

Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?

por Emma Castelnuovo

A esta interrogação, nova entre as muitas que põe o ensino da matemática, responde um livro deveras interessante⁽¹⁾, publicado recentemente pela «*Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*». A Comissão é formada de pessoas que, em campos diversos — psicológico, metodológico e prático — procuram dar uma contribuição à melhoria do ensino da matemática; é por isso composta, quer por conhecidos matemáticos, lógicos, psicólogos e pedagogistas, quer por modestos professores que, com atentas e pacientes experiências, estudam a questão dum ponto de vista prático. Os membros da Comissão reúnem-se periódicamente, a fim de coordenar experiências, estudos e relatórios; desde 1950 realizaram-se nada menos de nove encontros internacionais: em Inglaterra, Bélgica, Suíça, França, Luxemburgo, Alemanha, Holanda, Itália e Áustria.

Até agora a Comissão não tinha considerado oportuno publicar estudos e só as exposições orais feitas pelos vários membros nos respectivos países davam uma ideia do movimento tão activo e moderno que animava o espírito dos organizadores. Hoje, com este livro que reúne vários artigos, a Comissão apresenta-se em forma oficial; os autores são seis dos seus membros fundadores: um psicólogo, JEAN PIAGET, professor das Universidades de Genebra e Paris, um lógico mate-

mático, EWART W. BETH, professor da Universidade de Amsterdam, três matemáticos, JEAN DIEUDONNÉ, professor da Northwestern University, Evanston (E. U. A.), ANDRÉ LICHNEROWICZ, professor do Collège de France, GUSTAVE CHOQUET, professor da Universidade de Paris, e finalmente o pedagogo CALEB GATTEGNO, professor do Institut of Education da Universidade de Londres, o qual como secretário geral da Comissão organiza os vários congressos e é verdadeiramente a alma deste movimento.

Os seis artigos não foram coordenados entre si, mas, embora sejam diferentes os pontos de vista e as concepções de cada um, apresentam êles uma tão acentuada continuidade que a passagem de um trabalho para outro não constitui para o leitor uma brusca transição de ideias. Na verdade, através de análises psicológicas, estudos lógicos, considerações históricas e propriamente matemáticas, visam todos um fim único: o ensino da matemática, à luz das modernas concepções científicas.

O livro abre com um confronto de PIAGET entre «*as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência*». Depois de salientar que a diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna está no facto de a primeira pôr na base da construção matemática os elementos simples (tais como os números inteiros, o ponto, a recta, etc.) e a segunda um sistema operatório, isto é uma série de estruturas, o autor referiu as ideias essenciais da escola BOURBAKI, segundo as quais as três estruturas principais, sobre as

(1) J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO, «*L'enseignement des mathématiques*», Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel (Suíça).

quais assenta o edificio matemático, são: as estruturas algébricas (de que é protótipo o grupo), as estruturas de ordem (de que é um caso particular o reticulado) e as estruturas topológicas. Ora, PIAGET, através duma série de atentas e minuciosas experiências sobre a génese e o desenvolvimento das operações aritméticas e geométricas na mente da criança, conseguiu demonstrar que as «étapes» fundamentais na aprendizagem dos conceitos matemáticos correspondem precisamente aos três tipos de estruturas matemáticas. Verifica-se que, na criança, nascem mais ou menos no mesmo período as estruturas de tipo algébrico (por exemplo, a compreensão da reversibilidade das acções, da inclusão duma classe parcial A numa classe total B), as estruturas de ordem (a seriação: são já clássicas as experiências de PIAGET sobre a maior ou menor dificuldade que tem a criança até aos 6-7 anos de dispor por ordem de alturas várias réguas) e as estruturas topológicas (a ordem da formação das noções geométricas no desenvolvimento espontâneo da criança não se ajusta de modo nenhum à ordem histórica das étapes da geometria: as questões topológicas são aprendidas muito antes das questões euclidianas).

Não é necessário comentar um estudo deste género: podem facilmente imaginar-se as imensas consequências que podem ter tais problemas, num primeiro ensino da matemática. É este o único artigo que diz respeito ao ensino elementar; os capítulos seguintes referem-se ao ensino secundário.

