pouco e pouco, a organizar o seu pensamento e, daquelas premissas instrumentais, ele poderia fazer brotar relações e consequências até inesperadas. Propriedades e questões, que estamos habituados a tratar numa certa ordem e que são muitas vezes «atomizadas», fundir-se-iam num todo único. E, a pouco e pouco, a estrutura de cada particular situação levaria a conceber o método axiomático relativo àquela determinada situação, porque — diz com acerto o autor — «averiguar aquilo que basta postular para obter tudo por via dedutiva é um luxo que a ciência se permite, só depois de ter acumulado um certo número de factos». Ele acha por isso que uma revisão do programa dum ponto de vista dedutivo só deveria fazer-se no fim da carreira escolar. Como se vê, trata-se dum ensino da geometria em que falta uma linha contínua, no sentido que estamos habituados a conceber; é uma série de assuntos organizados sobre o plano das estruturas, mas livres; é um ensino por centros de interesse, em que cada centro é provocado por um impulso particular.

Com quanto haja, sem dúvida, um paralelismo entre o ensino da geometria e o da álgebra sugeridos pelo autor, paralelismo devido ao sentido de largueza e de libertação que se pretende esteja na base de ambos, nota-se uma considerável diferença entre as duas didácticas, sendo a geométrica muito mais perceptiva, mais visual e portanto menos abstracta do que a algébrica, aplicada na mesma idade.

Cada um de nós é levado pela leitura deste artigo, que pode, à primeira vista, parecer excessivamente original e afastado das nossas ideias, geralmente mais moderadas, a uma reconsideração do programa e da nossa maneira de ensinar; ainda por esta razão, o trabalho de GATTEGNO, oferecendo contínuos estímulos de revisões, de crítica, de discussão, traz em si uma contribuição notável ao problema em questão.

* * *

Depois de ter referido cada capítulo deste livro, verdadeiramente original e fascinante, pouco resta a concluir, porque o livro não quer concluir, quer deixar aberto o problema. Um problema discutido por matemáticos de profissão e pedagogistas, por lógicos e psicólogos; cada um deles expôs, de modo magistral, as suas ideias sobre o mesmo assunto: «o ensino da matemática». Compete agora a cada um de nós encontrar nestas páginas matéria de reflexão e de trabalho e dar uma contribuição ao movimento que se está difundindo em todo o mundo para inspirar a didáctica matemática em critérios mais modernos.

N. da R. — Em consequência da demora de publicação da «G. M.» e da subsequente acumulação de original, sai este artigo com atraso considerável, do que pedimos desculpa à nossa distinta colaboradora, bem como aos leitores.

«Princípios de equivalência sobre equações»

por ***Henrique Verol Marques***

A importância primordial de que se reveste o estudo dos princípios de equivalência de equações leva-nos a abordá-lo no presente artigo. Presume-se que se torne útil dissecar tal matéria por se crer que, nem sempre, o estudante de liceu lhe atribui a importância que ela, inegàvelmente, merece. Basta ter em atenção que sendo o objectivo fundamental da Álgebra a resolução de equações, tal objectivo só poderá ser atingido se se conhecerem, com clareza, as leis que regem essa resolução.

No presente trabalho apenas se consideram equações a uma incógnita, porque só a estas se faz referência no actual programa dos liceus.

Como é sabido, raiz ou solução de uma equação a uma incógnita é todo o número que colocado no lugar da incógnita torna o valor numérico do primeiro membro idêntico ao valor numérico do segundo membro. E sabe-se, também, que duas equações são equivalentes quando toda a solução de uma delas é solução da outra, e recìprocamente. Seja $f(x)=g(x)$ uma equação em x em que algum dos dois membros poderá ser, eventualmente, constante.

Demonstremos, primeiramente, que se somarmos a ambos os membros daquela equação um número N ou uma função inteira, $\varphi(x)$, da incógnita, a equação resultante é equivalente à proposta.

Com efeito, se se designa por α uma solução genérica da equação $f(x)=g(x)$ tem-se, por definição de raiz de uma equação, que $f(\alpha)=g(\alpha)$ e daí $f(\alpha)+N=g(\alpha)+N$ (são iguais as somas de dois números iguais com um terceiro). Logo, α é também solução de $f(x)+N=g(x)+N$. Por outra parte, se β é raiz genérica da equação $f(x)+N=g(x)+N$ será $f(\beta)+N=g(\beta)+N$, donde se tira $f(\beta)=g(\beta)$ (subtraindo a números iguais um terceiro, as diferenças são ainda iguais). Quer dizer, β é também solução de $f(x)=g(x)$.

