante qualquer é determínante simétrico.

Considerando a substituição linear $y_i = a_i^\alpha x_\alpha$ $(i = = 1, \cdots n; \alpha = 1, \cdots n)$ com módulo de transformação $|A| = |a_i^k|$ qual é a substituição inversa? Se $z_i = = b_i^\alpha y_\alpha$, qual é o módulo de transformação de $z_i = c_i^\alpha x_\alpha$?

Mostrar que os valores λ que satisfazem à relação $y_i = \lambda x_i$ são os valores próprios de $\|a_i^k\|$.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 10-1955.**

4249 — Dado um cone achar a natureza da secção nele efectuada pelo segundo bissector. Determinar um ponto da secção.

4250 — Dada uma superfície de revolução achar o plano tangente paralelo a uma direcção, sendo dado o meridiano onde existe o ponto de contacto.

4251 — Mostrar que o centro dum anel é um sub-anel.

4252 — Mostrar que o ideal direito gerado pelo idempotente $e = e^2$ é de forma $e\mathfrak{A}$.

4253 — Seja $(1, 2, \cdots n)$ um conjunto de números inteiros e seja f uma aplicação deste conjunto num conjunto $E\,[f(i) \in E]$. Seja $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutação do grupo simétrico e defina-se a nova aplicação

$$\sigma f = f'$$

por

$$\sigma f(i) = f(\sigma^{-1} i) .$$

Mostre que a correspondência $f \to \sigma f$ é biunívoca.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º exame de frequência — 2.ª chamada — 28-5-57.**

4254 — Dado o subespaço de R_5

$$L \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + \phantom{x_4 + {}} x_5 = 1 \\ \phantom{3x_1 + 4x_2 + x_3 + {}} x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - \phantom{4x_2 + {}} x_3 - x_4 = 3 , \end{cases}$$

determine a sua parte imprópria quando da passagem a P_5. Determine pontos linearmente independentes de L (em P_5) que o gerem.

4255 — Seja L um subespaço de P_n e Q_0, Q_1, Q_2 três pontos distintos e não colineares. Mostre que o plano definido pelos três pontos está contido em L.

4256 — Dado o hiperbolóide de revolução gerado por uma recta enviezada com o eixo e um ponto, verifique se o ponto pertence ao hiperbolóide. Dado um ponto anterior determine o plano tangente que passa pelo ponto e tem o ponto de contacto sobre um paralelo.

4257 — Dado um cone e uma recta determine os pontos de intersecção de cone com a recta.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — (1.ª chamada) — 7-1955.**

4258 — É dado um anel simples $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$. Mostre que a característica do anel é de ordem prima ou infinita. Anel simples é todo aquele que tem sòmente como ideais bilaterais o ideal zero e o ideal unidade.

4259 — É dado um grupo $\mathfrak{G}$; sabendo que $\mathfrak{H}$ contido no centro é um invariante, mostre que sendo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ cíclico, então $\mathfrak{G}$ é abeliano.

4260 — Dado $\dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + 1$ mostre que o polinómio que se obtém substituindo x por $x + 1$ é irredutível em $\mathfrak{R}[x]$ em que $\mathfrak{R}$ é o corpo dos racionais.

4261 — Mostre que sendo A matriz diagonal, qualquer potência de A é diagonal. Sendo A normal mostre que existe B também normal tal que $B^k = A$ qualquer que seja $K > 0$.

4262 — Sendo $f(x)$ e $g(x)$ dois polinómios e tendo f grau maior do que g, mostre que se $f(x) + i\,g(x)$ tem todas as raízes imaginárias e do mesmo lado do eixo real, o polinómio

$$F(x) = p \cdot f(x) + q \cdot g(x)$$

tem todas as raízes reais e distintas para quaisquer valores reais de p e q.

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame de 2.ª frequência — 1956.**

4263 — Reduza a um polinómio nas funções simétricas fundamentais,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 x_3 + (x_1 - x_3)^2 x_2 + (x_2 - x_3)^2 x_1$$

4264 — Prove o teorema fundamental relativo aos polinómios simétricos.

