

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

113 — M. L. DUBREIL — JACOTIN, L. LESIEUR e R. CROISOT — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* — Cahiers Scientifiques, fasc. XXI, 385 pág. — Gauthier - Villars, Éditeur — Imprimeur — Libraire, Paris, 1953.

Estamos em presença de mais um belo livro da Colecção «Cahiers Scientifiques», dirigida por GASTON JULIA.

Trata-se, como se afirma na Introdução, do desenvolvimento de um ensino semestral realizado pelos Autores na Faculdade de Ciências de Poitiers, nos anos escolares de 1950-1951 e 1951-1952.

Esta obra está dividida em três partes.

Na primeira parte, elaborada por R. CROISOT, tratam-se as noções fundamentais relativas aos Reticulados abstractos.

O capítulo I é dedicado aos *Conjuntos Ordenados* (ou *parcialmente ordenados*, segundo a terminologia de GARRETT BIRKHOFF). As propriedades gerais dos *Reticulados* e *Semi-reticulados* são expostas no Capítulo II.

O Capítulo III trata de *Reticulados Completos* e *Semi-reticulados Completos*, incluindo a demonstração do Teorema de MACNEILLE relativo à imersão de um conjunto ordenado num reticulado completo.

O Capítulo IV é dedicado ao estudo das noções de *Homomorfismo* e *Isomorfismo* de semi-reticulados e de reticulados.

Os *Reticulados Modulares*, *Distributivos* e *Semi-modulares* são estudados, respectivamente, nos Capítulos V, VI e VII. Introduce-se a noção de *Reticulado Modular Enfraquecido*, que se revela muito útil para o estudo de certos reticulados geométricos.

A definição de Reticulado Semi-modular é dada independentemente de ser finito ou não o comprimento do reticulado e várias propriedades conhecidas para os reticulados semi-modulares de comprimento finito, são estabelecidas para reticulados semi-modulares mais gerais, a saber, aqueles em que todas as cadeias limitadas são de comprimento finito.

Os *Reticulares Complementados* e *Relativamente Complementados* são estudados no Capítulo VIII. Estabelece-se uma condição necessária e suficiente para que seja complementado ou relativamente complementado, um reticulado semi-modular com primeiro elemento e em que todas as cadeias limitadas são de comprimento finito.

O Capítulo IX trata de noções e propriedades ligadas ao conceito de *Independência* em reticulados e em semi-reticulados.

A segunda parte deste trabalho, da autoria de M.<sup>me</sup> DUBREIL-JACOTIN, é consagrada ao estudo dos conjuntos munidos de uma estrutura algébrica ordenada.

Começa por estabelecer as propriedades gerais dos *Reticulados Multiplicativos* ou *Grupóides Reticulados* e, mais geralmente, dos *Grupóides ordenados*, tomando o termo «grupoide» na acepção de OYSTEIN ORE.

A operação de *Residuação* é estudada no Capítulo II, que termina pelas demonstrações de que *todo o grupo reticulado em cadeia é arquimedeano e comutativo* e *todo o corpo ordenado arquimedeano é comutativo*. [Em «Lattice Theory», de GARRETT BIRKHOFF, mostra-se que *é comutativo todo o grupo reticulado completo*].

No Capítulo III estudam-se *Congruências*. É apresentada uma condição necessária e suficiente para que uma equivalência definida num conjunto ordenado, seja regular com respeito à relação de ordem.

Introduz-se a noção *equivalência fortemente regular superiormente* (equivalência F. R. S) e mostra-se que toda a congruência num reticulado é uma equivalência F. R. S., com respeito à relação de ordem definida pela operação «união».

Dão-se algumas propriedades gerais das congruências definidas numa álgebra.

Estabelece-se uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de um grupoide associativo seja classe de alguma congruência nele definida e tal condição é estabelecida independentemente de o grupoide ter ou não elemento unidade. Para o caso de o grupoide ser grupo, mostra-se que existe *apenas* uma congruência que admite por classe um subconjunto que satisfaça a tal condição.

Mostra-se ainda que, para todo o semi-reticulado, há um reticulado de congruências que admitem por classe todo o subsemireticulado convexo dado.

No Capítulo seguinte estudam-se os *Ideais*.

Começa-se por dar uma definição de *complexo ideal* num grupoide associativo; a definição é tal que, no caso de o grupoide ser grupo, um complexo é um complexo ideal se e só se é um subgrupo invariante. Os complexos ideais são utilizados para a determinação das congruências de uma álgebra.

Define-se ideal de um reticulado e estudam-se as

relações entre ideais e congruências, procurando as congruências que admitem um dado ideal como classe.

Estabelecem-se propriedades importantes, sob o ponto de vista dos reticulados, dos ideais de um grupo reticulado, de um anel, de um grupoide e, finalmente de uma álgebra.

Nos Capítulos V e VI são demonstrados vários teoremas de decomposição.