As duas equações $f(x)=g(x)$ e $f(x)+N=g(x)+N$ são, portanto, equivalentes.

Anàlogamente, se $\varphi(x)$ é função inteira de x, $\varphi(\alpha)$ tem significado numérico (continuando a representar por α uma qualquer raiz de $f(x)=g(x)$). Ora, de $f(\alpha)=g(x)$ deduz-se, então, $f(\alpha)+\varphi(\alpha)=g(\alpha)+\varphi(\alpha)$, igualdade comprovativa de ser α raiz da equação $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$. Recìprocamente, se se designa por γ uma solução genérica desta equação, tem-se $f(\gamma)+\varphi(\gamma)=g(\gamma)+\varphi(\gamma)$. Daí, $f(\gamma)=g(\gamma)$. Consequentemente, γ é raiz da equação $f(x)=g(x)$.

As duas equações $f(x)=g(x)$ e $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ são, então, equivalentes.

Seja, agora, $\theta(x)$ uma função não inteira de x. Se $\theta(\alpha)$ tem significado numérico a equação $f(x)=g(x)$ é equivalente à equação $f(x)+\theta(x)=g(x)+\theta(x)$ (tudo se passa como no caso anterior). Se $\theta(\alpha)$ não tem significado numérico as duas equações não serão equivalentes, visto que carece de sentido a relação $f(\alpha)+\theta(\alpha)=g(\alpha)+\theta(\alpha)$.

Em resumo:

Primeiro princípio de equivalência: «Somando a ambos os membros de uma equação uma mesma constante ou uma mesma função inteira da incógnita resulta uma equação equivalente à primeira; somando a ambos os membros uma mesma função não inteira da incógnita a equação obtida só não será equivalente à proposta se para alguma raiz desta a função carece de significado numérico».

Assim, por exemplo:

1) São equivalentes as equações

$$5x+8=3-2x \quad \text{e} \quad 7x=-5,$$

pois que a segunda equação resulta da primeira, somando a ambos os membros desta a função inteira $\varphi(x)=2x-8$.

2) Não são equivalentes as equações

$$x^2=4 \quad \text{e} \quad x^2+\frac{1}{x-2}=4+\frac{1}{x-2},$$

porque a função $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-2}$ carece de significado para $x=2$, que é raiz da equação $x^2=4$. Quer dizer, ao passar desta equação para a equação $x^2+\dfrac{1}{x-2}=4+\dfrac{1}{x-2}$ perde-se a raiz $x=2$.

3) São equivalentes as equações

$$3x = 7 \quad \text{e} \quad 3x + \frac{1}{x-2} = 7 + \frac{1}{x-2},$$

porque a função $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-2}$ tem significado numérico para $x = \dfrac{7}{3}$ que é a única raiz da equação $3x = 7$.

Do princípio que estabelecemos resulta a importante conclusão: «é sempre legítimo o transporte de um membro para o outro da equação, de uma constante ou de uma função inteira da incógnita, mediante troca de sinal».

Com efeito, se se designa por A uma constante ou uma função inteira de x, a equação $f(x) + A = g(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x) - A$ que se obtém da primeira somando a ambos os membros $-A$. Mas o transporte de um membro para outro da equação de uma função não inteira da incógnita pode introduzir soluções novas, caso em que a equação obtida não será equivalente à proposta.

Assim,

4) Seja a equação

$$x - 4 + \frac{1}{x-1} = -3 + \frac{1}{x-1}.$$

Transportando para o 1.º membro o termo $\dfrac{1}{x-1}$ que figura no 2.º membro, resulta:

$$x - 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -3$$

ou seja,

$$x - 4 = -3$$

Ora esta equação admite a raiz $x = 1$, que não é solução da equação proposta.

Retomemos a equação $f(x) = g(x)$ e designemos por k um número diferente de zero. Vejamos que a equação $f(x) = g(x)$ é sempre equivalente à equação $kf(x) = kg(x)$. De facto, sendo α uma solução qualquer da primeira equação, é $f(\alpha) = g(\alpha)$ e daí $kf(\alpha) = kg(\alpha)$. Quer dizer, α é também raiz da equação $kf(x) = kg(x)$. Recìprocamente, sendo β uma raiz qualquer da equação $kf(x) = kg(x)$ será $kf(\beta) = kg(\beta)$, donde resulta, mulplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{k}$ (terá, pois, de ser $k \neq 0$) $f(\beta) = g(\beta)$. Isto é, β satisfaz também à equação $f(x) = g(x)$.