Estabeleça a regra do peso e do grau.

4265 — Quantas raízes positivas, negativas e imaginárias tem o polinómio,

$$f(x) = x^5 - x^4 + 1 .$$

Justifique: Até quantas variações pode ter o transformado de Graeffe de $f(x)$?

Calcular esse transformado.

4266 — *a*) Condição necessária e suficiente relativa à série de Sturm de um polinómio $f(x)$ de grau n para que este tenha n raízes reais e distintas. Justifique:

b) Mostre que sendo os coeficientes iniciais da sucessão de Sturm alternadamente positivos e negativos, a sucessão não pode ser completa.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência 27-5-57.**

4267 — *a*) Dê, justificando, a condição necessária e suficiente, relativa aos valores próprios de uma transformação linear A, para que esta seja nilpotente.

b) Sendo q o índice dessa transformação, suponha que é

$$d(F_0)=1 \qquad (F_0 \text{ espaço nulo de } A)$$

$$d(F_0^{j+1})=d(F_0^j)+1 \qquad (j=1,2,\cdots,q-1).$$

Mostre que estas condições implicam certo valor para o índice q.

c) Indique a base do espaço em que a matriz de A assume a forma de Jordan e construa esta matriz.

4268 — *a*) Relacione os valores próprios e os vectores próprios de duas transformações lineares em $\mathcal{E}_{(n)}$ inversas uma da outra.

b) Relacione também os multiplicidades algébrica e geométrica dos valores próprios.

c) Relacione os polinómios mínimo e característico.

4269 — *a*) Mostre que o subespaço F gerado pelos vectores próprios de uma *t. l.* A em $\mathcal{E}_{(u)}$ é invariante para A.

b) Se A é hermítica, prove que $F^{\perp}$ também é invariante para A. Que concluir pode extrair?

4270 — *a*) Seja A uma *t. l.* com uma base ortogonal de vectores próprios e que admite valores todos da forma $e^{i\alpha}$. Verifique que A é unitária.

b) Renunciando à ortonormalidade da base de vectores próprios, A permanece no entanto semelhante a uma matriz unitária. Justifique.

4271 — Reduza a um polinómio nas funções simétricas fundamentais a função

$$(x_1+x_2)^3\,x_3^2+(x_1+x_3)^3\,x_2^2+(x_2+x_3)^3\,x_1^2$$

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.ª frequência — 1.ª chamada — 19-2-57.**

4272 — Dado um anel simples $\mathfrak{S}=e_1\mathfrak{S}+\cdots+e_n\mathfrak{S}$ em que os e_j são idempotentes ortogonais primitivos provar que $\mathfrak{S}$ é um anel simples de Noether.

4273 — Supondo que $\mathfrak{A}$ é soma directa de ideais bilaterais simples $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_n$, se for $\mathfrak{B}$ um ideal bilateral de $\mathfrak{A}$, provar que é

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A}_{i_1}+\cdots+\mathfrak{A}_{i_t}$$

4274 — Dado um módulo $\mathfrak{M}-\Omega$, provar que a totalidade dos endomorfismos $-\Omega$ que aplicam $\mathfrak{M}$ num submódulo $\mathfrak{N}-\Omega$ constitui um anel.

Provar que este conjunto constitui um ideal esquerdo em relação à totalidade dos endomorfismos $-\Omega$ de $\mathfrak{M}$.

4275 — Provar que num grupo finito são válidas as duas condições de cadeia.

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.ª frequência — 2.ª chamada — 15-3-54.**

4276 — O comutador $\mathfrak{C}$ dum grupo $\mathfrak{G}$ é o grupo gerado pelos elementos da forma $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$.

Se $\mathfrak{G}$ for o produto directo dos invariantes $\mathfrak{G}_1,\cdots,\mathfrak{G}_n$

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2\times\cdots\times\mathfrak{G}_n$$

mostre que $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\times\mathfrak{C}_2\times\cdots\times\mathfrak{C}_n$ em que $\mathfrak{C}_i$ é o comutador de $\mathfrak{G}_i$.