Ao estudo de PIAGET segue-se o artigo de E. W. BETH «*Reflexões sobre a organização e sobre o método do ensino matemático*». O autor observa que o divórcio entre o ensino secundário e o ensino universitário se vai acentuando cada vez mais: no primeiro, a matemática elementar não chega a suscitar um interesse científico; no segundo, as teorias cada vez mais complexas a que é conduzida a investigação moderna revelam-se

pouco susceptíveis de virem a ser incorporadas no ensino secundário. FELIX KLEIN tinha procurado lançar uma ponte entre a matemática elementar e a matemática superior, mas tratava-se mais de renovação de métodos que de mudança de programa. Hoje — afirma BETH — as modernas investigações sobre os fundamentos da matemática levam-nos a compreender como algumas vezes (por exemplo, para esclarecer a diferença entre a estrutura dos números racionais e a dos números reais) é impossível chegar a uma explicação exaustiva e criticamente perfeita se se insiste em permanecer no domínio da lógica elementar e evitar qualquer referência a noções que competem à teoria dos conjuntos. É por isso que o autor seria favorável a adoptar no ensino secundário o método axiomático, abandonando o método genético. Termina o artigo uma análise aprofundada das relações entre lógica e psicologia para os fins do ensino; BETH declara-se abertamente contrário à tendência de exagerar a importância da psicologia nos problemas de didáctica matemática e sublinha o valor e o alcance dum ensino rigidamente lógico.

Os três artigos que se seguem, os de DIEUDONNÉ, LICHNEROWICZ e CHOQUET versam sobre questões que se referem estritamente à matemática, ao programa e aos métodos de ensino desta disciplina na escola secundária.

J. DIEUDONNÉ, no seu trabalho «*A abstracção em matemática e a evolução da álgebra*» começa por responder à pergunta clássica «Qual é o objectivo do ensino da matemática?» Não são — diz ele — as questões em si, por vezes esmiuçadas e subtilizadas em extremo, que devem formar o objecto do nosso ensino — mas é antes o método matemático, a essência da própria matemática que deve influenciar a inteligência do aluno, levando-o a raciocinar cada vez mais sobre noções abstractas. A apoiar esta tese, ele traça em poucas páginas uma história dos conceitos fundamentais da álgebra, fazendo ver como todo o

desenvolvimento desta disciplina representa uma contínua ascensão para o abstracto, ascensão da qual a introdução dos números imaginários constitui uma étape decisiva. Foi então que o matemático adquiriu consciência do seu poder criador de calcular sobre novos objectos — que não são números — em vez de se resignar passivamente a limitar-se aos que lhe eram impostos pelas origens concretas da matemática. Um segundo acto de libertação é representado pelo cálculo dos operadores: foram modificadas assim também as regras de cálculo algébrico, até então consideradas intangíveis, e deste modo se foi tendo percepção cada vez mais nítida, dos dois constituintes fundamentais de qualquer «cálculo»: — os objectos sobre os quais se opera e as regras operatórias — estas só verdadeiramente essenciais. Segundo tal concepção, o estudo dum cálculo, ou — como se diz — dum estrutura algébrica, toma como dados de base um conjunto de objectos e um certo número de operações. DIEUDONNÉ conclui a sua exposição, admirável de clareza e vigor, declarando que só o método axiomático, extrema étape no sentido da abstracção, permite canalizar as novas descobertas matemáticas, classificá-las e ligá-las aos resultados precedentes, simplificar a exposição das várias teorias, aumentando por vezes o seu alcance com uma análise mais aprofundada.

O artigo de A. LICHNEROWICZ «*A introdução do espírito da álgebra moderna na álgebra e na geometria elementar*» vem completar o de DIEUDONNÉ, dando ideias e sugestões para um eficaz ensino secundário como iniciação no espírito da ciência contemporânea. Sublinha ele que, se é verdade que só uma percentagem mínima de alunos virá a dedicar-se à ciência pura, não é menos certo que também aqueles que se dirigem para as aplicações técnicas virão a encontrar-se perante uma matemática que já hoje não é menos abstracta, aos olhos dos conformistas, do que a matemática chamada pura. Não se trata —

