ANO XVII — N.º 65 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO — 1956

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Sequências e séries de matrizes

por **Leonidas H. B. Hegenberg**

Para que a demonstração do teorema de existência e unicidade das soluções de sistemas de equações diferenciais possa ser feita de modo análogo ao que se emprega no caso simples (uma equação apenas) torna-se muito conveniente o emprego de matrizes. Depois das definições habituais de traço, produto escalar de matrizes, módulo de matrizes (incluindo as desigualdades de SCHWARZ, do triângulo, bem como a propriedade de que o módulo da integral é menor ou igual ao produto $m \cdot n$ pela integral do módulo—em que m e n indicam o número de linhas e colunas da matriz, respectivamente) inicia-se o estudo das séries cujos elementos são matrizes. Sentimos a falta de uma exposição didática desse assunto e foi isso que procurámos fazer no presente artigo.

Sequências de matrizes.

Uma aplicação dos naturais no conjunto de matrizes será definida como sequência (ou sucessão) de matrizes. Se a cada natural se faz corresponder sempre a mesma matriz M a sequência se diz constante.

Se a norma de A_p tende a zero com p suficientemente grande, p sendo um elemento do conjunto dos números naturais, a sequência é uma sequência nulo (infinitésimo). Formalmente a sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo se existe, para todo ε positivo e arbitrário, um índice p_0 tal que

$$\| A_p \| < \varepsilon \text{ se } p > p_0$$

TEOREMA 1. A sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo se e sòmente se cada uma das $m \cdot n$ sequências $\{(a_j^i)_p\}$ for sequência nulo.

Prova: Se a sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo então para todo ε existe p_0 tal que

$$\| A_p \| < \varepsilon$$

se p maior que p_0. Mas o módulo de qualquer elemento da matriz A_p é menor ou igual ao módulo da matriz, de modo que

$$| (a_j^i)_p | < \varepsilon$$

se $p > p_0$ o que indica ser a sequência dos elementos (a_j^i) uma sequência nulo.

Recìprocamente, se a sequência dos elementos é uma sequência nulo, é possível fazer

$$| (a_j^i)_p | < \frac{\varepsilon}{m \cdot n}$$

contanto que p seja suficientemente grande. E como a norma da matriz A_p é menor ou igual à soma dos módulos dos elementos dessa matriz,

$$\| A_p \| \leqslant \Sigma \, | (a_j^i)_p | < m \cdot n \frac{\varepsilon}{m \cdot n} = \varepsilon$$

o que completa a prova.

Teorema 2. A única sequência nulo que é uma sequência constante é a sequência constante zero.

Prova: Se por absurdo $A \neq 0$ então pelo menos um dos elementos de A seria diferente de zero. Se a é o módulo desse elemento diferente de zero, $\|A\|$ sendo maior ou igual que o módulo de qualquer dos seus elementos, $\|A\| \geq a$, de modo que a norma de A não poderia ser feita menor que a o que vai de encontro à hipótese de ser $\{A_p\}$ sequência nulo.

Não é diferente a prova de que a soma de sequência nulo seja sequência nulo da prova já feita para o caso de sequências numéricas. Igual também é a prova de que é sequência nulo o produto de sequência nulo por uma constante. Define-se soma de sequências e produto de sequências por uma constante do mesmo modo como no caso de sequências numéricas.

Definição. Uma sequência $\{A_p\}$ converge com limite M se a sequência $\{A_p - M\}$ for uma sequência nulo.

Teorema 3. A sequência $\{A_p\}$ converge se e sòmente se cada uma das sequências $(a_j^i)_p$ converge.

Prova: Se a sequência de matrizes converge para a matriz M então

$$\|A_p - M\| < \varepsilon$$

desde que p seja suficientemente grande. Mas os elementos da matriz $A_p - M$ são de módulo menor ou igual ao da matriz de modo que

$$|(a_j^i)_p - m_j^i| < \varepsilon$$

o que indica ser convergente, com limite m_j^i a sequência $\{(a_j^i)_p\}$.

Recìprocamente, se cada sequência converge para um limite m_j^i então, para todo p maior que p_0, se poderá fazer

$$|(a_j^i)_p - m_j^i| < \frac{\varepsilon}{m \cdot n}$$

com qualquer par de índices i e j. Uma vez que

$$\|A_p - M\| < \Sigma\Sigma |(a_j^i)_p - m_j^i| < \varepsilon$$

segue-se que a sequência $\{A_p\}$ converge.

Teorema 4. O limite, quando existe, é único.

Prova: A existência de dois limites M e $\overline{M}$ implicaria em ser a sequência $\{M - \overline{M}\}$ uma sequência nulo; sendo sequência constante, segue-se que é a sequência zero, i. é, que $M = \overline{M}$.