As duas equações são, assim, equivalentes.

Se, porém, se multiplicam ambos os membros da equação $f(x) = g(x)$ por uma função $\varphi(x)$ da incógnita, a questão carece de análise mais demorada.

E assim:

a) Toda a raiz do tipo α (como tal se designarão) de $f(x) = g(x)$ é também raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$, desde que $\varphi(\alpha)$ tenha significado númérico. (Como no caso do teorema anterior).

b) Toda a raiz α' de $f(x) = g(x)$ não é raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ desde que $\varphi(\alpha')$ careça de significado númérico.

Porque não existem os produtos $f(\alpha')\varphi(\alpha')$ e $g(\alpha')\varphi(\alpha')$.

c) Toda a raiz λ de $\varphi(x)$ que não seja raiz de $f(x) = g(x)$ é também raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ desde que $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ tenham significado númerico.

Pois de $\varphi(\lambda) = 0$ resulta, então, $f(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) = g(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)$.

d) Toda a raiz λ' de $\varphi(x)$ que não dá significado numérico a algum dos membros de $f(x) = g(x)$ não é raiz da equação $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$.

Porque, suposto $f(\lambda')$ sem significado numérico, não existe o produto $f(\lambda') \cdot \varphi(\lambda')$.

Do que se expõe nas alíneas anteriores logo ressalta, que quando se passa da equação I) $f(x) = g(x)$ à equação II) $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$, poder-se-ão ganhar ou perder raízes, ou nem ganhar nem perder (caso em que as duas equações são equivalentes). Perdem-se raízes, se há soluções da equação I) que não satisfazem à equação II); ganham-se raízes, se há soluções da equação II que não verificam a equação I).

Logo,

1) As raízes perdidas são do tipo α'.

2) As raízes ganhas são do tipo λ (que são raízes de $\varphi(x)$).

3) Se a equação I) admite, apenas, raízes do tipo α e as raízes de $\varphi(x)$ são do tipo λ', as equações I) e II) são equivalentes.

Em particular, se $\varphi(x)$ é função inteira, não há raízes de $f(x)=g(x)$ do tipo α' e, portanto, não há perda de raízes. Quer dizer, a equação II) tem, pelo menos, todas as soluções de I).

Os exemplos seguintes esclarecem a questão.

Seja a equação

$$\text{A)}\qquad 2x+\frac{x-2}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

Por comodidade, continuaremos a designar por $f(x)$ e $g(x)$ o primeiro e segundo membros, respectivamente, da equação A) e por $\varphi(x)$ uma função da incógnita por que ambos os membros se multiplicarão.

Assim, sendo $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-2}$ resulta a equação

$$\text{B)}\qquad \frac{2x}{x-2}+\frac{1}{x-1}=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$$

Como $\varphi(x)$ não tem significado numérico para $x=2$ que é solução da equação *A)*, segue-se que esta raiz é do tipo α'.

Esta circunstância implica a perda de uma raíz, isto é, a equação *B)* não admite a raiz $x=2$.

Logo, as duas equações não são equivalentes.

Se for $\varphi(x)=x-1$ obtém-se a equação

$$\text{C)}\qquad 2x(x-1)+x-2=2x$$

Como $\varphi(x)$ é função inteira de x não se perdem raízes. Por outra parte, a única raiz de $\varphi(x)$ é do tipo $\lambda'(\lambda'=1)$, visto que $f(\lambda')$ carece de significado numérico. Logo, também se não ganham raizes.

Então, as duas equações *A)* e *C)* são equivalentes.

Enfim, se se tem $\varphi(x)=x+2$ resulta a equação

$$\text{D)}\qquad 2x(x+2)+\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{2x(x+2)}{x-1}$$

Não há perda de raízes, por isso que $\varphi(x)$ é função inteira.

Além disso, $\varphi(x)$ tem uma raiz do tipo $\lambda(\lambda=-2)$, visto que $f(-2)$ e $g(-2)$ têm significado numérico, sendo $f(-2)\neq g(-2)$. Ganhou-se, portanto, uma raiz $x=-2$.

Logo, as duas equações *A)* e *D)* não são equivalentes.