4277 — Seja $\mathfrak{A}$ um domínio de integridade (comutativo) e $\mathfrak{B}$ o seu anel de cocientes. Prove que $\mathfrak{B}$ tem unidade e que as características dos dois anéis são iguais.

4278 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel e $\mathfrak{B}$ um seu ideal bilateral. Mostre que o radical de $\mathfrak{B}$ é $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}$, sendo $\mathfrak{R}$ o radical de $\mathfrak{A}$.

4279 — Se $\mathfrak{S}$ for um anel em que todo o ideal direito é gerado por um idempotente e em $\mathfrak{S}$ for válida a condição ascendente de cadeia provar que $\mathfrak{S}$ é semisimples.

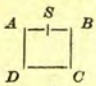
GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame final — 6-1955.**

4280 — Defina as gerações pontual e tangencial projectiva das cónicas, e enuncie os teoremas de Desargues e Sturm, e os respectivos casos limite.

4281 — Defina homologia plana e enuncie o teorema que permite definir a sua característica, e o respectivo corolário; defina homologia especial e homologia harmónica, enuncie as propriedades que respeitam às rectas limites de uma homologia, e defina as homologias particulares que conhece.

4282 — Defina quádricas regradas, enumere-as; enuncie os teoremas que respeitam às quádricas duplamente regradas e os que se referem às gerações de tais quádricas mediante formas projectivas de primeira espécie.

4283 — Considere a circunferência inscrita num quadrado $[A\,B\,C\,D]$, 

, e defina uma homologia de centro no ponto S, que converta essa circunferência numa parábola de direcção assintótica AD, passando pelo ponto S. Diâmetro conjugado com a direcção de AC. Eixo e vértice da parábola.

4284 — Defina uma hipérbole circunscrita a um trapézio isósceles dado $[A\,B\,C\,D]$. Assíntotas e eixo da hipérbole, e um par de diâmetros conjugados.

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame de 1.ª frequência — 1.ª chamada — 8-2-57.**

4285 — Defina projectividade entre duas formas de 1.ª espécie. Defina semelhança e igualdade. Escreva a equação duma projectividade. Supondo esta em coordenadas abcissas escreva as coordenadas dos pontos unidos.

4286 — Defina involução circular. Considere um feixe em involução circular. Pelo centro S do feixe faça passar uma circunferência e construa, justificando, o seu eixo de projectividade e o seu polo.

4287 — Defina elementos conjugados e elementos polares em relação a uma cónica. Diga como se pode aproveitar uma cónica para definir uma involução sobre as formas de primeira espécie do seu plano.

4288 — Num eixo orientado r de origem O estabeleceu-se uma correspondência entre as pontuais p e p' tal que a distância PP' iguale constantemente o triplo de OP.

a) Escreva a equação dessa correspondência; classifique-a, justificando.

b) Determine os pontos de fuga, norma e pontos unidos.

c) Considere a pontual p projectada a partir de S e a pontual p' a partir de S', estando S e S' equidistantes de r (distância 6 cm). Classifique a correspondência entre os dois feixes obtidos. Trace um par de raios homólogos paralelos e um par de raios homólogos cruzando-se à distância de 3 cm de r.

4289 — Ao ponto M de r faz-se corresponder o ponto M' de r tal que a soma dos inversos das suas distâncias a um ponto fixo A é igual a 2. Equação da correspondência e sua classificação. Pontos unidos (determinação gráfica e analítica). Procure o lugar dos pontos que projectam ortogonalmente os pontos unidos. Considere S_0 um desses pontos mais afastados de r. Projecte a partir de S_0 as duas pontuais e determine um par de raios homólogos com a inclinação mútua de $\dfrac{\pi}{4}$.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Calculo Infinitesimal — **1.ª Frequência — 1.ª chamada — 11-1-56.**

4290 — Considere a quádrica de equação

$$2x^2 - 2xz + 3y^2 + 2z^2 - 9 = 0.$$

a) Determine o seu centro e direcções principais.

b) Classifique a quadrática.

c) Seja E o sub-conjunto de R_3 formado pelos vértices da superfície.

Como são constituídos o derivado, o interior, o exterior e a fronteira do conjunto E?

d) Escreva uma equação canónica da quádrica.