diz o autor — de distribuir dogmáticamente teorias abstractas da álgebra moderna, mas antes se deveria procurar, logo de início, familiarizar o aluno com as principais estruturas algébricas, levando-o a reconhecer propriedades comuns em domínios diversos (por exemplo, as propriedades comuns a números inteiros e polinómios, as leis de composição em certas classes de números), questões que se podem tratar mesmo nos primeiros anos dum escola secundária. Depois, na última classe dos liceus, seria necessário comparar as várias teorias aritméticas, geométricas, etc., sempre do ponto de vista estrutural, pondo em confronto propriedades iguais e propriedades distintas de entidades completamente diversas (por exemplo, os axiomas dos grupos e as propriedades comuns aos deslocamentos e às semelhanças no espaço). LICHNEROWICZ insiste no facto de que, fazendo deter a atenção do aluno sobre alguns casos elementares de isomorfismo, se poderá, por um lado, pôr em evidência como a «natureza matemática» é qualquer coisa que não tem sentido determinado e, por outro lado, procurar destruir os compartimentos-estancos entre os diversos ramos da matemática elementar.

De carácter mais particular é o artigo de G. CHOQUET «*O ensino da geometria elementar*». Declara ele, explicitamente, que escreve estas páginas para o professor, não para o aluno, mas pensa que possam fornecer matéria de reflexão, para o mestre, no sentido dum eventual adaptação à idade do aluno. «A geometria elementar — diz o autor — é uma bela viagem, mas o seu ponto de partida tem muitas vezes lugar numa sombra cheia de dúvidas e o caminho seguido atravessa profundos pântanos, como o dos deslocamentos e o da orientação, dos quais não se sai sem a sujeição ao suplício chinês do pau». Depois de fazer uma crítica minuciosa e brilhante dos usuais livros de texto, G. CHOQUET põe as bases dum desenvolvimento do curso

de geometria elementar, a partir da geometria da recta, passando depois à do plano e ao estudo das isometrias e da orientação, e dá, com este trabalho, uma contribuição nova e original ao estudo dos fundamentos da geometria. Não é possível resumir brevemente o artigo e por isso relegamos os colegas à leitura directa, com a certeza de que encontrarão ali matéria de aprazimento intelectual.

Depois de todos estes artigos, densos de ideias e de sugestões, mas que, embora tendo em consideração o aluno, estudam o problema da didáctica matemática de um ponto de vista teórico, chega-se ao último capítulo «*A pedagogia da matemática*», onde o autor, C. GATTEGNO, nos coloca no meio estudantil; este capítulo interessa portanto particularmente ao professor da escola secundária. Os pareceres de GATTEGNO são assim resumidos nas suas palavras: «O leitor terá já encontrado nos capítulos precedentes dados relativos aos factores psicológicos e matemáticos. Trataremos aqui do ensino pròpriamente dito e mostraremos como o programa pode ser tornado funcional, isto é, pode ser concebido como síntese dos diversos factores». Pretende o autor servir-se, precisamente, das estruturas mentais já existentes na mente da criança e conceber um programa que, baseando-se nestas, tenha especialmente em conta as dificuldades que encontra o aluno, ao passar duma estrutura mental a outra. Segundo GATTEGNO, não é o particular mas o geral que interessa a criança; é a acção do programa e a do professor que constroem a sua inteligência a confinar-se dentro de certos limites e é por esta razão que, muitas vezes, o ensino da matemática resulta difícil e pouco atraente. No ensino da aritmética, por exemplo, pode conseguir-se em breve tempo que os alunos se libertem do numérico, para tomar consciência, mesmo que seja de modo intuitivo e quási por brincadeira, de propriedades gerais das várias operações, e pas-

sar depois ao campo da álgebra. Aqui, sempre tendo em vista concepções gerais, insistir-se-á muito mais sobre a reversibilidade das operações e sobre o dinamismo das fórmulas (isto é, sobre os vários aspectos que uma fórmula pode tomar) do que sobre o resultado. Observe-se, além disso, que o conceito de função que tem o aluno nestas idades é muito mais largo do que aquele que nós queremos impôr-lhe, quando lhe oferecemos exemplos simples e construídos de propósito. Sobre a base destas ideias, GATTEGNO esboça um programa de álgebra para os rapazes dos 11 aos 16 anos, programa que, aos nossos olhos, pode parecer excessivamente abstracto, mas que é sem dúvida nenhuma interessante.