Finalmente, a terceira parte da obra, escrita por L. LESIEUR, trata do estudo dos *Reticulados Geométricos*.

O Capítulo I diz respeito aos Reticulados Geométricos de dimensão finita. Começa por observar que os elementos de uma Geometria Projectiva e os elementos de uma Geometria Afim constituem reticulados. Em seguida, procede-se à construção axiomática de uma Geometria de dimensão  $n$ , partindo directamente dos elementos de um reticulado. Caracterizam-se, de vários modos, as geometrias de dimensão  $n$ .

No capítulo II estudam-se análogamente os Reticulados Geométricos de dimensão infinita, introduz-se a noção de paralelismo e dá-se uma condição necessária e suficiente de irreducibilidade de um reticulado geométrico.

No Capítulo seguinte estudam-se as geometrias projectivas de dimensão finita ou infinita e caracterizam-se as geometrias projectivas irreducíveis.

As Geometrias afins de dimensão finita ou infinita são estudadas no Capítulo IV. Uma geometria afim é definida como uma geometria modular enfraquecida de dimensão igual ou maior que 2, que verifica o postulado de Euclides.

Introduz-se o chamado *Postulado de Euclides Generalizado*: «Dada uma recta de um reticulado geométrico e dado um ponto não pertencente à recta, existe quando muito uma recta que passa pelo ponto e é paralela à recta dada».

Define-se em seguida *Geometria Afim Generalizada* como uma geometria modular enfraquecida de dimensão igual ou maior que 3, que verifica o postulado de Euclides generalizado.

Estuda-se o paralelismo numa geometria afim generalizada.

Constroi-se uma geometria projectiva a partir de uma geometria afim generalizada.

Estabelece-se finalmente a irreducibilidade de uma geometria afim generalizada.

As geometrias planas (isto é, de dimensão 2) afins são estudadas, *por via analítica*, no Capítulo V.

Faz-se uma referência especial às *Geometrias Planas Afins de Translação*, às *Geometrias Planas Afins Desarguianas* e *Geometrias Planas Afins Pascalianas*.

No último capítulo põem-se em relevo as ligações íntimas existentes entre as variedades lineares de

uma geometria projectiva irreducível e os subespaços vectoriais de um espaço vectorial.

Mostra-se que o reticulado dos subespaços vectoriais de um espaço vectorial é uma geometria projectiva irreducível e que toda a geometria projectiva irreducível de dimensão superior a 2 é isomorfa à geometria projectiva dos subespaços vectoriais de um espaço vectorial.

O texto, de leitura agradável, é ilustrado com exemplos muito bem escolhidos.

Não tem este livro a feição enciclopédica de «*Lattice Theory*» de GARRETT BIRKHOFF. Antes tem carácter didático, no bom sentido — no sentido de habilitar o leitor ao estudo de Memórias originais e estimular o seu trabalho pessoal.

No final de cada capítulo são propostos vários exercícios com o objectivo de dominar e desenvolver as matérias expostas.

Desejamos que esta obra seja lida por Professores e Estudantes de Matemática, pelo muito que ela pode contribuir para a actualização dos cursos de Matemática das nossas Escolas Superiores, actualização absolutamente indispensável e urgente, que nenhum artifício pode já iludir.

J. Morgado

**114 — I. P. NATANSON — Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen — 1954 — AKADEMIE VERLAG — Berlin.**

Com a tradução alemã desta obra de I. P. NATANSON, a editora «Akademie-Verlag» põe à disposição dos alunos e professores de matemática que dominam esta língua, um livro que pode contribuir grandemente para a divulgação de estudo profundo e actualizado da Análise Matemática.

Na realidade, a categoria deste livro, publicado pela primeira vez em 1950 (1), impõe-no por forma que, quatro anos depois é adoptado como livro de texto em várias universidades alemãs. A forma magistral e simultaneamente simples como a difícil teoria das funções de variável real é apresentada, torna a leitura agradável e atraente. O autor dirige-se sempre ao estudante e consegue, mercê da exposição, ordem e selecção de assuntos e exemplos, incutir-lhe confiança nas suas possibilidades pessoais e abrir-lhe perspectivas sobre as infundáveis belezas das matemáticas.

Em 470 páginas são expostos os assuntos seguintes:

Cap I — Conjuntos Infinitos: são pormenorizadamente esclarecidas as noções de numerável e potência do contínuo.

(1) Edições do Estado para literatura teórico-técnica, Moscovo-Leningrado.

Cap. II. — Conjuntos de pontos: estuda a estrutura dos conjuntos abertos e fechados, as noções de separabilidade, pontos de condensação. O Cap. III estuda os conjuntos mensuráveis, as noções de medida interior e exterior e medida (à *LEBESGUE*) dos conjuntos limitados, a mensurabilidade e a medida como noção invariante em face dos movimentos e termina com notas gerais sobre o problema da medida baseadas sobre os teoremas de *BANACH*, *HAUSDORFF* e *VITALI*.