Teorema 5. (Cauchy) A sequência $\{A_p\}$ converge com limite M se e sòmente se para cada ε positivo e arbitrário se puder obter um p tal que $p > p_0$ e q natural qualquer obriguem $\|A_p - A_{p+q}\| < \varepsilon$.

Prova: Se $\{A_p\}$ converge então existe p_0 tal que para todo p maior que p_0 se tenha:

$$\|A_p - L\| < \varepsilon/2 .$$

Como

$$A_{p+q} - A_p = A_{p+q} - L + L - A_p$$

resulta, pela desigualdade do triângulo:

$$\|A_{p+q} - A_p\| \leq \|A_{p+q} - L\| + \|L - A_p\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Recìprocamente, se $\|A_{p+q} - A_p\|$ pode tornar-se menor que um ε desde que se faça p suficientemente grande, então cada um dos números

$$|(a_{p+q})_s^r - (a_p)_s^r|$$

pode ser feito arbitràriamente pequeno com p suficientemente grande. Isso obriga a convergência das sequências de números reais $\{(a_p)_s^r\}$ ($p = 1, 2, \cdots; r$ variando de 1 a m e s de 1 a n). A convergência dessas sequências implica na convergência da sequência $\{A_p\}$ (pelo teorema 3).

Séries de matrizes.

Definição: Série de termos $A_1, A_2, \cdots$ é a sequência $\{S_k\}$ onde $S_i = A_1 + \cdots + A_i$. A série é designada pelo símbolo:

$$A_1 + A_2 + \cdots = \Sigma_i A_i .$$

O limite S da sequência $\{S_k\}$ é chamado soma da série de termos $A_1 , A_2 , \cdots$.

TEOREMA 1. A série ΣA_i converge se e sòmente se cada uma das séries $\Sigma (a_i)^r_s$ for convergente, $r = 1, \cdots m$; $s = 1, \cdots n$; $i = 1, 2 \cdots$.

Prova: É consequência direta da definição e do fato de convergir uma sequência de matrizes quando cada sequência formada com os elementos de uma determinada posição converge. A soma S da série é matriz cujo elemento linha r e coluna s vem a ser a soma da série $\Sigma (a_i)^r_s$.

Como consequência, também aqui se tem o critério de convergência:

CRITÉRIO: Uma série de matrizes converge se e sòmente se dado ε positivo e arbitrário for possível obter um índice p de modo que para qualquer natural q se tenha

$$\| A_p + A_{p+1} + \cdots + A_{p+q} \| < \varepsilon$$

Em particular, se $q =$ zero, resulta como corolário: que o termo geral de uma série de matrizes deve tender a zero em módulo nas séries convergentes.

DEFINIÇÃO: Uma série de matrizes $m \times n$ de termos $A_1 , A_2 , \cdots$ converge absolutamente se cada uma das $m \cdot n$ séries $\Sigma (a_i)^r_s$, $i = 1 , 2 , \cdots$ é absolutamente convergente.

TEOREMA 2. A série $A_1 + A_2 + \cdots$ converge se converge a série $\| A_1 \| + \| A_2 \| + \cdots$.

Prova: basta lembrar que

$$\| A_{k+1} + \cdots + A_{k+p} \| \leqslant \| A_{k+1} \| + \cdots + \| A_{k+p} \|$$

TEOREMA 3. Se converge a série $\Sigma \| A_i \|$ então cada uma das $m \cdot n$ séries $\Sigma (a_i)^r_s$ $(i = 1 , 2 , \cdots)$ é absolutamente convergente.

Prova: É suficiente considerar que

$$| (a_i)^r_s | \leqslant \| A_i \|$$

$r = 1 , \cdots m$; $s = 1 , \cdots n$; $i = 1 , 2 , \cdots$.

Segue-se que convergindo a série $\Sigma \| A_i \|$ então a série ΣA_i converge absolutamente.

TEOREMA 4. A soma de uma série absolutamente convergente não depende da ordem em que são tomados os termos da série.

Prova: Seja $a_n = \| A_n \|$; por hipótese Σa_n é convergente. O teorema anterior afirma a convergência da série dada ΣA_n; seja S a soma da série. Efetue-se uma permutação qualquer dos termos dispondo-os em uma nova ordem que dá a série $\Sigma A'_n$. Conside-se a reduzida que contenha todos os termos da reduzida de ordem n da série dada; aparecerão, em geral, mais alguns termos de índices $n + \alpha , n + \beta , \cdots$. Isto é, sendo

$$s_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

construiu-se s'_m tal que todos os termos de s_n aí aparecessem:

$$s'_m = A_1 + \cdots + A'_m = A_1 + \cdots + A_n + A_{n+\alpha} + \cdots + A_{n+\lambda} .$$

Fazendo a diferença:

$$| s'_m - s_n | = | A_{n+\alpha} + \cdots + A_{n+\lambda} | < a_{n+\alpha} + \cdots + a_{n+\lambda}$$

que se pode tornar menor que qualquer número pela convergência de Σa_n. O fato de ser a sequência $\{s_m - s_n\}$ uma sequência nulo mostra que $\{s'_m\}$ e $\{s_n\}$ tem o mesmo limite quando n cresce; ou seja, as séries ΣA_n e $\Sigma A'_n$ tem mesma soma.