4291 — Seja

$$\begin{cases} x = l_1\,x' + l_2\,y' + l_3\,z' + x_0 \\ y = m_1\,x' + m_2\,y' + m_3\,z' + y_0 \\ z = n_1\,x' + n_2\,y' + n_3\,z' + z_0 \end{cases}$$

uma transformação de coordenadas.

a) Qual a condição para que a transformação seja ortogonal, isto é, para que tanto as coordenadas x, y, z como x', y', z' digam respeito a triedros tri-rectângulos?

b) Se $f(x, y, z)$ for uma função com derivadas de segunda ordem e se operarmos a transformação indicada mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}$$

se a transformação for ortogonal.

c) No caso particular em que f é polinómio do segundo grau em x, y, z mostre que a igualdade anterior nos conduz a um dos invariantes conhecidos da teoria das quádricas.

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 18-1-56.**

4292 — Defina conjunto complementar de um conjunto, indique a classificação dos pontos de um conjunto que resulta das relações deste com o seu complementar. Defina fronteira de um conjunto e enuncie os teoremas que respeitam a tal conceito.

4293 — Vectores colineares e coplanares: definições, posição relativa e condições necessárias e suficientes para que tais casos se verifiquem.

4294 — Funções de variação limitada: definição e propriedades.

Considere em particular o caso das funções contínuas de variação limitada.

4295 — Dada a quádrica de equação

$$3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$$

a) determine o seu centro e planos principais;

b) classifique a quádrica;

c) Seja E o sub-conjunto de R_3 (espaço ordinário) assim constituído: P pertence a E se e só se o ponto P pertence a um diâmetro principal. Dar as coordenadas de 3 pontos de E, não colineares e indicar como são constituídos o derivado, o interior, o exterior e a fronteira de E.

d) Escreva uma equação canónica da superfície.

4296 — Seja $\Phi=f(u)$ uma função derivável qualquer da variável

$$u=lx+my+nz-ct$$

com l, m, n e c constantes.

a) Mostre que Φ verifica a igualdade

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

desde que l, m e n representem os cosenos directores de uma direcção.

b) Que valor deve ter a variável t (considerada como parâmetro) para que o plano

$$lx+my+nz-ct=0$$

fique tangente à quádrica

$$2x-3xy-2z=4\,?$$

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — **Exame de Frequência — 11-2-57.**

4297 — Seja $V(x,y,z)$ uma função homogénea de grau n e harmónica, e $\vec{r}$ o vector da distância $xI+yJ+zK$. Determine as condições para que o vector $\vec{r}\wedge(\vec{r}\wedge \operatorname{grad} V)$

a) seja um gradiente

b) seja um rotacional

c) seja harmónico.

4298 — Considere a família de parábolas $y=3a^3x^2-a$ e determine a sua envolvente; determine a envolvida correspondente ao ponto $\left(x=\frac{1}{9},\ y=-2\right)$ da envolvente e o raio de curvatura da envolvente e da envolvida nesse ponto a — parâmetro da família.

4299 — Considere duas funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ contínuas e deriváveis num domínio e anulando-se num ponto (a,b) desse domínio. Deduza por aplicação da fórmula de Taylor, as condições para que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{ seja bem determinado.}$$

4300 — Demonstre que as projecções duma curva torsa sobre os seus planos rectificante e normal tomados num ponto, apresentam nesse ponto, respectivamente, uma inflexão e uma reversão.

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **2.ª Frequência — 2.ª Chamada — 7-5-57.**

4301 — Defina comprimento de um arco de linha rectificável, indique uma condição necessária e suficiente para que uma linha plana seja rectificável e enuncie as propriedades que respeitam às linhas planas rectificáveis.

4302 — Defina envolvente de uma família de superfícies, características e aresta de reversão; enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies cilíndricas.

4303 — Defina contacto de ordem n entre uma linha e uma superfície, escreva as condições analíticas para tal contacto, interprete geomètricamente as condições de contacto da 1.ª ordem; defina conceito de osculação; indique, justificando a ordem de contacto do plano osculador num ponto duma linha torsa e defina plano osculador estacionário.