As funções mensuráveis são estudadas no Cap. IV: os teoremas de *FRECHET*, *EGOROW*, *LUSIN*, *WEIERSTRASS*, *BERNSTEIN* determinam as estruturas dessas funções.

O Cap. V dedica-se ao integral de *LEBESGUE* das funções limitadas; o Cap. VI às funções somáveis, o Cap. VII às funções de quadrado somável, sistemas de funções ortogonais e espaços  $L^p$  e  $l^p$ .

O integral de *STIELTJES*, precedido do estudo das funções de variação limitada, do princípio de *HELLY* e teoremas de *BANACH*, é exposto no Cap. VIII.

As funções absolutamente contínuas e suas propriedades, as representações contínuas — teoremas de *BANACH*, *ZARETZKI*, *FICHTENHOLZ* — precedem o integral indefinido de *LEBESGUE* (Cap. IX). A teoria das funções de uma variável real termina no Cap. X com o estudo das séries de *FOURIER* e suas aplicações.

Seguem-se dois capítulos (XI e XII) sobre conjuntos planos e funções mensuráveis de várias variáveis e sua integração; um capítulo sobre funções de conjunto e suas aplicações à teoria da integração e três capítulos respectivamente sobre números transfinitos, classificação de *BAIRE* e análise funcional.

Quase todos os capítulos terminam por vários exercícios propostos — muitos deles de relativa dificuldade — totalizando cerca de 120.

O livro termina com um interessante e original capítulo onde se dá realce ao papel desempenhado pelos investigadores russos e soviéticos no domínio e na evolução da teoria das funções de variável real.

Sendo impossível em breves palavras fazer uma referência adequada a esta obra, queremos apenas apontá-la como exemplo de como a clareza, o rigor, a profundidade não são incompatíveis na boa exposição matemática.

Tratando-se portanto duma verdadeira obra-prima, é com sincera satisfação que a apresentamos ao público matemático português, particularmente aos estudiosos que venham a beneficiar do curso de técnica de tradução de obras matemáticas em língua alemã, organizado pela Gazeta de Matemática. O seu preço, 26 marcos, é relativamente baixo, comparado com outros livros estrangeiros.

J. G. T.

**115** — *KARL STRUBECKER* — *Differentialgeometrie I, Kurventheorie des Ebene und des Raumes.* — «Sammlung Göschen» — Walter de Gruyter — Berlin, 1955.

No vol. 1113/1113a da Coleção Göschen estudam-se as noções fundamentais de Geometria Diferencial das curvas planas e torsas. Em 145 páginas de formato pequeno encontra o leitor, numa exposição simples e actualizada, os assuntos que constituem o conteúdo normal do programa de geometria diferencial integral numa cadeira de análise infinitesimal, mas que ultrapassem de longe, infelizmente, os conhecimentos adquiridos nas nossas universidades.

O livro divide-se em duas partes:

I — Curvas planas, curvatura, equação intrínseca das curvas planas, contacto, evolutas e evolventes, curvas convexas.

II — Curvas no espaço, fórmulas de *FRENET*, equações intrínsecas das curvas torsas, famílias de planos, superfícies planificáveis, evolutas e evolventes, curvas isotropas.

Este livrinho mantém as características dos restantes da colecção — clareza, simplicidade, muitos exemplos e boa apresentação.

J. G. T.

**116** — *KEIICHI HAYASHI* — *Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen* — Walter de Gruyter — Berlin, 1955.

O presente livro é uma reedição das tábuas editadas com o mesmo título em 1920. Apresenta, em relação às tábuas vulgares de funções trigonométricas circulares e hiperbólicas, a grande vantagem de referir o argumento das mesmas funções, às unidades naturais: para cada ponto  $x$  são dados os valores  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $e^x$ ,  $e^{-x}$ , e o correspondente valor do argumento em unidades sexagesimais.

As diferenças dos valores de  $x$  são de:  $10^{-4}$  desde  $x = 0$  a  $x = 0,1$ ;  $10^{-3}$  desde  $x = 0,1$  a  $x = 3,0$ ;  $10^{-2}$  desde  $x = 3,0$  a  $x = 6,3$ ;  $10^{-1}$  desde  $x = 6,3$  a  $x = 10,0$ , intervalos de variação na realidade pequenos.

Termina o livro com tábuas de  $e^x$  e  $e^{-x}$  para os valores seguintes: de  $x = 10^{-4}$  a  $x = 9 \cdot 10^{-3}$  — doze decimais; de  $x = 10^{-2}$  a  $x = 9 \times 10^{-2}$  — dez decimais; de  $x = 10^{-1}$  a  $x = 10$  — oito decimais; e valores inteiros de  $x$  desde  $x = 11$  a  $x = 100$ ; com tabelas de transformação dos valores naturais do argumento nas unidades sexagesimais; com formulários de trigonometria circular e hiperbólica.

J. G. T.