Séries de funções.

Seja dado um conjunto C de matrizes. Se a cada X de C se fizer corresponder uma outra matriz $A_n(X)$ com $n = 1 , 2 \cdots$, então o par de sequências de matrizes:

$$(\{A_n (X)\} \{S_n (X)\})$$

onde $S_p (X) = A_1 + A_2 + \cdots + A_p$, é chamado *série* de termos $A_1 , A_2 \cdots$.

Se existe uma função (matricial) $S(X)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} S_n (X) = S (X)$$

essa função $S(X)$ é a *soma* da série.

DEFINIÇÃO: A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ *converge uniformemente* para a função $S(X)$ no conjunto C se (e sòmente se) dado ε positivo e arbitrário existir um número natural n_0 que depende de ε mas que não depende de X escolhido em C de modo que:

$$\| S_n(X) - S(X) \| < \varepsilon \qquad n \geqslant n_0$$

Nota: No caso particular em que C é um conjunto de matrizes 1×1 tem-se as séries de matrizes funções de uma variável. As definições e teoremas não sofrem qualquer alteração.

TEOREMA 1. Uma série de matrizes $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ é uniformemente convergente em C se e sòmente se dado ε positivo e arbitrário existir um n_0 independente de X escolhido em C tal que para $m \geqq n_0$ e $n \geqq n_0$

$$\| S_n(X) - S_m(X) \| < \varepsilon .$$

Prova: A necessidade da condição é fàcilmente verificada e fica proposta como exercício. Veja-se a suficiência. Escolha-se X de C. A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ fica sendo série de matrizes constantes (no sentido considerado anteriormente). Essa é uma série convergente de vez que satisfaz a condição de convergência (de CAUCHY). Existe, pois uma soma $S(X)$, definida para cada X. Em outras palavras, para cada X de C existe o limite ${}_n lim\, S_n(X)$ e é uma função $S(X)$. Segue-se que na relação

$$\| S_n(X) - S_m(X) \| < \varepsilon$$

para todo $m \geqq n_0$ e $n \geqq n_0$ o primeiro membro tem limite quando n cresce o que implica:

$$lim \| S_n(X) - S_m(X) \| \leqslant \varepsilon$$

donde

$$\| S(X) - S_m(X) \| < \varepsilon \qquad \text{para todo } m \geqslant n_0$$

e n_0 independente de X o que significa, pela definição, que a convergência é uniforme em C.

TEOREMA 2 (WEIERSTRASS). A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ é uniformente convergente se cada uma das funções $A_i(X)$ é limitada para X em C:

$$\| A_i(X) \| \leqslant c_i \qquad c_i > 0$$

sendo $c_1 + c_2 + \cdots$ uma série convergente.

Prova: Se a sequência $\{X_p\}$ é arbitràriamente escolhida em C, pelo fato de se ter

$$\| A_{n+1}(X_p) + \cdots + A_{n+k}(X_p) \| \leqslant c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}$$

e sendo $c_1 + c_2 + \cdots$ uma série convergente está satisfeita a condição de convergência uniforme da série de matrizes, pois o primeiro membro se pode tornar menor que um ε positivo e arbitrário qualquer que seja X desde que $n \geqq n_0$ precisamente o n_0 adequado para a série de termos constantes $c_1 + c_2 + \cdots$

TEOREMA 3. Se a série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ converge uniformemente em C, e se cada uma das matrizes $A_i(X)$ é contínua em C então a soma $S(X)$ da série também é contínua.