4304 — Determine e caracterize os pontos singulares da curva plana de equação

$$2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2=0.$$

4305 – Determine uma equação cartesiana da superfície que é o lugar geométrico das perpendiculares à superfície de equação

$$a^2 y^2 = x^2 (b^2 - z^2)$$

conduzidas pelos pontos da geratriz de equações

$$z = c \,, \quad x \sqrt{b^2 - c^2} - a\, y = 0$$

sendo a, b e c constantes.

I. S. T. – CÁLCULO INFINITESIMAL – **1.º exame de frequência – 27-6-56.**

4306 – Calcule $\Delta \dfrac{f(r)}{g(r)}$ sendo $\vec{r}$ o vector da distância $x I + y J + z K$. É dada em coordenadas polares a função $V = \dfrac{r}{1 + \cos \theta}$; Quais as linhas equipotenciais correspondentes a V? Calcule $\mathit{grad}\, V$

4307 – Determinar x, y, z tais que $x+y+z=N$ e que tornem $x^a y^b z^c$ máximo. (N, a, b, c números dados).

O conceito de superfície equipotencial e de gradiente poderá ajudar a classificar o ponto de estacionaridade? Aplique.

4308 – Se uma curva plana é dada em coordenadas polares $r = f(\theta)$ e se $U = \dfrac{1}{r}$, mostre que a curvatura da curva é dada por $\left(\dfrac{d^2 U}{d \theta^2} + U\right) \operatorname{sen}^3 \psi$ sendo ψ o ângulo entre o raio vector e a tangente.

4309 – Quando é que uma linha assintótica duma superfície pode ser também uma geodésica? Interprete neste caso o teorema de MEUSNIER.

4310 – Sabendo que as linhas de curvatura duma superfície podem ser definidas como sendo as curvas em que as normais à superfície admitem envolvente, quando é que uma linha de curvatura poderá ser geodésica? Poderá justificar a definição de linhas de curvatura, dada anteriormente?

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

117 – J. BASS – **Curso de Matemática** – Masson et C.ie, Éditeurs – 916 pags. 8.500 frs. – Paris, 1956.

Este livro contém, com alguns complementos, a matéria dos cursos que o Autor professa na Escola Nacional Superior de Aeronautica e na Escola Nacional Superior de Minas de Paris.

Destina-se assim aos alunos das grandes escolas de engenharia mas prestará também óptimos serviços aos candidatos à licenciatura em ciências físicas. O leitor deverá já possuir determinados conhecimentos elementares de análise e geometria analítica e poderá aumentar notàvelmente a sua cultura matemática com o objectivo de obter uma boa especialização técnica.

A obra não é um tratado de matemáticas aplicadas; não se utiliza a linguagem das aplicações e o leitor não tem necessidade de possuir prèviamente determinados conhecimentos técnicos. Pelo contrário é através das aquisições no campo matemático que poderá em seguida abordar a mecânica, a hidrodinâmica, a resistência de materiais, a física geral, a electricidade, etc.

O autor nunca perde a oportunidade de mostrar, sob forma de exemplos, como se aplicam as matemáticas. Mas estes exemplos que são particularmente orientados para a mecânica racional não constituem passagens essenciais na estruturação do curso e podem ser deixados de lado num primeiro estudo.

Se bem que o livro não seja escrito para futuros matemáticos, está apresentado sob forma precisa e o Autor nunca deixou de manter relativo rigor ao longo de toda a obra. Entretanto, para redigir em cerca de 900 páginas os elementos que constituem a cultura matemática de base dum engenheiro tornou-se necessário entrar em certos compromissos. Se se não hesitou em utilizar as teorias modernas quando estas poderiam simplificar a exposição, reduziu-se no entanto sensìvelmente as passagens puramente abstractas que, sem inconvenientes de maior, são apresentados sob forma intuitiva.

Para que as teorias expostas se tornem proveitosas o Autor faz a respectiva aplicação sob a forma de exercícios. Muitos exemplos são assim apresentados no texto e por meio deles se indica como efectuar