Para o ensino da geometria não é proposto um programa como para a álgebra, mas os exemplos e as sugestões que se dão, verdadeiramente dignos de serem tomados em consideração, já por si só ditam um programa. GATTEGNO declara-se absolutamente contrário a um ensino dedutivo que, partindo de certas premissas, obrigue a chegar a determinadas consequências, levando o rapaz a percorrer uma via prèviamente traçada. Propõe ele, portanto, um estudo que não imponha uma «camisa de forças» ao aluno, um estudo baseado sobre a tomada de consciência de determinadas «situações». Por exemplo — diz GATTEGNO — nas primeiras lições de geometria (pelos 11 anos de idade), dar-se ia ao rapaz um compasso, deixando livre campo à sua fantasia para desenhar o que quisesse. A partir de uma série de desenhos ordenados e desordenados, índice, eles próprios, de interesses estéticos e de momentos psicológicos, o aluno seria conduzido, numa segunda fase, à observação de duas famílias de círculos concêntricos e poderia, ajudado com raras intervenções do mestre, chegar a uma tomada de consciência matemática: a simples observação e percepção conduzi-lo-ia portanto, a

pouco e pouco, a organizar o seu pensamento e, daquelas premissas instrumentais, ele poderia fazer brotar relações e consequências até inesperadas. Propriedades e questões, que estamos habituados a tratar numa certa ordem e que são muitas vezes «atomizadas», fundir-se-iam num todo único. E, a pouco e pouco, a estrutura de cada particular situação levaria a conceber o método axiomático relativo àquela determinada situação, porque — diz com acerto o autor — «averiguar aquilo que basta postular para obter tudo por via dedutiva é um luxo que a ciência se permite, só depois de ter acumulado um certo número de factos». Ele acha por isso que uma revisão do programa dum ponto de vista dedutivo só deveria fazer-se no fim da carreira escolar. Como se vê, trata-se dum ensino da geometria em que falta uma linha contínua, no sentido que estamos habituados a conceber; é uma série de assuntos organizados sobre o plano das estruturas, mas livres; é um ensino por centros de interesse, em que cada centro é provocado por um impulso particular.

Com quanto haja, sem dúvida, um paralelismo entre o ensino da geometria e o da álgebra sugeridos pelo autor, paralelismo devido ao sentido de largueza e de libertação que se pretende esteja na base de ambos, nota-se uma considerável diferença entre as duas didácticas, sendo a geométrica muito mais perceptiva, mais visual e portanto menos abstracta do que a algébrica, aplicada na mesma idade.

Cada um de nós é levado pela leitura deste artigo, que pode, à primeira vista, parecer excessivamente original e afastado das nossas ideias, geralmente mais moderadas, a uma reconsideração do programa e da nossa maneira de ensinar; ainda por esta razão, o trabalho de GATTEGNO, oferecendo contínuos estímulos de revisões, de crítica, de discussão, traz em si uma contribuição notável ao problema em questão.

* * *

Depois de ter referido cada capítulo deste livro, verdadeiramente original e fascinante, pouco resta a concluir, porque o livro não quer concluir, quer deixar aberto o problema. Um problema discutido por matemáticos de profissão e pedagogistas, por lógicos e psicólogos; cada um deles expôs, de modo magistral, as suas ideias sobre o mesmo assunto: «o ensino da matemática». Compete agora a cada um de nós encontrar nestas páginas matéria de reflexão e de trabalho e dar uma contribuição ao movimento que se está difundindo em todo o mundo para inspirar a didáctica matemática em critérios mais modernos.

N. da R. — Em consequência da demora de publicação da «G. M.» e da subsequente acumulação de original, sai este artigo com atraso considerável, do que pedimos desculpa à nossa distinta colaboradora, bem como aos leitores.

«Princípios de equivalência sobre equações»

por Henrique Verol Marques

A importância primordial de que se reveste o estudo dos princípios de equivalência de equações leva-nos a abordá-lo no presente artigo. Presume-se que se torne útil dissecar tal matéria por se crer que, nem sempre, o

estudante de liceu lhe atribui a importância que ela, inegavelmente, merece. Basta ter em atenção que sendo o objectivo fundamental da Álgebra a resolução de equações, tal objectivo só poderá ser atingido se se conhe-