Prova. A série dada sendo convergente, existe a soma $S(X)$. Pela definição de convergência existe um índice n_0 a partir do qual

$$\| S(X_0) - A_n(X_0) \| \leqslant \varepsilon/4$$

sendo X_0 um ponto qualquer de C. Verificando-se também

$$\| S(X) - A_n(X) \| \leqslant \varepsilon/4$$

para o mesmo n_0 que independe de X. Pondo $S(X) - S(X_0) = \Delta S$ e $A_n(X) - A_n(X) = \Delta A$ resulta combinando as duas desigualdades precedentes

$$\| \Delta S - \Delta A \| \leqslant \varepsilon/2$$

Mas,

$$\| \Delta S \| = \| \Delta S - \Delta A + \Delta A \| \leqslant \| \Delta S - \Delta A \| + \| \Delta A \| .$$

Pelo fato de serem contínuas as matrizes $A_i(X)$ com X em C é possível fazer ΔA menor que $\varepsilon/2$ desde que se tome X numa vizinhança conveniente de X_0, isto é, desde que se tome X tal que $\| X - X_0 \| \leqq \varepsilon$. O segundo membro pode, portanto, tornar-se menor que ε desde que X permaneça numa vizinhança conveniente de X_0 e isso prova a continuidade de $S(X)$.

Séries de potências.

Definição. A série $C_0 + C_1 A + C_2 A^2 + + \cdots + C_m A^m + \cdots$ em que as matrizes A e C_j com $j = 1, 2, \cdots$, são matrizes quadradas $n \times n$ é chamada série de potências.

Teorema 1. Se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \| C_n \| \cdot \cdot \| A \|^n$ converge então a série de potências $\Sigma\, C_n A^n$ converge absolutamente.

Prova: por ser $\| C_n A^n \| \leq \| C_n \| \, \| A \|^n$ a tese resulta imediata.

Teorema 2. Se a série $\Sigma \| C_n \| \cdot \| A \|^n$ converge então a série $\Sigma \| C_n \| \, \| X \|^n$ converge se $\| X \| \leq \| A \|$ sendo uniforme a convergência em todo o intervalo $[0, \| A \|]$.

Prova: Se a série converge a sequência dos termos é uma sequência nulo o que a obriga a ser uma sequência limitada:

$$\| C_n \| \, \| A \|^n < M , \quad M > 0 , \quad \text{donde} \quad \| C_n \| < \frac{M}{\| A \|^n}$$

e isso acarreta

$$\Sigma \| C_n X^n \| < \Sigma\, M \left(\frac{\| X \|}{\| A \|} \right)$$

donde, pelo teorema anterior, resulta a convergência de $\Sigma\, C_n X^n$, convergência que é uniforme no conjunto $0 \leq \| X \| \leq \| A \|$.

Corolário. A série de potências $C_0 + C_1 X + + C_2 X^2 + \cdots + C_n X^n + \cdots$ converge absolutamente se $\| X \| \leq \| A \|$ sendo uniforme a convergência em $0 \leq \| X \| \leq \| A \|$.

Caso particularmente importante é aquele em que $C_m = \dfrac{E}{m!}$, $m = 1, 2, \cdots$. Uma vez que a série de números não negativos

$$1 + \| A \| + \frac{\| A \|^2}{2!} + \cdots + \frac{\| A \|^m}{m!} + \cdots$$

converge qualquer que seja o valor de A, segue-se que a série de matrizes:

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

converge absolutamente qualquer que seja a matriz quadrada n dimensional A sendo uniforme a convergência no conjunto $0 \leq A \leq \delta$ em que δ é um número positivo qualquer. Essa é a chamada série exponencial que se designa por e^A ou por $exp\ A$.

Teorema 3. Se A e B são duas matrizes quadradas, de mesma ordem, tais que $AB = BA$ então $exp\ (A + B) = exp\ A \cdot exp\ B$.

Prova: Em primeiro lugar verifica-se que a série matricial

$$E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + + \frac{1}{3!}(A^3 + 3\,A^2 B + 3\,AB^2 + B^3) + \cdots$$

converge absolutamente desde que qualquer soma parcial da série

$$1 + (\| A \| + \| B \|) + \frac{1}{2!}(\| A \|^2 + 2 \| A \| \, \| B \| + \| B \|^2) + \cdots$$

é menor ou igual a $exp \| A \| \cdot exp \| B \|$.

Em seguida dispõe-se os termos da série absolutamente convergente

$$E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + \cdots$$

em grupos de modo que o primeiro grupo não contenha B; o segundo contenha B mas não B^2; o terceiro contenha B, B^2 mas não B^3; e assim por diante. A soma de cada um desses grupos será, respectivamente $exp\ A$; $(exp\ A)\ B$; $(exp.\ A)\ B^2$; etc. A soma da série

$$E + A + B + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + \cdots$$

é, por conseguinte, $(exp\ A) \cdot (exp\ B)$. Como, por hipótese A e B são comutativas, tem-se também $exp (A + B)$. Vale a pena observar que essa conclussão não é necessàriamente correta se A e B não forem comutativas.

Instituto Tecnológico de Aeronautica
S. José dos Campos, S. P. — Brasil

N. — A Redacção teve a preocupação de manter a ortografia e terminologia do Autor.