O que precede permite, pois, concluir:

Segundo princípio de equivalência: — «Multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira; se se multiplicam ambos os membros de uma equação por uma função da incógnita (se a função for inteira não há perda de raízes) a equação resultante poderá ser ou não equivalente à proposta».

A principal aplicação prática do segundo princípio de equivalência reside na possibilidade de desembaraçar de denominadores uma equação, isto é, na determinação de uma equação equivalente à proposta que não contenha denominadores. Para isso, multiplicam-se ambos os membros da equação dada pelo menor múltiplo comum dos seus denominadores.

Se a equação é inteira, o *m. m. c.* é constante e, portanto, é sempre legítimo desembaraçar de denominadores.

Se a equação é fraccionária, o *m. m. c.* é uma função inteira, $\varphi(x)$, da incógnita, não havendo, por isso, perda de raízes. E só se poderão ganhar se alguma das raízes da equação resultante é raiz de $\varphi(x)$. Quer dizer, as duas equações são equivalentes desdes que as soluções da equação obtida não anulem o *m. m c.* dos denominadores da equação proposta.

E assim:

«É sempre legítimo desembaraçar de denominadores uma equação racional desde que as raízes da equação resultante não anulem o *m. m. c.* dos denominadores da equação proposta».

Seja a equação fraccionária $H)$

$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{7}{3(x+1)}=\frac{3x}{2(x-1)}$$

Multiplicando ambos os membros pelo *m. m. c.* dos denominadores, $\varphi(x)=6(x^2-1)$ resulta a equação $18+14(x-1)=9x(x+1)$ que tem duas raízes $x_1=1$ e $x_2=-\frac{4}{9}$.

Pois que $\varphi(x_2)\neq 0$ e $\varphi(x_1)=0$ segue-se que a equação $H)$ não admite a raiz $x=1$, tendo, portanto, uma única solução, $x=-\frac{4}{9}$.

De acordo com tudo o que fica dito, conclui-se que a redução de uma equação fraccionária à forma inteira, isto é, a operação de desembaraçar de denominadores uma equação, não conduz, necessàriamante, à obtenção de uma equação equivalente. As raízes da equação inteira obtida só serão raízes da equação proposta desde que não anulem o *m. m. c.* dos denominadores desta equação.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

A Redacção da «Gazeta de Matemática» vem-nos incumbindo há tempos da tarefa de dar aos leitores notícia sobre o movimento matemático internacional. A tarefa imposta tem sido só parcialmente cumprida por vários motivos entre os quais avulta a dificuldade de a realizar de modo completo. Com efeito, os últimos anos têm sido assinalados por um grande desenvolvimento das matemáticas que se traduz na creação de Institutos e Centros de Estudos de Matemática Pura e Aplicada em todo o mundo, por numerosos congressos internacionais e nacionais, colóquios, simpósios, etc.; A União Matemática Internacional, cuja actividade tinha sido interrompida durante vários anos, tem contribuído largamente por variados modos para a realização destas reuniões. Nestas não são só apresentados os progressos alcançados e discutidos os problemas que ocupam no momento os matemáticos, mas também se tem elaborado programas e estabelecido inquéritos tendentes a melhorar e modernizar o ensino da Matemática, problema que se impõe urgente. Em próximo número da «Gazeta de Matemática» o Prof. Hugo Ribeiro, da Universidade de Nebraska, focará alguns destes assuntos e o Prof. José Sebastião e Silva, da Universidade de Lisboa, dará notícia sobre algumas das actividades da União Matemática Internacional, junto da qual é um dos representantes de Portugal.

Uma ideia sobre o movimento matemático pode já obter-se pela consulta frequente das numerosas revistas de Matemática que hoje se publicam e aí se verá pela natureza dos artigos quais os problemas e assuntos que mais ocupam os cientistas. Há-as dos mais variados tipos, algumas publicando só artigos de um dado capítulo da Matemática, (Lógica Matemática, Cálculo Tensorial, etc.), outras menos especializadas. Algumas destas revistas, em especial os Boletins das Sociedades de Matemática, incluem noticiário das reuniões, dos cursos extraordinários e conferências de especialistas convidados pelas Escolas ou Centros de Estudo, prémios, etc.; a este tipo pertencem por exemplo, o «Bulletin of the American Mathematical Society» que dá um panorama parcial do movimento matemático nos Estados Unidos da América do Norte, o «Bolletino della Unione Matemática Italiana», a revista «L'Enseignement Mathématique», orgão oficial da Comissão Internacional do Ensino Matemá-